

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P17-86-537

**Н.С.Бахвалов¹, Ю.С.Гальперн², Г.С.Казача,
С.И.Сердюкова, А.Т.Филиппов**

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ
В ОДНОМЕРНОМ ДЖОЗЕФСОНОВСКОМ ПЕРЕХОДЕ
С МИКРОНЕОДНОРОДНОСТЯМИ**

¹ Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

² Институт радиотехники и электроники АН СССР,
Москва

1986

§ I. Введение

В работах^{/1-3/} были обнаружены и изучены простейшие статические и стационарные (периодически зависящие от времени) связанные состояния флюксонов, локализованных на притягивающих их микронеоднородностях в длинных джозефсоновских переходах. Основная модель, в которой изучались эти состояния, определяется уравнениями (подробное описание модели и обозначения см. в ^{/1-3/}):

$$\varphi_{tt} + \alpha \varphi_t = \varphi_{xx} - (1 - \mu \delta(x)) \sin \varphi + \gamma, \quad (I.1)$$

где функция $\varphi(x, t)$ определяется на интервале $-\ell \leq x \leq \ell$ и удовлетворяет в общем случае граничным условиям

$$\varphi_x(\pm \ell, t) = h_{\pm}. \quad (I.2)$$

Производная по координате $\varphi_x(x, t)$ определяет мгновенное значение магнитного поля в переходе, а $\varphi_t(x, t)$ — мгновенное значение электрического поля (напряжения). Внешний ток γ может в общем случае зависеть от x и от t . Магнитное поле на краях перехода h_{\pm} также может изменяться во времени. Постоянная α , определяющая затухание в переходе (α пропорционально нормальной проводимости), может изменяться в различных переходах в достаточно широких пределах.

Для неоднородности мы взяли простейшую модель, описываемую δ -функцией. Эта модель пригодна для неоднородностей, протяженность которых меньше полуширины флюксона, т.е. $\leq \ell$ (этому соответствует $\mu \leq 1$ в (I.1)). Численные расчеты проводились как непосредственно с моделью δ -функции, так и с неоднородностями конечного размера. При $\mu \leq 0,5$ результаты таких расчетов хорошо согласуются друг с другом количественно, если переход не слишком короткий ($\ell \geq 2$). Существуют микронеоднородности, для которых разумно использовать другие модели. Например, в работе^{/9/} рассматривалось взаимодействие флюксонов с абрикосовскими вихрями (неоднородность типа $\delta'(x) \equiv \frac{d}{dx} \delta(x)$). В этом случае такой слабой чувствительности к "размазке" неоднородности, вероятно, не будет. Мы ограничимся исследованием обычных, δ -образных неоднородностей.

В работах^{/1-3/} изучались не зависящие от времени (статические) состояния (т.е. распределения $\varphi(x)$), удовлетворяющие (I.1) и пе-

риодически зависящие от времени (стационарные) состояния^{x)}. Подобные устойчивые состояния мы будем называть аттракторами, соответственно статическими или стационарными (периодическими).

Наиболее характерная особенность джозефсоновского перехода, как и любой достаточно сложной нелинейной системы, — существование нескольких аттракторов при одних и тех же значениях всех параметров и их бифуркации (скачкообразное исчезновение и рождение) при плавном изменении параметров /I-4/, /7,8,10/. Эта особенность существенно осложняет численные расчеты, но, конечно, наиболее интересна с точки зрения приложений. Наличие в переходе притягивающих микронеоднородностей существенно увеличивает число аттракторов и расширяет их область существования. Например, в переходе с длиной $2\ell \sim 10$ и с $\mu = 1$ при $\gamma = 0$ и $h_{\pm} = 0$ существуют при изменении h_{\pm} области, в которых имеется 4 устойчивых статических состояния (см. /8/), причем 3 из них существуют и в нулевом магнитном поле.

В работе /7/ было указано, что при $\mu \neq 0$ и $\alpha = 0$ в переходе могут существовать новые периодические аттракторы типа бризера, локализованного на неоднородности. Численное моделирование взаимодействия флюксона с притягивающей микронеоднородностью /5,6/ выявило возможность резонансного взаимодействия между неоднородностью и флюксоном, эффективно описываемого пульсациями солитона. Можно непосредственно наблюдать описанные эффекты методом лазерного зондирования. Интересно также было бы попытаться искать следы новых стационарных состояний, образующихся при взаимодействии с неоднородностями, на вольт-амперных характеристиках (ВАХ) перехода, т.е. на графиках зависимости среднего напряжения на переходе V от полного среднего тока, текущего через переход. ВАХ однородных переходов подробно изучались в реальных физических и в численных экспериментах (см., например, /11/-/14/). Несмотря на это, исчерпывающей теории ВАХ даже для однородных переходов, описываемых уравнением (I.1) при $\mu = 0$ и граничными условиями (I.2), пока не существует, так как не существует общего метода, позволяющего находить все периодические решения уравнения (I.1) с граничными условиями (I.2). При $\mu = 0$ применялось два метода:

- 1) теория возмущений, в которой возмущением считаются члены $\alpha\varphi_2$ и γ /11/-/12/;
- 2) метод аппроксимации $\varphi(x,t)$ конечным числом мод /13/.

x) В стационарных состояниях периодически зависят от времени наблюдаемые величины $\varphi_2(x,t)$ и $\varphi_1(x,t)$. В общем случае фаза $\varphi(x,t)$ не периодическая функция t , см. ниже.

Недостаток первого метода в том, что нулевое приближение в общем случае определить нельзя, так как уравнение (I.1) при $\mu = \alpha = \gamma = 0$ интегрируемо лишь при $\ell = \infty$. Тем не менее для достаточно длинных переходов теорию возмущений можно использовать.

Напротив, конечномодовая аппроксимация наиболее эффективна в случае достаточно коротких переходов, $\ell \approx 2 \div 3$. В этом случае можно получить хорошие приближения для $\varphi(x,t)$, используя небольшое число мод /13/, /15/. При этом нет необходимости считать малыми μ , α , γ и h_{\pm} . Заметим, что основные результаты, полученные в нашей работе численным методом, можно получить, применяя асимптотические методы для решения нелинейных уравнений для мод. Это будет опубликовано в отдельной работе.

Прежде чем переходить к изложению метода расчета и результатов, напомним основные точные соотношения, которыми удобно пользоваться при расчете ВАХ. Вместо (I.1) напомним чуть более общее уравнение

$$\varphi_{tt} + \alpha\varphi_t = \varphi_{xx} - V(\varphi, x) + \gamma, \quad (I.3)$$

где $V(\varphi, x)$ — периодическая функция φ с периодом 2π и достаточно произвольная функция x . Допустим, что уравнение (I.3) имеет решения вида

$$\varphi = \omega t + \varphi_0(x, t), \quad (I.4)$$

где $\varphi_0(x, t)$ — периодическая функция с периодом, кратным $2\pi/\omega$. При этом предполагается, что α , γ и h_{\pm} не зависят от t , хотя бы при достаточно больших t . Усреднив уравнение (I.3) по t и интегрируя по x в интервале $-\ell \leq x \leq \ell$, нетрудно получить соотношение

$$\langle \gamma \rangle + (h_+ - h_-) = J_s + \langle \alpha \rangle \omega, \quad (I.5)$$

где $\langle (\dots) \rangle \equiv \int_{-\ell}^{\ell} dx (\dots)$. Здесь мы воспользовались тем, что $\frac{1}{\varphi_t} = \omega$, где черта означает усреднение по периоду T , и определили

$$J_s \equiv \int_{-\ell}^{\ell} dx V(\varphi, x).$$

В случае уравнения (I.1) J_s есть полный сверхпроводящий ток, протекающий через переход, а $\langle \alpha \rangle \omega$ — полный нормальный ток. Уравнение (I.5) выражает баланс токов: в левой части — внешние токи, а в правой — токи, текущие через переход.

В реальных переходах обычно либо $h_+ = h_-$, либо $\gamma = 0$.

Воспользовавшись сохранением энергии, можно при $\omega \neq 0$ представить J_s в более удобном виде:

$$J_s = \omega \langle \alpha \frac{\bar{\psi}_0^2}{\omega^2} \rangle. \quad (I.6)$$

В результате окончательно получаем при $\omega \neq 0$

$$I \equiv \langle \gamma \rangle + (h_+ - h_-) = \omega \left\{ \langle \alpha \rangle + \left\langle \alpha \frac{\bar{\psi}_0^2}{\omega^2} \right\rangle \right\}. \quad (I.7)$$

Если выразить правую часть через ω , то и получим зависимость тока I от напряжения ω . Видно, что нелинейная проводимость определяется постоянной составляющей величины $\bar{\psi}_0^2$. (Обычно проводимость α слабо зависит от x). Если $\langle \bar{\psi}_0^2 / \omega^2 \rangle \ll 1$, то ток линейно зависит от напряжения $I = \alpha \omega$. Другой предельный случай $\langle \bar{\psi}_0^2 / \omega^2 \rangle \gg 1$ реализуется в резонансной ситуации, когда, например, $\langle \bar{\psi}_0^2 / \omega^2 \rangle \sim \omega_0^2 / (\omega - \omega_0)^2 + \Gamma^2$. Тогда при достаточно малом Γ вблизи ω_0 ток I резко возрастает и образуются резонансные ступеньки, примеры которых приведены в § 3.

Заметим также, что при $\omega = 0$ надо пользоваться уравнением (I.5), а не (I.7), так как соотношение (I.6) в этом случае неприменимо. Ветвь вольт-амперной характеристики, соответствующая нулевому напряжению, относится к статическим состояниям. Если есть несколько устойчивых статических состояний, то будет и соответствующее число ветвей. Например, при $h_+ = h_-$ это отрезки $J_{min} \leq J \leq J_{max}$ на оси $\omega = 0$ в $\gamma - \omega$ плоскости.

§ 2. Метод численного расчета

Итак, численно решается уравнение

$$\varphi_{tt} = \varphi_{xx} - \alpha \varphi_t - (1 - \mu \delta(x)) \sin \varphi + \gamma \quad (2.1)$$

на интервале $-\ell \leq x \leq \ell$, с граничными условиями $\varphi_x(\pm \ell) = 0$. Ограничение нулевыми граничными условиями несущественно. Аналогично решается задача во внешнем магнитном поле. Расчеты проводились как с нулевыми начальными данными, так и с флюксоном в начальном состоянии. Численно исследовалось поведение решения поставленной задачи при больших t . Известно, что φ_x терпит разрыв при $x = 0$. В предшествующих расчетах ^{16/} использовалась схема Русанова, хорошо зарекомендовавшая себя при счете разрывных решений. В расчетах для больших t схему Русанова использовать неэкономично — счет с дву-

мя пересчетами связан с большими затратами машинного времени. В создавшейся ситуации мы решили использовать схему — крест в областях $-\ell \leq x < 0$, $0 < x \leq \ell$. На стыке областей φ находится из соотношения на разрыве

$$\varphi_x(+0) - \varphi_x(-0) = -\mu \sin \varphi(0).$$

Контрольные расчеты показали хорошее согласование с результатами, полученными по схеме Русанова. При этом машинное время сокращается более чем в пять раз. Приведем расчетные формулы:

$$\varphi_v^{n+1} = \left(1 + \frac{\alpha \tau}{2}\right)^{-1} \left\{ 2\varphi_v^n - \varphi_v^{n-1} + \left(\frac{\tau}{h}\right)^2 (\varphi_{v+1}^n - 2\varphi_v^n + \varphi_{v-1}^n) - \tau^2 \sin \varphi_v^n + \frac{\alpha \tau}{2} \varphi_v^n + \gamma^n \right\}, \quad 1 \leq v \leq v_0 - 1, \quad v_0 + 1 \leq v \leq N - 1,$$

$$\varphi_0^{n+1} = \frac{4\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}}{3}, \quad \varphi_N^{n+1} = \frac{4\varphi_{N-1}^{n+1} - \varphi_{N-2}^{n+1}}{3}, \quad n \geq 1,$$

$$\varphi_v^0 = \varphi_v^1 = 0, \quad 0 \leq v \leq N.$$

Если в качестве начальных данных взят флюксон, полагаем

$$\varphi_v^0 = \varphi_v^1 = \varphi_0(-\ell + v h), \quad 0 \leq v \leq N.$$

После того как φ_v^{n+1} , $1 \leq v \leq v_0 - 1$, $v_0 + 1 \leq v \leq N - 1$ сосчитаны, φ_v^{n+1} находится методом простых итераций:

$$\varphi_{v_0, k}^{n+1} = \mu h \sin \varphi_{v_0, k-1}^{n+1} - \frac{\varphi_{v_0-2}^{n+1} - 4\varphi_{v_0-1}^{n+1} - 4\varphi_{v_0+1}^{n+1} + \varphi_{v_0+2}^{n+1}}{6},$$

$$\varphi_{v_0, 0}^{n+1} = \varphi_{v_0}^n.$$

Соотношение на разрыве аппроксимируется по схеме второго порядка точности. Итерации сходятся быстро: за десять итераций достигается относительная точность 10^{-13} . Используются обычные обозначения: τ ,

h — шаги сетки по t , x соответственно. В расчетах $\ell = 2,5$, $h = 0,05$, $\tau = h/2$, $\alpha = 0,05$, $\mu = 0$ и $\mu = 0,5$.

Для проверки корректности счета используется энергетическое соотношение

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{-l}^l \left(\frac{\varphi_x^2}{2} + \frac{\varphi^2}{2} + (1 - \cos \varphi) - \gamma \varphi \right) dx - \mu (1 - \cos \varphi(0)) \right\} + \int_{-l}^l \alpha \varphi_x^2 dx = 0.$$

§ 3. Основные результаты расчетов

Ниже параллельно описаны результаты расчетов для однородных ($\mu=0$) и неоднородных переходов ($\mu = 0,5$). Как указано в § I, при $\mu = 0$ существуют различные стационарные режимы, аналоги которых должны выживать и при $\mu \neq 0$. Однако нами было обнаружено, что при $\mu \neq 0$ могут возникать и совершенно новые стационарные состояния.

Для выхода на разные режимы необходимо задавать различные начальные условия. Например, если стационарный режим соответствует периодическому движению солитона, то в начальном состоянии должен присутствовать солитон. В общем случае состояния, заданные начальными условиями, должны попадать в зону притяжения некоторого стационарного аттрактора.

Даже в статическом случае зона притяжения аттрактора в функциональном пространстве состояний может быть достаточно сложной, особенно вблизи поверхности бифуркаций (см. /8/). Нет никаких оснований надеяться на то, что пространство состояний вблизи периодических стационарных аттракторов устроено проще, чем в статическом случае. Действительно, в работах /14-15/ для получения некоторых периодических режимов выбирались весьма причудливые начальные условия. Мы вместо этого предлагаем более оправданную с физической точки зрения процедуру включения тока \mathcal{J} , когда вместо постоянного \mathcal{J} берется переменное $\mathcal{J}(t)$, тем или иным способом выходящее на постоянное значение \mathcal{J} .

Мы рассматриваем два основных способа включения — мягкое, изображенное на рисунке Ia и импульсное, изображенное на рис. Ib.

Последнее существенно зависит от \mathcal{J}_{\max} , так как при изменении этого параметра может значительно измениться энергия, сообщаемая системе в момент включения. От параметра t_0 не должно быть сильной зависимости, если он выбран не слишком отличающимся от 1, т.е. порядка основного характерного времени системы. Время $1/\alpha$, характеризующее диссипацию энергии, много больше 1, и за времена порядка t_0 диссипация не успевает проявиться.

Итак, для получения различных режимов использовались различные

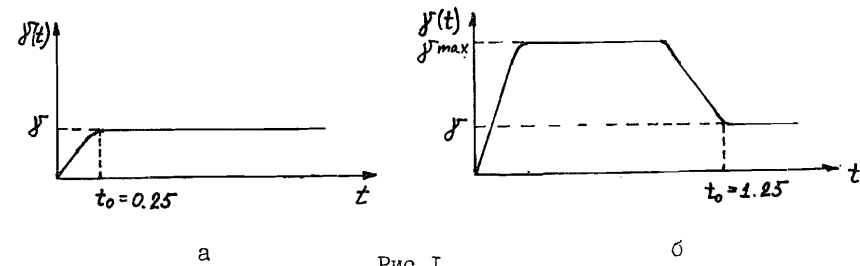


Рис. I

способы включения \mathcal{J} и различные начальные условия. Мы ограничились двумя простейшими начальными условиями: 1) $\varphi(x,0) = \varphi_1(x,0) = 0$, 2) $\varphi(x,0) = \varphi_2(x)$, $\varphi_2(x,0) = 0$, где $\varphi_2(x)$ — односолитонное состояние: $\varphi_2(x) = 2 \arccos(-\text{th}x) = 4 \arctg e^x$. Проведены расчеты с нулевыми начальными условиями 1) при мягком и импульсном включении (случаи Ia, Ib) и с солитоном в начальном состоянии также при обоих типах включения (2a, 2б). Значение t_0 указано на рис. I. При небольшом изменении t_0 или формы кривых $\mathcal{J}(t)$ никаких качественных изменений не происходит.

3.1. Нулевые начальные условия

I. Сначала опишем стационарные режимы при $\mu=0$. Как указано в § I, при $\mu=0$ существует устойчивое статическое решение, не зависящее от x : $\varphi \equiv \varphi_0 = \arcsin \mathcal{J}$. Область устойчивости этого решения $|\mathcal{J}| < 1$, т.е. точки бифуркации $\mathcal{J} = \pm 1$. При реальных расчетах с мягким включением \mathcal{J} (т.е. Ia) решение при $t \gg t_0$ выходит на $\varphi = \varphi_0$ лишь в интервале $0 \leq \mathcal{J} \leq 0,76$.

Заметим, что при увеличении затухания α этот интервал расширяется. При $\mathcal{J} > 0,76$ происходит переход в режим, в котором

$$\varphi(x,t) = \omega t + \rho(t), \quad (3.1)$$

где $\rho(t)$ — периодическая функция времени, а скорость нарастания фазы при больших значениях отношения \mathcal{J}/α определяется законом Ома:

$$\omega \approx \mathcal{J}/\alpha. \quad (3.2)$$

Здесь $\omega = \bar{\varphi} = \langle \dot{\varphi} \rangle / 2\ell$, так как $\bar{\varphi} = 0$ (напомним, что черта означает усреднение по времени, а $\langle \dots \rangle$ — интеграл по длине перехода). Таким образом, среднее по времени значение напряжения на переходе не зависит от x и равно (в наших единицах) частоте ω . Полный ток через переход равен $2\ell j$. Записывая (3.2) в виде $\omega = 2\ell j \cdot (\frac{1}{2\ell j})$, мы видим, что в режиме (Ia) при больших ω переход ведет себя как постоянное сопротивление величины $(2\ell\alpha)^{-1}$. При этом джозефсоновские эффекты туннелирования вымирают, остаются лишь эффекты, связанные с туннелированием нормальных электронов, описываемые единственным параметром α , равным удельной (на единицу длины) проводимости. В случае (Iб) переход со статического режима на резистивный происходит при $j_{\max} > 3$ и $j > 0,064$.

Джозефсоновские эффекты становятся существенными при $\omega \sim 1$. На рис. 2 зависимость $\omega(j)$ для резистивного режима описывается кривой $O_1 O_2 A'$, которая при $\omega \geq 2$ (т.е. $j \geq 0,1$, напомним, что $\alpha = 0,05$) линейна, и лишь участок $O_1 O_2$ сильно нелинеен. На участке $O_1 O_2$ закон Ома (3.2) не выполняется. При больших значениях ω решение вида (3.1) можно найти асимптотическими методами (см., например, /16/):

$$\varphi(x,t) = C + (\omega_0 - \frac{1}{2\omega_0^2})t + \frac{1}{\omega_0^2} \sin(\omega_0 t + A) + O(e^{-\alpha t} + O(\omega_0^{-4})), \quad (3.3)$$

где $\omega_0 = j/\alpha$. Эта асимптотика хорошо согласуется с результатами численных расчетов. На рис. 3а изображено поведение $\varphi(0,t)$ при большом t для $j = 0,07$. На рис. 3б представлена функция $\rho(t)$, которая приблизительно синусоидальна и имеет период $T = 5,25$, соответствующий круговой частоте $\omega = \frac{2\pi}{T} \approx 1,2$ ($\omega_0 \approx 1,4$). Если считать, что $\rho(t)$ — чистая синусоида с амплитудой $\frac{1}{\omega_0^2}$, то отсюда получим значение $\omega_0 \approx 1,2$. Таким образом, четко видно, что $\rho(t)$ в (3.1) — периодическая функция с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ и что даже при $\omega \sim 1$ её в грубом приближении можно оценить по формуле (3.3).

II. При $\mu = 0,5$ мягкое возбуждение дает статическое решение в интервале $0 < j < 0,68$. Это решение отличается от решения $\varphi = a x c \sin j$ существенной зависимостью от x . Распределение фазы $\varphi(x)$ и магнитного поля $\varphi'(x)$ приведены на рис. 4.

Если значение j достаточно далеко от критического, то распределение $\varphi(x)$ можно вычислить с помощью простой теории возмущений по степеням μ . В первом приближении

$$\varphi = \varphi_0 + a \operatorname{ch}[x(1-\ell)] + \dots,$$

$$\text{где } \varphi_0 = a x c \sin j, \quad x^2 = \sqrt{1-j^2}, \\ a = \frac{\mu j}{2x} (\operatorname{sh} x \ell - \frac{\mu x}{2} \operatorname{ch} x \ell)^{-1}$$

Условие хорошей применимости этого приближения

$$\frac{a^2}{2} \operatorname{ch}^2 x \ell \ll 1$$

связано с применимостью линеаризации во всем интервале $-\ell \leq x \leq \ell$. Легко убедиться, что это условие при небольших значениях j не требует малости μ . Вблизи точки бифуркации по j оно, однако, не применимо ни при каких значениях μ .

При $j > 0,68$ режим срывается на резистивный, как и в случае $\mu = 0$ (рис. 5). При достаточно больших значениях ω , скажем, при $\omega > 2$, резистивная ветвь вольт-амперной характеристики такая же, как при $\mu = 0$. При малых значениях ω имеется, однако, характерное качественное отличие — вместо плавного отклонения от прямой на участке $O_1 O_2$ (рис. 2) возникает новая ступенька $O_2 A_e$ (рис. 5). Режим, соответствующий этой ветви, получается при достаточно жестком импульсном возбуждении ($j_{\max} > 2,2$). Эта ветвь получается при таком возбуждении в интервале $0,068 \leq j \leq 0,103$, а при $j > 0,103$ возникает ещё одно состояние, которому соответствует ветвь $O_2 A_e$. При $j \geq 0,25$ происходит переброс на резистивную ветвь. Состояние на $O_2 A_e$ имеет вид стоячей волны или бризера, локализованного на микро неоднородности (рис. 6а). Его амплитуда плавно растет с ростом j . При $j \geq 0,103$ на ветви $O_2 A_e$ решение также имеет вид стоячей волны, но с амплитудой, значительно большей (рис. 6б). Это, скорее, не бризер, а связанное состояние солитона и антисолитона на микро неоднородности. Для решения на рис. 6б

$$\varphi(0) - \varphi(\ell) = \varphi(0) - \varphi(-\ell) \approx 4,5 \sim \frac{3}{2} \pi.$$

Состояния, соответствующие резистивной ветви, имеют вид стоячих волн, длина которых убывает с ростом j (см. рис. 7). Таким образом, хотя этим состояниям соответствует такая же прямая $\omega \approx j/\alpha$, как и в случае $\mu = 0$, они отличаются существенно иной внутренней структурой. В однородном случае в переходе было

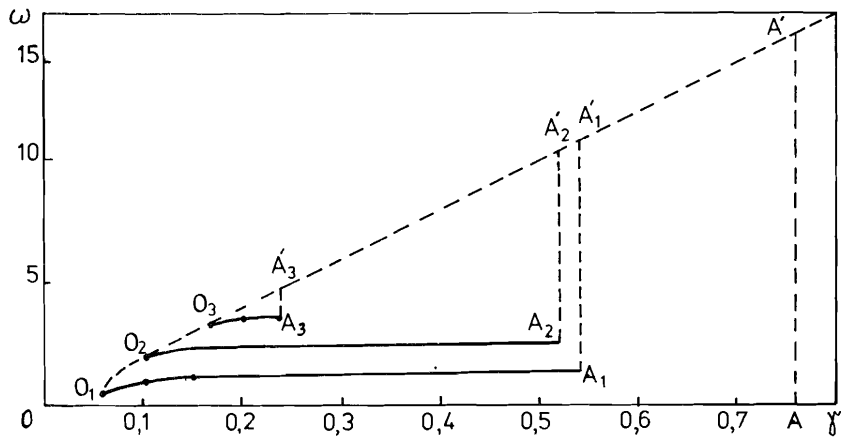


Рис.2. Вольт-амперная характеристика однородного перехода $\mu = 0$, $2\ell = 5$. Пунктирная кривая - резистивная ветвь, на ее линейном участке O_2A_1' выполнен закон Ома $\omega = \gamma/\alpha$, $\alpha = 0,05$. Сплошные линии соответствуют периодическим движениям одного (O_1A_1), двух (O_2A_2), трех (O_3A_3) солитонов. Ветвь OA соответствует статическим состояниям $\varphi = \arcsin \eta \gamma$.

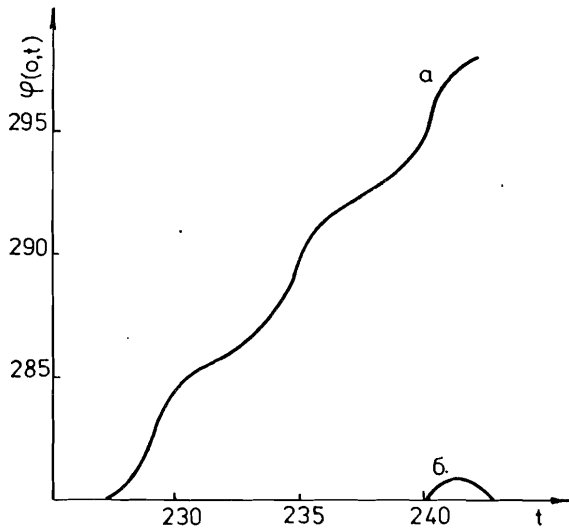


Рис.3. Зависимость фазы от времени для состояний, соответствующих нелинейному участку резистивной ветви (O_1O_2) при $\gamma = 0,07$. Эта зависимость хорошо описывается приближенной формулой (3.3).

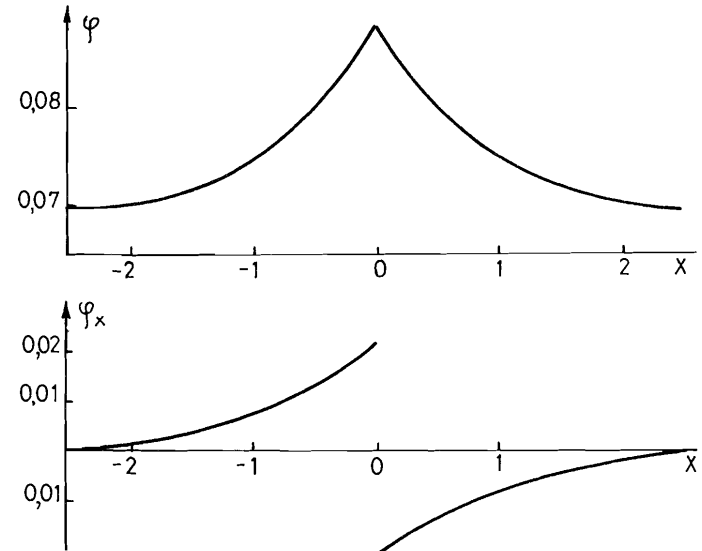


Рис.4. Распределение фазы и магнитного поля для статических решений при $\mu = 0,5$, $\gamma = 0,066$. Это распределение хорошо описывается приближенной формулой (3.4).

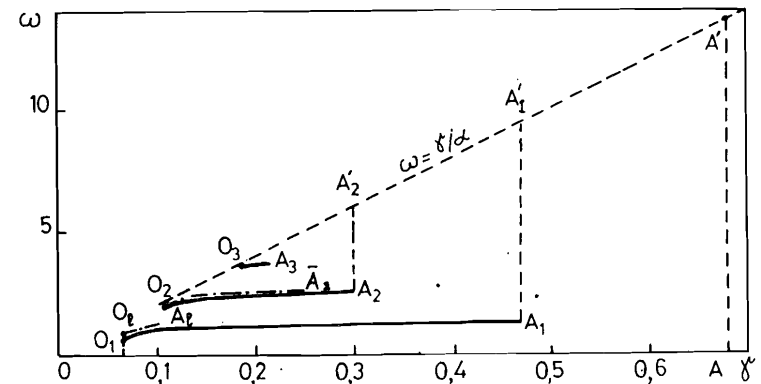


Рис.5. Вольт-амперная характеристика неоднородного перехода ($\mu = 0,5$) с длиной $2\ell = 5$. Пунктирная прямая O_2A_1' - резистивная ветвь. Участки солитонных ветвей O_iA_i совпадают с соответствующими участками на рис. 2. O_1A_2 - новая ветвь, соответствующая бризеру, локализованному на неоднородности. Ветвь OA соответствует статическим состояниям, изображенным на рис.4.

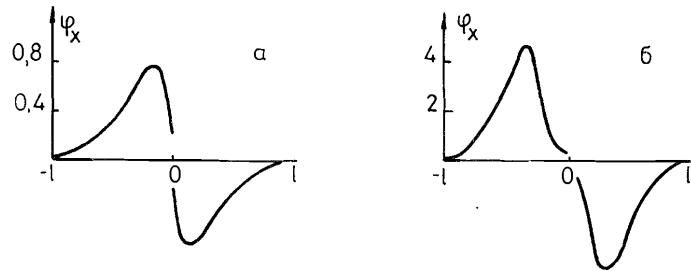


Рис.6. Мгновенное распределение магнитного поля в неоднородном переходе для бризерного (а), $\gamma = 0,1$ и солитон-антисолитонного (б), $\gamma = 0,2$ состояний (соответственно ветви $O_2 A_2$ и штрихпунктирная линия на $O_2 A_2$). Выбраны моменты, когда магнитное поле φ_x максимально.

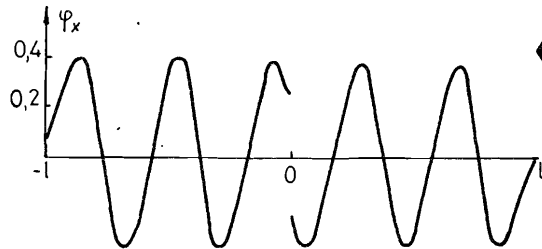


Рис.7. Мгновенное распределение магнитного поля для типичного резистивного состояния в неоднородном переходе, $\gamma = 0,3$.

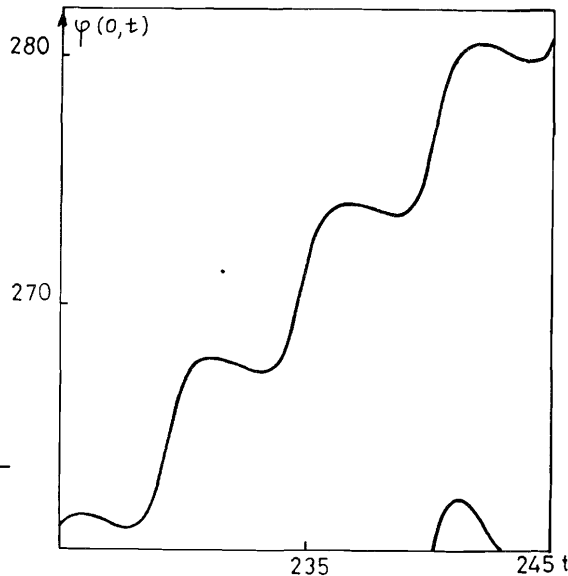


Рис.8. Зависимость фазы $\varphi(0,t)$ от времени для состояний в начале резистивной ветви ($\gamma = 0,1$) неоднородного перехода. Сравните с рис.3.

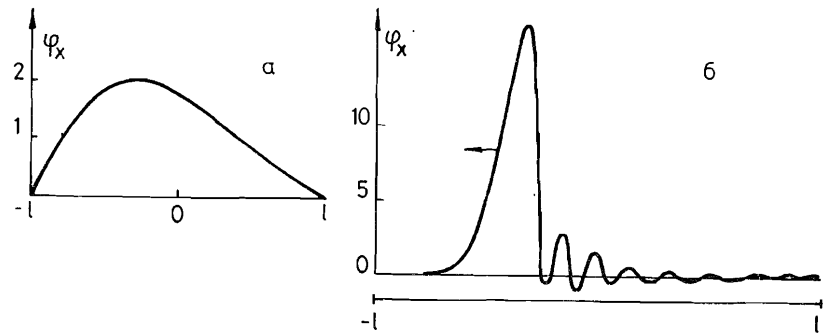


Рис.9. Мгновенное распределение магнитного поля в солитоне, движущемся в однородном переходе: а - медленное движение, $\gamma = 0,06$; б - быстрое движение, $\gamma = 0,5$.

просто переменное во времени, но постоянное вдоль перехода электрическое поле. В неоднородном случае в переходе распределена стоячая волна электромагнитного поля (лишь среднее значение магнитного поля по длине равно нулю).

На ветвях $O_2 A_2$ (рис. 5) и $O_1 O_2$ (рис. 2) существенно отличаются и зависимости φ от t . Сравним, например, $\varphi(0,t)$ для $\mu = 0$, $\gamma = 0,07$ ($O_1 O_2$, рис. 2) и для $\mu = 0,5$, $\gamma = 0,1$ ($O_2 A_2$, рис. 5) (рисунки 3а и 8 соответственно). Видно, что во втором случае $\varphi(t)$ сильно ангармонично и имеет существенно большую амплитуду. Отсюда, в частности, следует, что при конечномодовом теоретическом описании состояний на $O_2 A_2$ (см. § I) необходимо учитывать не менее двух мод, тогда как состояния на $O_1 O_2$ хорошо описывались одной нелинейной модой.

3.2. Флюксон в начальном состоянии

I. Сначала рассмотрим стационарные режимы при $\mu = 0$. Мягкое возбуждение (т.е. 2а), дает "односолитонную" ветвь состояний $O_1 A_1$ (рис. 2). Деформацию этих состояний при увеличении γ можно проследить по рис. 9. Несмотря на малую длину перехода, это состояние вполне описывается движущимся по переходу флюксоном, который на границах отражается и "переворачивается", превращаясь в антифлюксон. При больших значениях γ возникает "хвост" в виде бегущей за флюксоном волны, хорошо видный на рис. 9б. Солитонная теория возмущений $1/12$ достаточно хорошо применима для описания

этих состояний и, в частности, позволяет вычислить односолитонную ветвь вольт-амперной характеристики. Состояния, соответствующие другим ветвям на рис. 2. ($O_2 A_2$, $O_3 A_3$), получаются при расчетах случая 2б при различных J_{max} . Если $1,8 < J_{max} \leq 3$, то при $0,1 < J < 0,52$ получается двухсолитонная ветвь $O_2 A_2$ (см. рис. 10 а и б). При $J_{max} \sim 3,5$ и $0,17 < J < 0,24$ получается "трехсолитонная" (точнее, два "солитона" и один "антисолитон") ветвь $O_3 A_3$ (см. рис. 10 в). Разумеется, мы не можем с полной уверенностью утверждать, что состояниями, которым соответству-

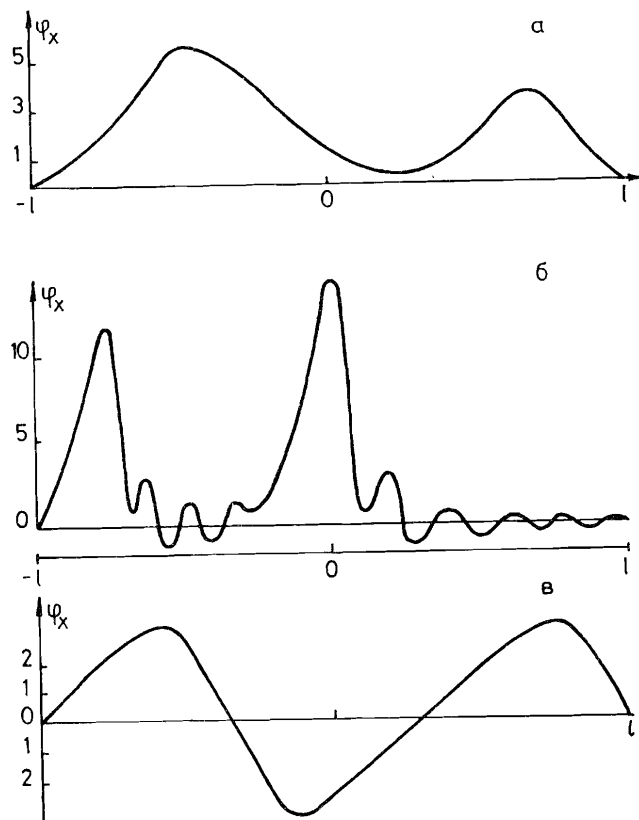


Рис. 10. Мгновенное распределение магнитного поля в двухсолитонном (а), (б) и трехсолитонном (в) состояниях, движущихся в однородном переходе: а - ветвь $O_2 A_2$, $J = 0,22$; б - ветвь $O_2 A_2$, $J = 0,5$; в - ветвь $O_3 A_3$, $J = 0,22$.

ют изображенные на рис. 2 ветви, исчерпываются все возможные периодические стационарные режимы. Даже при малых ω ($\omega < 4$), в принципе, могут существовать и другие состояния, которые нужно получать с помощью других начальных условий или других способов возбуждения J . Например, не совсем ясно, почему при расчетах с $\mu = 0$ не получилось состояние "солитон-антисолитон", которое должно было бы иметь вольт-амперную характеристику, практически вырожденную с $O_2 A_2$.

II. При $\mu = 0,5$ при расчетах 2а) и 2б) получаем ветви (рис. 5) $O_1 A_1$, $O_2 A_2$ и $O_3 A_3$, которые имеют тот же смысл, что и при $\mu = 0$. В общей области существования солитонные ветви при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$ практически совпадают. Односолитонная ветвь $O_1 A_1$ получается при мягком возбуждении. Двухсолитонная - при импульсном с $2 \leq J_{max} \leq 3$, а 3-солитонная - при $2,2 \leq J_{max} \leq 3,5$. Ветвь $O_2 A_2$ и солитон-антисолитонная ветвь $O_2 \bar{A}_2$ практически совпадают.

Подведем итоги этих расчетов для однородного ($\mu = 0$) и неоднородного ($\mu = 0,5$) переходов:

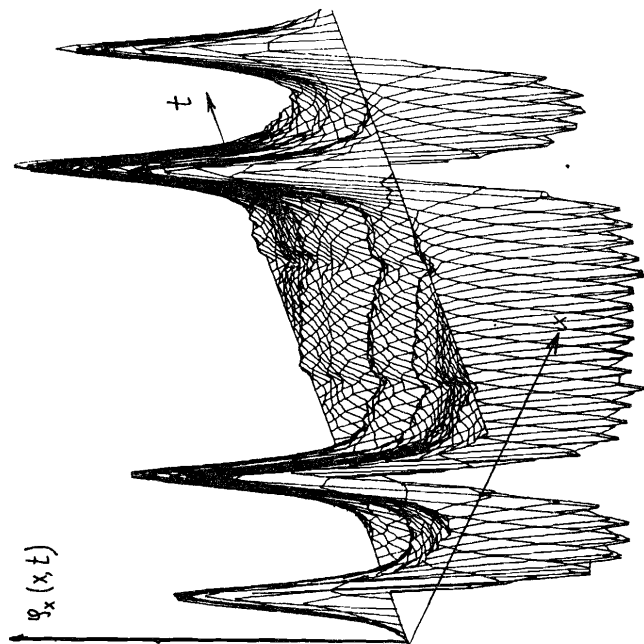
1) Статические состояния существенно отличаются друг от друга, и значение критического тока J_c , выше которого статического состояния нет, зависит от μ . Однако при численных расчетах и, возможно, в экспериментах точно определить величину J_c не очень легко, так как при значениях J , достаточно близких к J_c , обычно происходит "срыв" решения (резкая смена режима). Чтобы близко подойти к точке $J = J_c$, требуются специальные ухищрения. В частности, при численном моделировании необходимо использовать информацию об асимптотическом поведении решения. (Более простой подход - вести вычисления при $J = J_c$, используя большое затухание α).

2) Все ветви вольт-амперных характеристик лежат между статической и резистивной. По-видимому, точки O_2 , O_3 являются точками бифуркации, в которых многосолитонные решения ответвляются от резистивного.

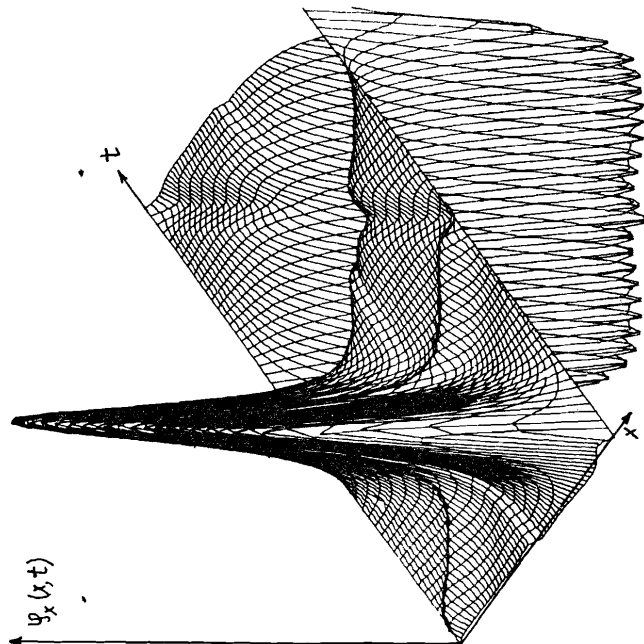
3) Периодические режимы на резистивной ветви, которая с хорошей точностью прямолинейна, $J \approx \alpha \omega$ при $\omega \geq 2$, также существенно отличаются. Однако сами резистивные ветви ВАХ отличаются лишь при $\omega \leq 2$, $J \leq 0,1$.

4) Наиболее важное отличие ВАХ неоднородных переходов от однородных состоит в образовании новой ветви $O_2 A_2$. Эта ветвь соответствует новому состоянию-бризеру, локализованному на неоднородности.

Напомним также, что длины ветвей одинаковых состояний (статических, односолитонных и т.д.) различны при $\mu = 0$ и $\mu \neq 0$.

$\varphi_x(x,t)$ 

б

 t $\varphi_x(x,t)$ 

а

Рис. II. Изменение распределения магнитного поля, $\varphi_x(x,t)$, за один период:
 а - для односолитонной ветви O_1A_1 при $\chi = 0,2$; б - для двухсолитонной ветви O_2A_2 при $\chi = 0,3$ ($\mu = 0,5, 2l = 5$).

При $\mu = 0$ эти ветви длинной. Например, при $\mu \neq 0$ разрушение солитона и переход в резистивное состояние (переход с O_2A_2 на резистивную ветвь) происходят при меньших значениях тока J благодаря возбуждению излучения на микронеоднородности.

Авторы благодарны Тодоренко О.Т. за построение на ЭВМ графиков рис. II.

Литература

1. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с. 470.
2. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ЖЭТФ, 1984, 86, с. 1527.
3. Filippov A.T., Galpern Yu.S. Solid state Comm., 1983, 48, p. 665.
4. Filippov A.T., Galpern Yu. S. In: "Nonlinear and Turbulent Processes in Physics", ed R.Z. Sagdeev, Gordon and Breach, NY, 1984, p. 791.
5. Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. ОИЯИ, РП-84-76, Дубна, 1984.
6. Казача Г.С., Сердюкова С.И., Филиппов А.Т. ОИЯИ, РП-85-60, Дубна, 1985.
7. Филиппов А.Т. Труды III Международного симпозиума по проблемам статистической механики, ОИЯИ, ДП7-84-850, Дубна, 1984, т.2, с.281.
8. Бояджиев Т.Л. и др. ОИЯИ, РП-85-807, Дубна, 1985.
9. Асламазов Л.Г., Гурович Е.Р. Письма в ЖЭТФ, 1984, 40, с. 22.
10. Owen C.S., Scalapino D.J. Phys. Rev., 1967, v.164, p. 538.
11. Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах, "Наука", М., 1970.
12. Солитоны в действии. М., "Мир", 1984.
13. Enpuku K. Yoshida K., Irie F. J. Appl. Phys., 1981, 52, p. 344.
14. Soerensen M.P., Christiansen P.L., Parmentier R.D., Skovgaard O. Appl. Phys. Lett., 1983, 42, p. 739.
15. Lamdahl P.S., Soerensen M.P., Christiansen P.L. Phys. Rev. B, 1982, v.25, p. 5737.
16. Levinson N. Stud. in Appl Math. 1969, v. XLVIII, N 4, pp.285-297.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 августа 1986 года.

Бахвалов Н.С. и др.

P17-86-537

Численное моделирование периодических режимов
в одномерном джозефсоновском переходе с микро неоднородностями

Изучены периодически зависящие от времени возбуждения электромагнитного поля в джозефсоновских переходах конечной длины с микро неоднородностями. В частности, получены зависимости среднего напряжения на переходе от текущего через него равномерно распределенного внешнего тока /вольт-амперные характеристики /ВАХ//для однородного и неоднородного перехода. Наряду с хорошо известными периодическими движениями солитонов, которым соответствуют ступеньки в нулевом поле на ВАХ, в неоднородном переходе возникают новые периодические режимы, в частности, появляется новая ветвь на ВАХ, соответствующая бризеру, локализованному на неоднородности. Основные результаты получены численным анализом стандартной синус - гордоновской модели с неоднородностями, описываемыми δ - функциями. Для сравнения приведены также некоторые аналитические результаты.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Bakhvalov N.S. et al.
Numerical Modelling of Periodic Regimes
in One-Dimensional Josephson Junctions
with Microinhomogeneities

P17-86-537

Periodic in time distributions of the electromagnetic field inside Josephson transmission lines (JTL) of finite length with microinhomogeneities are studied. In particular, current-voltage characteristics (IV-curves) are obtained both for homogeneous and for inhomogeneous JTL in the case of the overlap geometry. The well-known zero field steps corresponding to periodic motion of solitons are present for both types of JTL. In addition, a new branch is formed on the IV-curve of the inhomogeneous JTL. It corresponds to a breather-like solution localized on the inhomogeneity. Main results are obtained by numerical analysis of the standard sine-Gordon model with δ -function inhomogeneities. Some approximate analytical results are presented for comparison.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics and Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986