

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P17-86-532

В.Б.Кислинский, В.И.Юкалов

КРОССОВЕР

МЕЖДУ БЛИЗКО- И ДАЛЬНОДЕЙСТВИЕМ
В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА

Направлено в "Journal of Physics A"

1986

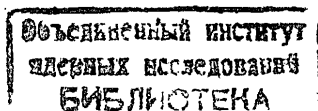
В теории магнетизма существует интересный вопрос о том, как меняются свойства системы при непрерывном изменении вида взаимодействия между двумя качественно различными предельными случаями. Например, Стинчкомб^{/1,2/} исследовал кроссовер между изотропным гейзенберговским и анизотропным изинговским поведением чистых и разбавленных магнетиков. Кроссовер по параметру анизотропии для XY-модели в поперечном поле изучали Рей и Чакрабартти^{/3/}. Боучер и др.^{/4/}, привлекая экспериментальные данные для квазиодномерных антиферромагнетиков, анализировали кроссовер между изотропным гейзенберговским и анизотропным XY-поведением при варьировании внешнего магнитного поля. Стинчкомб^{/5/} рассматривал также кроссовер между одномерным и двумерным поведением при включении взаимодействия между изинговскими цепочками и кроссовер от двумерных к трехмерным свойствам для слоистых гейзенберговских систем.

Несколько иной размерный кроссовер, когда размерность пространства непрерывно меняется между 3 и 4, исследовался Рудником и Нельсоном^{/6/} для модели Ландау - Гинзбурга - Вильсона, а также Рийшкема^{/7/} для модели Блюма - Капеля.

Любопытные результаты были получены Джойсом^{/9/} для сферической модели Берлина - Каца^{/9/} с ферромагнитным дальнедействием вида $J_{ij} \sim 1/r_{ij}^{d+\epsilon}$, где d - размерность решетки. Оказалось, что температура Кюри и значения критических индексов непрерывно зависят от параметра $\epsilon > 0$.

Кроссоверы, соответствующие изменению параметров гамильтониана или размерности пространства, следует отличать от кроссоверного поведения одной и той же модели при изменении температуры. В последнем случае обычно изучают зависимость эффективных критических индексов от температуры (Рудник и Нельсон^{/6/}, Бейлин и Лав^{/10/}, Чокер и Геринг^{/11/}). Введение эффективных критических индексов оправдано тем, что в эксперименте непосредственно наблюдаются именно они (Чалый и Черненко^{/12/}).

В данной работе мы исследуем новый кроссовер первого типа, когда меняются параметры гамильтониана так, что происходит его непрерывная трансформация между близко- и дальнедействующей формами. Сочетание коротко- и дальнедействующих потенциалов для некоторых веществ вполне реально. Например, это могут быть магнитные соединения, в которых наряду со спин-спиновым имеется спин-орбитальное



взаимодействие /13/. Появление магнитных связей с разными радиусами взаимодействия может быть вызвано также наличием в магнетике дефектов или границ /14/.

Рассмотрим одномерную модель Изинга с гамильтонианом

$$H = - \sum_{i,j=1}^N J_{ij} s_i s_j - h \sum_{i=1}^N s_i \quad (s_i = \pm 1), \quad (I)$$

в котором обменный интеграл разбивается на два слагаемых:

$$J_{ij} = \nu J_{ij}^s + (1-\nu) J_{ij}^l, \quad (2)$$

одно, соответствующее взаимодействию между ближайшими соседями

$$J_{ij}^s = \begin{cases} J_s, & i=j\pm 1, \\ 0, & i \neq j\pm 1, \end{cases} \quad (J_s > 0), \quad (3)$$

а другое, так называемое дальнедействующее, удовлетворяет равенствам

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_{ij}^l = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^N J_{ij}^l = J_l < \infty, \quad (4)$$

где $J_l > 0$. Константа короткодействия $\nu \leq 1$ описывает относительную степень близкодействия. При $\nu = 1$ взаимодействуют лишь ближайшие соседи, при $\nu = 0$ система становится чисто дальнедействующей, при $0 < \nu < 1$ реализуется промежуточный вариант. Мы рассмотрим также случай $\nu < 0$, когда дальнедействие ферромагнитно, а короткодействие антиферромагнитно. Гамильтониан (I) представляется в виде суммы

$$H = H_s + H_l - h \sum_{i=1}^N s_i, \quad (5)$$

куда, помимо взаимодействия с внешним полем, входит близкодействующая

$$H_s = -\nu J_s \sum_{i=1}^{N-1} s_i s_{i+1} \quad (6)$$

и дальнедействующая

$$H_l = -(1-\nu) \sum_{i,j=1}^N J_{ij}^l s_i s_j \quad (7)$$

части.

При вычислении приведенной свободной энергии

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Theta}{N} \ln Tz e^{-H/\Theta}, \quad (8)$$

где Θ - температура, константа Больцмана $k_B = 1$, учтем, что в термодинамическом пределе дальнедействующая часть гамильтониана эквивалентна приближению среднего поля. Точнее говоря, имеет место следующее строгое равенство /15-17/:

$$f = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Theta}{N} \ln Tz e^{-H^{app}/\Theta},$$

в котором аппроксимирующий гамильтониан

$$H^{app} = H_s + H_l^{app} - h \sum_{i=1}^N s_i \quad (9)$$

содержит дальнедействующую часть в форме

$$H_l^{app} = - \sum_{i=1}^N 2(1-\nu) J_l \sigma s_i + N(1-\nu) J_l \sigma^2, \quad (10)$$

где принята во внимание трансляционная инвариантность и введено обозначение для среднего спина

$$\sigma \equiv \langle s_i \rangle_{app} = \frac{\overline{h} s_i \exp(-H^{app}/\Theta)}{Tz \exp(-H^{app}/\Theta)} \quad (11)$$

Затем, используя метод трансфер-матрицы, получаем

$$f = -\Theta \left\{ K + \ln \left[\cosh \varphi + (\sinh^2 \varphi + e^{-4K})^{1/2} \right] - L \sigma^2 \right\}, \quad (12)$$

где

$$K \equiv \frac{f_3 \nu}{\Theta}, \quad L \equiv \frac{f_2 (1-\nu)}{\Theta}, \quad \varphi \equiv 2L\sigma + \frac{h}{\Theta}.$$

Для параметра порядка (II) имеем уравнение

$$\sigma = \frac{\sinh \varphi}{(\sinh^2 \varphi + e^{-4K})^{1/2}}. \quad (13)$$

Отсюда для критической точки $\sigma=0$ находим

$$\Theta_c = 2f_2 (1-\nu) \exp(2f_3 \nu / \Theta_c), \quad h_c = 0. \quad (14)$$

Видно, что при $\nu=0$ получаем температуру Кюри $\Theta_c = 2f_2$ для среднего поля, при $\nu=1$, как и должно быть в случае короткодействия, $\Theta_c=0$, а при $\nu>1$ уравнение (14) решений не имеет. Заметим, что в качестве дальнедействующей части гамильтониана можно было бы выбрать и какую-нибудь более сложную форму (см., например, /18/).

Выражения (12)-(14) задают всю термодинамику системы. Для удобства введем безразмерные величины

$$T \equiv \frac{\Theta}{f_2}, \quad g \equiv \frac{f_3}{f_2}.$$

Мы исследовали основные термодинамические характеристики системы как функции трех переменных T , g , ν . Весьма нетривиальным оказалось критическое поведение системы. Например, из решения уравнения для критической температуры

$$T_c = T_c(\nu) = 2(1-\nu) \exp(2g\nu/T_c) \quad (15)$$

следует, что кроссовер между близко- и дальнедействием при $g>1$ имеет немонотонный вид - при некоторых значениях ν температура $T_c(\nu)$ может стать гораздо больше значения $T_c(0)=2$, соответствующего теории среднего поля. Максимальная, по параметру ν , критическая температура задается уравнением (15) при условии

$$\frac{\partial T_c(\nu)}{\partial \nu} = 0, \quad (\nu = \nu_m). \quad (16)$$

Развертывая условие (16), находим

$$\frac{\partial T_c(\nu)}{\partial \nu} = \frac{(1-\nu)2g - T_c}{(1-\nu)(T_c + 2g\nu)} T_c = 0,$$

откуда

$$\nu_m = 1 - T_m / 2g, \quad T_m \equiv T_c(\nu_m).$$

Окончательно из (15) и (16) получаем

$$T_m = \frac{2g}{1 + \ln g}, \quad \nu_m = \frac{\ln g}{1 + \ln g}. \quad (17)$$

Очевидно, что

$$T_c(\nu_m) = T_m > 2g > 2 = T_c(0) \quad (g > 1).$$

При больших g из выражений (17) следует

$$T_m \simeq 2g / \ln g, \quad \nu_m \simeq 1 \quad (g \gg 1), \quad (18)$$

то есть $T_m \gg T_c(0)$. При $g \leq 1$ кроссовер монотонен. Для иллюстрации на рис.1 приведена зависимость T_c от кроссоверного параметра ν при различных $g = 0, 1(a), 1(b), 5(c)$. Пунктирными линиями отмечены

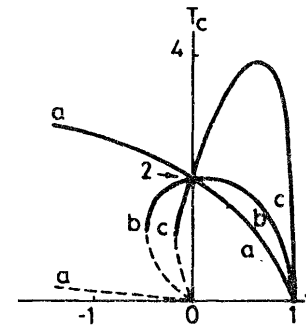


Рис.1. Зависимость критической температуры от кроссоверного параметра при $g=0, 1$ (кривая a), $g=1$ (кривая b), $g=5$ (кривая c). Пунктирные линии соответствуют неустойчивым решениям. Области фазовых переходов первого рода ограничены выражениями (19) и (20), дающими $\nu_1 = -\infty(a)$, $-0,58(b)$, $+0,079(c)$; $\nu_2 = -1,19(a)$, $-0,49(b)$, $-0,065(c)$.

нефизические решения, для которых восприимчивость и теплоемкость отрицательны, тогда как известно (Гриффитс /19/), что для гамильтонианов типа (I) они должны быть неотрицательны.

Нас будет интересовать ситуация, когда в системе существует ферромагнетизм. Это имеет место, если интенсивность антиферромагнитного короткодействия не слишком велика, точнее, если кроссоверный параметр ν больше, чем отрицательная величина ν_1 , определяемая равенством:

$$\nu_1 = -|\nu_1|, \quad |\nu_1| = (ge-1)^{-1}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что если $ge \leq 1$, то ферромагнетизм существует при всех $\nu < 1$, в этом случае можно положить $\nu_1 = -\infty$.

При отрицательных значениях ν переход ферро-парамагнетик может стать переходом I рода. Смена рода перехода происходит при $\nu = \nu_2$, задаваемом одним из равенств: $L_c^2 = 3/4$, или $4(1-\nu_2)^2 = 3T_c^2$, или

$$\nu_2 = -\frac{\ln 3}{4g} T_c. \quad (20)$$

Исследуем асимптотическое поведение термодинамических характеристик при $\tau \equiv (\Theta - \Theta_c) / \Theta_c \rightarrow 0$. Для параметра порядка (13) находим

$$\sigma \approx \begin{cases} 0,826 (-\tau), & \nu = \nu_1, \\ \sqrt{A_\sigma} (-\tau)^{1/2}, & \nu_1 < \nu \neq \nu_2, \\ 1,107 (-\tau)^{1/4}, & \nu = \nu_2, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$A_\sigma = \frac{2(1+2K_c)}{1-4L_c^2/3}, \quad (22)$$

через K_c и L_c обозначены K и L при $\Theta = \Theta_c$. Зависимость критической амплитуды (22) от параметра ν представлена на рис.2. В области перехода первого рода, когда $\nu_1 < \nu < \nu_2$, амплитуда A_σ отрицательна, поэтому разложение (21), строго говоря, имеет смысл только для $\nu \geq \nu_2$ и $\nu = \nu_1$. Однако из вида восприимчивости

$$\chi \approx \begin{cases} -0,484 (-\tau)^{-2}, & \nu = \nu_1, \\ A_\chi (-\tau)^{-1}, & \nu \geq \nu_2, \end{cases} \quad (23)$$

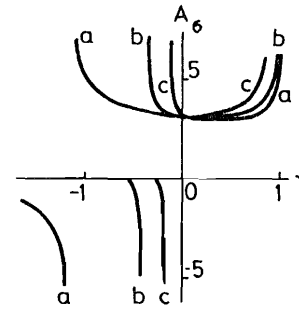


Рис.2. Кроссоверное поведение критической амплитуды параметра порядка для тех же значений g , что и на рис.1.

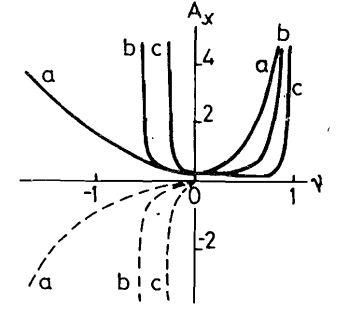


Рис.3. Критическая амплитуда восприимчивости как функция параметра порядка для тех же значений g , что и на рис.1.

в которой

$$A_\chi = \frac{1}{4T_c L_c (1+2K_c)}, \quad (24)$$

следует, что при $\nu = \nu_1$ ферромагнитное состояние неустойчиво. Таким образом, только область $\nu > \nu_2$ соответствует переходу второго рода. Отметим, что изменение рода перехода при наличии конкурирующих взаимодействий с одновременным изменением некоторых критических индексов наблюдается и в других моделях (см., например, [17]). Кроссоверное поведение критической амплитуды A_χ изображено на рис.3.

Энтропия в критической точке равна

$$s_c^f = \frac{4K_c L_c}{1+2L_c} + \ln(1+2L_c). \quad (25)$$

При $\nu \rightarrow 0$, когда $K_c \rightarrow 0$, $L_c \rightarrow 1/2$, имеем $s_c^f \rightarrow \ln 2$.

Для теплоемкости справа от критической точки и ее скачка находим

$$C_v^c \equiv \lim_{T \rightarrow T_c+0} C_v = \frac{8K_c^2 L_c}{(1+2L_c)^2}, \quad (26)$$

$$\Delta C_v \equiv \lim_{T \rightarrow T_c-0} C_v - \lim_{T \rightarrow T_c+0} C_v = \frac{2L_c(1+2K_c)^2}{1-4L_c^2/3}. \quad (27)$$

Соответствующие величины как функции кроссоверного параметра ν показаны на рис.4 и 5, откуда хорошо видна немонотонность их поведения при переходе от близко- к дальнемудействию. Для последнего, как известно, $C_V^c = 0$, $\Delta C_V = 3/2$.

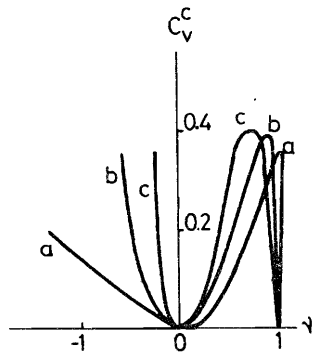


Рис.4. Зависимость удельной теплоемкости в критической точке, как предела справа, от кроссоверного параметра. Кривые a, b, c относятся к тем же ν , что и на рис.1.

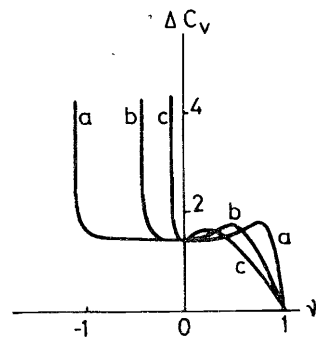


Рис.5. Скачок удельной теплоемкости в критической точке в зависимости от кроссоверного параметра. Обозначения кривых те же, что и для рис.1.

Приведем сводку значений критических индексов для теплоемкости $C_V \sim (-\tau)^{-\alpha}$ параметра порядка $\sigma \sim (-\tau)^\beta$ и восприимчивости $\chi \sim (-\tau)^{-\gamma}$ в случае тех ν , когда эти индексы имеют смысл:

$$\alpha = \begin{cases} 1/2, & \nu = \nu_2, \\ 0, & \nu_2 < \nu < 1, \end{cases} \quad (28)$$

$$\beta = \begin{cases} 1/4, & \nu = \nu_2, \\ 1/2, & \nu_2 < \nu < 1, \end{cases} \quad (29)$$

$$\gamma = 1, \quad \nu_2 \leq \nu < 1. \quad (30)$$

Эти выражения показывают, что неравенство Рашбрука выполняется как равенство, $\alpha + 2\beta + \gamma = 2$.

Итак, для рассмотренной модели возможны следующие ситуации:

- 1) $\nu < \nu_2$, ферромагнитное состояние отсутствует, но, по-видимому, появляется антиферромагнитное состояние;
- 2) $\nu = \nu_2$, это граница устойчивости ферромагнитного состояния, где ферромагнетик еще неустойчив;
- 3) $\nu_2 < \nu < 1$, существует устойчивое ферромагнитное состояние, которое при конечной температуре переходит в парамагнитное в результате перехода первого рода;
- 4) $\nu = \nu_2$, точка смены рода перехода, критические индексы отличаются от классических;
- 5) $\nu_2 < \nu < 1$, при конечной температуре происходит переход второго рода ферромагнетик - парамагнетик, критические индексы соответствуют теории среднего поля;
- 6) $\nu = 1$, система парамагнитна при всех конечных температурах и становится ферромагнитной при нулевой температуре.

Подчеркнем еще раз, что наиболее интересным результатом является установление сильной немонотонности в поведении температуры Кюри и критических амплитуд как функций кроссоверного параметра. Для наглядности мы рассмотрели здесь точно решаемую одномерную модель, содержащую как близкодействие, так и дальнеедействие. Но даже и эта простая модель может иметь практическое применение для интерпретации экспериментальных данных, например, по квазиодномерным магнетикам ¹²⁰ или, для описания других одномерных систем, таких, как молекулярные цепочки, которым соответствует модели типа модели Изинга.

Литература

1. Stinchcombe R.B. J.Phys., 1980, C13, p. L 133.
2. Stinchcombe R.B. J.Phys., 1980, C13, p.3723.
3. Ray P., Chakrabarti B. Phys.Lett., 1983, 98A, p.431.
4. Boucher J., Regnault L., Rossat-Mignod J., Willain J., Renard J. Sol.State Comm., 1979, 31, p.311.
5. Stinchcombe R.B. J. Phys., 1980, C13, p.5565.
6. Rudnick J., Nelson D. Phys.Rev., 1976, B13, p.2208.
7. Rijpkema J. Phys.Rev., 1984, A29, p.859.
8. Joyce G.S. Phys.Rev., 1966, 146, p.349.
9. Berlin T., Kac M. Phys.Rev., 1952, 86, p.821.
10. Bailin D., Love A. J.Phys., 1977, C10, p.3633.
11. Chalker J.T., Gehring G.A. J.Phys., 1979, C12, p.5545.
12. Чалый А.В., Черненко Л.М. ЖЭТФ, 1984, 87, с.187.
13. Кугель К.И., Хомский Д.И. УЭН, 1982, 136, с.621.
14. Aguilera-Granja F., Moran-Lopez J. Phys.Rev., 1985, B31, p.7146.

15. Bogolubov N.N., Jr. Method for Studying Model Hamiltonians. Oxford, Pergamon, 1972.
16. Thompson C., Silver H. Comm.Math.Phys., 1973, 33, p.53.
17. Shumovsky A.S., Yukalov V.I. Physica, 1982, 110A, p.518.
18. Katriel J., Kventsel G. Sol.State Comm., 1984, 52, p.689.
19. Griffiths R.B. J.Math.Phys., 1964, 5, p.1215.
20. De Jongh L.J., Miedema A.R. Adv.Phys., 1974, 23, p.1.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды III Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р. 50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.
Д11-85-791	Труды Международного совещания по аналитическим вычислениям на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1985.	4 р.
Д13-85-793	Труды XII Международного симпозиума по ядерной электронике. Дубна 1985.	4 р. 80 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Рукопись поступила в издательский отдел
31 июля 1986 года.

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Кислинский В.Б., Юкалов В.И.
Кроссовер между близко- и дальнодействием
в одномерной модели Изинга

P17-86-532

Рассмотрена одномерная модель Изинга, в которой наряду с взаимодействием ближайших соседей содержится также и дальнодействующее слагаемое. Последнее считается ферромагнитным, тогда как взаимодействие между ближайшими соседями может быть произвольного знака. Проанализирован кроссовер между близко- и дальнодействием в этой модели. При некоторых величинах антиферромагнитного близкодействия переход из ферро- в парамагнитное состояние относится к первому роду. В точке, где род перехода меняется со второго на первый, критические индексы отличаются от классических. Обнаружено, что при достаточно сильном ферромагнитном близкодействии кроссовер становится немонотонным, так что температура Кюри может стать существенно выше температуры перехода в дальнодействующей модели. Столь же немонотонным оказывается и поведение критических амплитуд как функций кроссоверного параметра.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Перевод О.С.Виноградовой

Kislinsky V.B., Yukalov V.I.
Crossover Between Short- and Long-Range Interactions
in One-Dimensional Ising Model

P17-86-532

We consider the one-dimensional Ising model which besides the interaction of nearest neighbours includes a long-range term. The latter is ferromagnetic while the nearest-neighbour interaction can have any sign. The crossover between short- and long-range interactions when varying the Hamiltonian parameters is analyzed for such a model. For some values of the antiferromagnetic short-range interaction the transition from a ferro- to paramagnetic state is of first order. At the point where the transition order changes from second to first critical indices differ from classical ones. It is found that for a sufficiently strong ferromagnetic short-range interaction the crossover becomes nonmonotonic, so that the Curie temperature can highly surpass the transition temperature of the long-range model. The critical amplitudes of thermodynamic functions display the same non-monotonic behaviour.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986