

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P17-86-582

Н.М.Плакида, А.Радош, Н.С.Тончев

**ТОЧНО РЕШАЕМАЯ МОДЕЛЬ
ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА
С КУБИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ**

Направлено в журнал "Physica A"

1986

I. Введение

Широкий класс структурных фазовых переходов в системах с кубической анизотропией может быть описан следующим модельным гамильтонианом (см. /1/):

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \left(\frac{P_{e\alpha}^2}{M} - A Q_{e\alpha}^2 \right) + \frac{1}{4} \sum_{\ell, \ell', \alpha} \Phi_{\ell \ell'} (Q_{e\alpha} - Q_{e', \alpha})^2 + \frac{B_1}{4} \sum_{\alpha} \left(\sum_{\ell} Q_{e\ell}^2 \right)^2 + \frac{B_2}{4} \sum_{\ell, \alpha} Q_{e\ell}^4. \quad (I.1)$$

Для простоты далее рассматривается двухкомпонентная модель, $\alpha = 1, 2$. Согласно феноменологической теории Ландау модель (I) описывает фазовый переход второго рода в области значений параметров B_1 и B_2 , определяемой неравенствами

$$B_1 + B_2 > 0, \quad 2B_1 + B_2 > 0. \quad (I.2)$$

Ренормгрупповой анализ эффективного гамильтониана Гинзбурга - Ландау - Вильсона предсказывает^{x)}, что наличие кубической анизотропии приводит к фазовому переходу первого рода в двух областях значений параметров B_1 и B_2 (см. /3/):

$$1) \quad B_1 + B_2 > 0, \quad 2B_1 + 3B_2 < 0 \quad (I.3a)$$

$$2) \quad 2B_1 + B_2 > 0, \quad B_1 < 0. \quad (I.3b)$$

и области преобразуются одна в другую при замене переменных в (I):

$$Q_{e1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_{e1} + Q_{e2}); \quad Q_{e2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_{e1} - Q_{e2}). \quad (I.4)$$

В настоящей работе используется точно решаемый вариант модели (I), который описывается гамильтонианом:

Впервые аналогичная проблема рассматривалась в рамках полевой модели в работе /2/.

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\ell, \alpha} \left(\frac{P_{e\ell}^2}{M} - A Q_{e\ell}^2 \right) + \frac{1}{4} \sum_{\ell, \ell', \alpha} \Phi_{\ell \ell'} (Q_{e\ell} - Q_{e', \alpha})^2 + \frac{B_1}{4N} \left(\sum_{\ell, \alpha} Q_{e\ell}^2 \right)^2 + \frac{B_2}{4N} \sum_{\ell, \ell', \alpha} Q_{e\ell}^2 Q_{e', \alpha}^2. \quad (I.5)$$

В этом гамильтониане вместо локального, в (I.1) вводится бесконечно слабое (при $N \rightarrow \infty$), но с неограниченным радиусом ангармонического взаимодействия. Для гамильтониана (I.5) преобразование координат (I.4) уже не переводит область (I.3a) в (I.3b) и обратно, и поэтому свойства модели (I.5), вообще говоря, могут быть разными в этих двух областях.

Однокомпонентный вариант модели (I.5), первоначально предложенный в /4/, был подробно изучен в работах /5/ и /7/ как в классическом, так и в квантовом пределах. Было показано, что в классическом пределе имеет место непрерывный фазовый переход с критическим поведением, аналогичным сферической модели (см., например, /8/).

В настоящей работе, как и в /5/ и /7/, для исследования модели (I.5) мы воспользуемся методом аппроксимирующего гамильтониана. В следующем разделе вводится аппроксимирующий гамильтониан и находится область значений параметров B_1 и B_2 , где наш метод позволяет нам найти точное выражение для свободной энергии (в термодинамическом пределе). Анализ свободной энергии приводится в разделах 3 и 4, и в разделе 5 рассмотрены некоторые свойства упорядоченной фазы. Заключение замечания приведены в разделе 6.

2. Аппроксимирующий гамильтониан

Обобщая /5/, выберем аппроксимирующий гамильтониан в виде

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{\ell, \alpha} \left(\frac{P_{e\ell}^2}{M} + A \Delta_{\alpha} Q_{e\ell}^2 \right) + \frac{1}{4} \sum_{\ell, \ell', \alpha} \Phi_{\ell \ell'} (Q_{e\ell} - Q_{e', \alpha})^2 - C, \quad (2.1)$$

где Δ_{α} - вариационный параметр. Постоянную C определяем из условия

$$\frac{1}{N} (H - H_0) = \frac{N}{4} \left\{ (B_1 + \frac{1}{2} B_2) [(\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2) - \delta_1]^2 + \frac{1}{2} B_2 [(\mathcal{R}_1 - \mathcal{R}_2) - \delta_2]^2 \right\}, \quad (2.2)$$

где

$$A_{\alpha} = \frac{1}{N} \sum_{\ell} Q_{\ell\alpha}^2, \quad \delta_1 = A \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + 2}{2B_1 + B_2}, \quad \delta_2 = A \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{B_2}. \quad (2.2a)$$

Следовательно,

$$C = \frac{1}{2} \frac{N}{4} [(2B_1 + B_2)\delta_1^2 + B_2\delta_2^2]. \quad (2.3)$$

Согласно неравенству Боголюбова имеем

$$\frac{1}{N} \langle H - H_0 \rangle_H \leq f_N[H] - f_N[H_0] \leq \frac{1}{N} \langle H - H_0 \rangle_{H_0}, \quad (2.4)$$

где

$$f_N[H] = -\frac{kT}{N} \ln(\text{Tr} \exp[-\frac{1}{kT} H]). \quad (2.4a)$$

Разность

$$f_N[H] - f_N[H_0] \geq 0 \quad (2.5)$$

неотрицательна в области

$$2B_1 + B_2 > 0 \quad \text{и} \quad B_2 > 0. \quad (2.6)$$

Вариационный параметр Δ_{α} находится из условий экстремума $f_N[H_0]$:

$$\partial f_N[H_0] / \partial \Delta_{\alpha} = 0, \quad (2.7)$$

которые дают следующие выражения:

$$\Delta_{1N} + 1 = (b_1 + b_2) y_{1N} + (b_1 - b_2) y_{2N}, \quad (2.7a)$$

$$\Delta_{2N} + 1 = (b_1 - b_2) y_{1N} + (b_1 + b_2) y_{2N}. \quad (2.7b)$$

Здесь использованы безразмерные переменные:

$$b_1 = \frac{1}{2} \frac{2B_1 + B_2}{B_1 + B_2}, \quad b_2 = \frac{1}{2} \frac{B_2}{B_1 + B_2}, \quad (2.8a)$$

$$y_{\alpha N} = \frac{B_1 + B_2}{A} \frac{1}{N} \sum_{\alpha} \frac{\lambda}{2\Omega_{\alpha}} \text{cth} \frac{\lambda \Omega_{\alpha}}{2t}, \quad (2.8b)$$

$$\Omega_{\alpha}^2 = \Delta_{\alpha N} + \varphi_0 - \varphi_{\alpha}; \quad \varphi_{\alpha} = \frac{1}{A} \Phi(\vec{q}_{\alpha}), \quad (2.8b)$$

$$\lambda = \frac{\hbar v_0}{4E_0}, \quad t = \frac{kT}{4E_0}, \quad v_0^2 = \frac{A}{m}, \quad E_0 = \frac{A^2}{4(B_1 + B_2)}. \quad (2.8c)$$

Существует простое решение системы уравнений (2.7a, б)

$$\Delta_{1N} = \Delta_{2N} \equiv \Delta_N = -1 + 2b_1 y_{\alpha N} \approx \quad (2.9a)$$

$$\approx -1 + \frac{2b_1 t}{N} \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha}^{-2},$$

$$\Omega_{\alpha}^2 = \Omega_{\alpha}^2 \equiv \Omega_{\alpha}^2 = \Delta_N + \varphi_0 - \varphi_{\alpha}, \quad (2.9b)$$

где приближенное равенство (2.9a) написано в классическом пределе, $\lambda \rightarrow 0$. Анализ матрицы вторых производных $\partial^2 f_N[H_0] /$

$\partial \Delta_{1\alpha} \partial \Delta_{2\beta}$ позволяет сделать вывод о том, что решение (2.9a) является единственным и соответствует максимуму функции $f_N[H_0] \equiv f_N[H_0(\Delta_1, \Delta_2)]$. В этом случае проблема оценки разности в области (2.6)

$$f_N[H] - f_N[H_0] \geq 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (2.10)$$

проводится так же, как и для однокомпонентной модели. Поскольку последняя задача подробно обсуждалась в [5], приведем здесь лишь результаты этой оценки для изотропного спектра: $\varphi_0 - \varphi_{\alpha} \approx c q^2$.

В пределе $N \rightarrow \infty$ для разности (2.10) получаем

$$0 \leq \frac{1}{4E_0} \{f_N[H] - f_N[H_0]\} \equiv \tilde{f}_N[H] - \tilde{f}_N[H_0] \leq \tilde{f}_N[H] - \max_{\Delta_1, \Delta_2} \tilde{f}_N[H_0] \leq \frac{b_1}{N^2} \sum_{\alpha} \left(\frac{\lambda}{2\Omega_{\alpha}} \text{cth} \frac{\lambda \Omega_{\alpha}}{2t} \right)^2 \approx$$

$$\approx b_1 \left(\frac{t}{N}\right)^2 \sum \frac{1}{\Omega_1^4} \sim \begin{cases} O(N^{-2/3}), & t = t_c, \\ O(N^{-2}), & t > t_c, \end{cases} \quad (2.11)$$

где t_c — температура фазового перехода бесконечной системы, $N \rightarrow \infty$:

$$\Delta_{N \rightarrow \infty} \equiv \Delta_\infty(t) \sim \left(\frac{t - t_c}{t_c}\right)^2, \quad (t > t_c). \quad (2.11a)$$

Следовательно, в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$ в области (2.6) свободная энергия для модели (1.5) совпадает со свободной энергией аппроксимирующей системы (2.1) и в неупорядоченной фазе имеет те же термодинамические свойства, что и однокомпонентная модель (см. /5/ и /7/), не имеющая анизотропного взаимодействия. Исследование термодинамического потенциала $F(\eta, t)$ как функции параметра порядка η позволит нам получить более детальную информацию о характере фазового перехода в модели.

3. Разложение Ландау в области $2B_1 + B_2 > 0, B_2 > 0$

Термодинамический потенциал как функция параметра порядка может быть получен с помощью следующих двух преобразований (см. /7/).

А. Добавим сначала к гамильтониану (1.1) член, описывающий взаимодействие с внешним однородным полем:

$$H(h) = H - \sum_{e\alpha} h_\alpha Q_{e\alpha}. \quad (3.1)$$

Можно проверить, что при $\Delta_\alpha = \bar{\Delta}_\alpha$ имеют место соотношения

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle H(h) - H_0(h) \rangle_{H_0(h)} \Big|_{\Delta = \bar{\Delta}} \rightarrow 0, \quad (3.2)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ f_N[H] - f_N[H_0(h)] \Big|_{\Delta = \bar{\Delta}} \right\} \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

где

$$H_0(h) = H_0 - \sum_{e\alpha} h_\alpha Q_{e\alpha} \quad (3.3a)$$

и $\bar{\Delta}_\alpha$ определяется из уравнений:

$$\frac{\partial f_N[H_0(h)]}{\partial \Delta_1} = 0, \quad \frac{\partial f_N[H_0(h)]}{\partial \Delta_2} = 0. \quad (3.4)$$

Б. Совершим преобразование Лежандра:

$$F(x, T) = \max_h \left[f(h, T) + \sum_\alpha h_\alpha x_\alpha \right] \quad (3.5)$$

для функции

$$f(h, T) = \lim_{N \rightarrow \infty} \max_\Delta f_N[H_0(h)]. \quad (3.6)$$

Существует единственное решение уравнения (3.4) в рассматриваемой нами области параметров:

$$2B_1 + B_2 > 0, \quad B_2 > 0, \quad (3.7)$$

и оно соответствует максимальному значению $f_N[H_0(h)]$. Следовательно, в уравнении (3.5) можно переставить порядок нахождения максимума по h и Δ , в результате чего для термодинамического потенциала получаем выражение

$$\begin{aligned} F(\eta, t) &= \frac{1}{4E_0} F(x, T) = \\ &= \max_{\Delta_1, \Delta_2} \left\{ t \frac{v}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha} \int d^3q \ln \left[2 \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda \Omega_{q\alpha}}{2t} \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} \left[\frac{1}{B_1} (\Delta_1 + \Delta_2 + 2)^2 + \frac{1}{B_2} (\Delta_1 - \Delta_2)^2 \right] + \frac{1}{2} (\eta_1^2 \Delta_1 + \eta_2^2 \Delta_2) \right\}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где v — объем элементарной ячейки и введен безразмерный параметр порядка (см. (5.1)):

$$\eta_\alpha^2 = \frac{B_1 + B_2}{A} x_\alpha^2.$$

Анализ выражения в правой части (3.8) показывает, что оно либо имеет максимум при Δ_1, Δ_2 , подчиняющихся уравнениям:

$$\Delta_1 + 1 = (b_1 + b_2)(y_1 + \eta_1^2) + (b_1 - b_2)(y_2 + \eta_2^2); \quad (3.9a)$$

$$\Delta_2 + 1 = (b_1 + b_2)(y_2 + \eta_2^2) + (b_1 - b_2)(y_1 + \eta_1^2), \quad (3.9b)$$

либо достигает максимального значения при

$$\Delta_1 = \Delta_2 = 0 \quad (3.9в)$$

(очевидно, в области $\Delta_1, \Delta_2 \geq 0$).

В неупорядоченной фазе при

$$t > t_c = [2b_1 g(0)]^{-1} \quad (3.10)$$

(где были использованы обозначения (2.9):

$$y_\alpha \approx t \frac{v}{(2\pi)^3} \int d^3q \frac{1}{\Delta_\alpha + \varphi_0 - \varphi_q} \equiv t g(\Delta_\alpha)$$

разложение термодинамического потенциала (3.8) имеет вид

$$\mathcal{F}(\eta, t) = \frac{t v}{(2\pi)^3} \sum_\alpha \int d^3q \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \Omega q_\alpha}{2t} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{4} b_1 (\eta_1^2 + \eta_2^2)^2 + \frac{1}{4} b_2 (\eta_1^2 - \eta_2^2)^2 + \quad (3.11)$$

$$+ \frac{1}{4} b_1 (y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{4} b_2 (y_1 - y_2)^2 \approx \mathcal{F}(0, t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \Delta_\infty(t) (\eta_1^2 + \eta_2^2) + \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} \eta_\alpha^2 \eta_\beta^2 + \frac{1}{3!} \sum_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma} \eta_\alpha^2 \eta_\beta^2 \eta_\gamma^2 + \dots,$$

где $\Delta_\infty(t)$ определяется выражением (2.12) и введены обозначения

$$b_{11} = b_{22} = \Gamma_1 = \frac{4b_1 b_2 \xi + 1}{4b_1 b_2 \xi^2 + 2\xi + 1}, \quad (3.12a)$$

$$b_{12} = b_{21} = \Gamma_2 = \frac{2(b_1 - b_2)}{4b_1 b_2 \xi^2 + 2\xi + 1}, \quad (3.12б)$$

$$C_{111} = C_{222} \sim \frac{\xi}{\xi^3 4b_1 b_2} \xrightarrow{t \rightarrow t_c} \frac{1}{4b_1 b_2}, \quad (3.12в)$$

$$C_{\alpha\beta\gamma} (\alpha\beta\gamma \neq 1, 8) \sim \frac{b_1 - b_2}{b_1 + b_2} \frac{1}{\xi} \frac{1}{(t - t_c)^{1/2}} \Delta_\infty^{-1/2}, \quad (3.12г)$$

$$\xi = (2\pi)^{-3} t v \int d^3q \Omega_q^{-4} \sim (t - t_c)^{-1/2} \Delta_\infty^{-1/2}, \quad (3.12д)$$

$$\zeta = (2\pi)^{-3} t v \int d^3q \Omega_q^{-6} \sim (t - t_c)^{-3/2} \Delta_\infty^{-3/2}. \quad (3.12е)$$

В упорядоченной фазе $t < t_c$ функция $\mathcal{F}(\eta, t)$ оказывается независимой от η_1 и η_2 :

$$\mathcal{F}(\eta, t < t_c) = 2t \frac{v}{(2\pi)^3} \int d^3q \ln \left(2 \operatorname{sh} \frac{\lambda \Omega q}{2t} \right) \Big|_{\Delta=0} - \frac{1}{4b_1} \quad (3.13)$$

в области значений параметров

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 \leq \frac{1}{b_1} \frac{t_c - t}{t_c}. \quad (3.14)$$

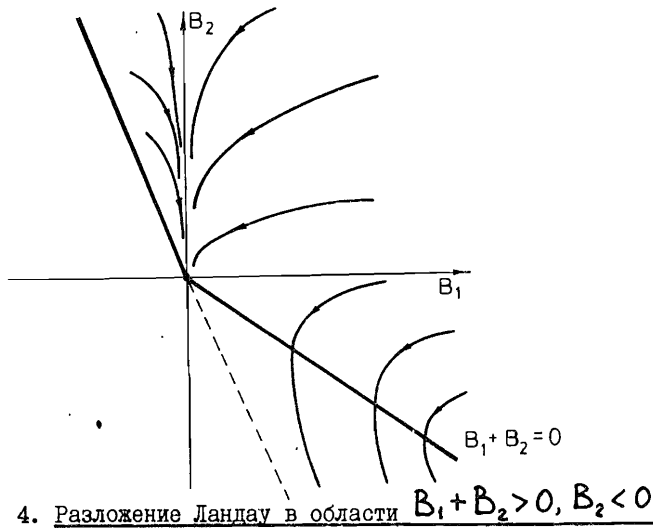
Отметим, что область (3.14) не является единственной, где $\mathcal{F}(\eta, t)$ не зависит от η_1, η_2 , более подробно, однако, этот вопрос мы не будем здесь обсуждать:

Уравнения (3.12а, б) позволяют нарисовать траекторию изменения эффективных параметров $\tilde{B}_1(T)$ и $\tilde{B}_2(T)$:

$$\tilde{B}_1 = (B_1 + B_2) \Gamma_2 \quad (3.15а)$$

$$\tilde{B}_2 = (B_1 + B_2) (\Gamma_1 - \Gamma_2). \quad (3.15б)$$

В рассмотренной нами области (3.7), где задача имеет точное решение, параметры \tilde{B}_1 и \tilde{B}_2 стремятся к нулю при $T \rightarrow T_c$, $\xi \rightarrow \infty$, как это показано на рисунке. Согласно (3.11) и оценкам (3.12) фазовый переход оказывается непрерывным переходом, как и в однокомпонентной модели (см. /5/ и /7/).



Обсудим поведение модели во второй части интересующей нас области значений параметров (I.2), т.е. при

$$B_1 + B_2 > 0, B_2 < 0. \quad (4.1)$$

Если формально провести преобразование Лежандра

$$F(x, T) = \max_h \left\{ f[H_0(h)] + \sum_{\alpha} x_{\alpha} h_{\alpha} \right\} \quad (4.2)$$

для функции

$$f[H_0(h)] = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N[H_0(h)], \quad (4.2a)$$

то разложение Ландау (3.11) для функции $F(\eta, t \geq t_c) |_{\Delta^*}$ будет иметь такой же вид, где Δ^* находится из уравнений (3.9). Эффективные параметры \bar{B}_1 и \bar{B}_2 определяются соотношениями (3.15) и (3.12), и при изменении параметра ξ (за счет изменения t) мы обнаружим, что траектории движения этих параметров покидают область устойчивости (I.2) при

$$\xi_0 = \xi(T_0) = \frac{(B_1 + B_2)^2}{(-B_2)(2B_1 + B_2)} \quad (4.3a)$$

и траектория выходит на асимптотику

$$2B_1 + B_2 = 0$$

при $\xi \rightarrow \xi_1$, где

$$\xi_1 = \xi(T_1) = \frac{B_1 + B_2}{(-B_2)} \quad (4.3b)$$

и $T_0 > T_1 > T_c$. Следовательно, можно ожидать, что в области (4.1) фазовый переход становится переходом первого рода.

Однако это утверждение, как и вся процедура расчета в этом разделе, не могут быть строго обоснованы, как это имело место в предыдущем разделе, по следующим причинам:

I. Во-первых, в области (4.1) левая часть в неравенстве Боголюбова (2.4) не является положительно определенной формой (как и для гамильтонианов в (3.2), содержащих взаимодействие с внешним полем). Поэтому, хотя можно проверить, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \langle H(h) - H_0(h) \rangle_{H_0(h) |_{\Delta = \bar{\Delta}}} \rightarrow 0, \quad (4.4a)$$

где $\bar{\Delta}$ определяется из условий (3.4); мы не можем утверждать, что выполняется соотношение

$$f_N[H_0(h)] |_{\Delta = \bar{\Delta}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} f_N[H(h)]. \quad (4.4b)$$

2. Во-вторых, в области (4.1) уравнения (3.9) могут иметь более одного решения. Трудно определить, какие из решений соответствуют минимуму или максимуму потенциала $F(\eta, \eta_2, t; \Delta_1, \Delta_2) \equiv \mathcal{F}(\eta, t)$. Мы выбираем в области $t > t_c$ решение $\Delta = \Delta^*$, которое соответствует такому же разложению (3.11), как и в области $2B_1 + B_2 > 0, B_2 > 0$. Следовательно, предположение о возможности фазового перехода первого рода в области (4.1) при $B_2 < 0$ основано лишь на автоматическом перенесении метода расчета, строго доказанного лишь для области (3.7) при $B_2 > 0$.

5. Зависимость параметра порядка от температуры

Параметр порядка определяется следующим образом:

$$\eta_{\alpha}(t) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{B_1 + B_2}}{A} \langle Q_{\alpha} \rangle \right), \quad (5.1)$$

где среднее $\langle \dots \rangle$ вычисляется с гамильтонианом $H_0(h)$ (3.3a). В результате для параметра порядка получаем выражение

$$\eta_\alpha(t) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{B_1 + B_2}{A^3}} \frac{h_\alpha}{\Delta_\alpha} \right), \quad (5.1a)$$

где Δ_α находятся из уравнений (3.4), которые могут быть записаны в виде системы двух уравнений:

$$\Delta_1 + 1 = t \nu_1 [g(\Delta_1) + g(\Delta_2)] + t \nu_2 [g(\Delta_1) - g(\Delta_2)] + \nu_1 \left[\left(\frac{\mu_1}{\Delta_1} \right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{\Delta_2} \right)^2 \right] + \nu_2 \left[\left(\frac{\mu_1}{\Delta_1} \right)^2 - \left(\frac{\mu_2}{\Delta_2} \right)^2 \right], \quad (5.2a)$$

$$\Delta_2 + 1 = t \nu_1 [g(\Delta_1) + g(\Delta_2)] - t \nu_2 [g(\Delta_1) + g(\Delta_2)] + \nu_1 \left[\left(\frac{\mu_1}{\Delta_1} \right)^2 + \left(\frac{\mu_2}{\Delta_2} \right)^2 \right] - \nu_2 \left[\left(\frac{\mu_1}{\Delta_1} \right)^2 - \left(\frac{\mu_2}{\Delta_2} \right)^2 \right]. \quad (5.2b)$$

Здесь введен параметр

$$\mu_\alpha = \left(\frac{B_1 + B_2}{A^3} \right)^{1/2} h_\alpha.$$

В области $\nu_1 > 0, \nu_2 > 0$, где модель имеет точное решение, система уравнений (5.2) имеет единственное решение, соответствующее максимуму $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N[H_0(h)]$, как это уже отмечалось ранее.

В неупорядоченной фазе при этом

$$\eta_1 = \eta_2 = 0, \quad t > t_c. \quad (5.3)$$

В упорядоченной фазе при $t < t_c$ анализ системы уравнений (5.2) показывает, что

$$\eta_1^2(t) = \lim_{h_1, h_2 \rightarrow 0} \frac{\mu_1}{\Delta_1(\mu)} = \eta_2^2(t) = \frac{1}{2\nu_1} \left(1 - \frac{t}{t_c} \right). \quad (5.4)$$

Отметим, что решение (5.4) может быть также получено в области (4.1) ($\nu_2 < 0$); однако система уравнений (5.2) в этой области может приводить и к другим решениям $\Delta_\alpha(\mu_1, \mu_2)$, которые соответственно и дают другие значения для параметра $\eta_\alpha^2(t)$ по сравнению с (5.4).

6. Обсуждение

В работе была исследована двухкомпонентная модель (I.5) в классическом пределе. Как и однокомпонентная модель этого типа (см. /5-7/), она принадлежит к универсальному классу сферической модели и обладает рядом интересных свойств.

Модель (I.5) допускает точное решение с помощью метода аппроксимирующего гамильтониана в области значений параметров анизотропии

$$2B_1 + B_2 > 0, \quad B_2 > 0, \quad (6.1a)$$

которая является лишь частью области устойчивости (I.2) в теории среднего поля Ландау. В области (6.1a) модель имеет непрерывный фазовый переход с критическими индексами сферической модели $\beta = 1/2$ и $\gamma = 2$. В упорядоченной низкотемпературной фазе имеется двухкратно вырожденная голдстоуновская мода: $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ при $t < t_c$. (Более подробно этот вопрос предполагается рассмотреть в отдельной работе).

При приближении к критической точке $t \rightarrow t_c^+$ в модели (I.5) вместо обычной "изотропизации" для систем типа (I.1) наблюдается обратный эффект (изинговское поведение), поскольку согласно (3.12) и (3.15)

$$\left. \frac{b_{12}}{b_{11}} \right|_{t \rightarrow t_c} \sim \frac{\tilde{B}_1}{\tilde{B}_2} \rightarrow 0, \quad \left. \frac{c_{112}}{c_{111}} \right|_{t \rightarrow t_c} \rightarrow 0. \quad (6.2)$$

На границе области $B_2 = 0$ этот эффект не проявляется, хотя критические индексы сохраняются.

Нам не удалось доказать с помощью метода аппроксимирующего гамильтониана точную решаемость модели во второй части области (I.2) при

$$B_1 + B_2 > 0, \quad B_2 < 0. \quad (6.1b)$$

Полученное в этой области выражение для термодинамического потенциала $F(x, t)$ (3.4) с помощью вариационного метода показывает, что фазовый переход должен быть первого рода (см. рисунок).

В заключение отметим, что представляло бы интерес провести анализ этой модели с помощью метода ренормализационной группы (РГ) в обеих областях (6.1a) и (6.1b). С одной стороны, тогда можно было бы проверить предсказания РГ-анализа в области (6.1a) (и в определенной степени результаты РГ-анализа для модели (I.1)) относительно значений критических индексов и траекторий для эффективных констант анизотропии. С другой стороны, РГ-анализ мог бы подтвердить полученные нами результаты в области (6.1b).

Определенный интерес представляет также исследование флуктуационного фазового перехода первого рода в системах с кубической ани-

зотропии другими методами. Отметим в связи с этим работу^{/9/}, где с помощью метода функционального интегрирования был рассмотрен редуцированный гамильтониан Гинзбурга - Ландау - Вильсона и были получены результаты, сходные с нашими.

Литература

1. Брус А., Каули Р. Структурные фазовые переходы. Изд-во "Мир", М., 1984, с. 407.
2. Гинзбург И.Ф. Докл. АН СССР, 1956, ИО, № 4, с. 535.
3. Rudnic J. Phys. Rev., B, 1978, 18, p. 1406.
4. Schneider T., Stoll E., Beck H. Physica, 1975, 79A, p. 201.
5. Плакида Н.М., Тончев Н.С. ТМФ, 1985, 63, с. 270.
6. Плакида Н.М., Тончев Н.С. Препринт ОИЯИ, P17-85-400, Дубна, 1985; Physica A, 136, p.176, 1986.
7. Тончев Н.С., Плакида Н.М. Препринт ОИЯИ P17-86-77, Дубна, 1986.
8. Joyce G.S. in : Phase transition and critical phenomena (eds. Domb C., Green M.S.). Academic Press, N.Y. 1972, v. 2, p. 375.
9. Иванченко Ю.М., Лисянский А.А., Филиппов А.Э. Всесоюзное совещание "Синергетика-86". Кишинев, "Штиинца", 1986, с. 52.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 августа 1986 года.

Плакида Н.М., Радош А., Тончев Н.С.

P17-86-582

Точно решаемая модель фазового перехода
с кубической анизотропией

Рассмотрена двухкомпонентная модель структурного фазового перехода с дальнедействующим ангармоническим взаимодействием кубической симметрии. На основе метода аппроксимирующего гамильтониана доказана точная решаемость трехмерной модели при определенных значениях параметров кубической анизотропии. Обсуждается возможность появления фазового перехода первого рода в этой модели.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Plakida N.M., Radosz A., Tonchev N.S.

P17-86-582

Exactly Solvable Model of Phase Transition
with Cubic Anisotropy

Two-component model of structure phase transition with infinite-range anharmonic interaction of cubic symmetry is considered. By using the method of approximating Hamiltonian, there is found that the three-dimensional model is exactly solvable in some range of parameters of cubic anisotropy. The possibility of phase transition of first order is also discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986