объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-86-465

Е.А.Кочетов

# ТОЧНЫЙ СПЕКТР СИСТЕМЫ: ТРЕХУРОВНЕВЫЙ АТОМ + ИЗЛУЧЕНИЕ

Направлено в журнал "Physics Letters"

1986

В последние IO лет активный и все возрастающий интерес проявляется к исследованию трехуровневых систем, взаимодействующих с резонансным полем излучения[I-7]. Квазиклассический подход к описанию такого рода систем развивается, например, в [4,5]. В другой серии работ[6,7] найдены точные решения уравнения Гейзенберга для динамических переменных типа операторов заселенности уровней и числа фотонов. В настоящей работе дано точное решение задачи о взаимодействии трехуровневого атома с одномодовым бозонным полем. Для нахождения точных волновых функций и уровней энергии системы здесь используется метод, ранее примененный автором[8] для решения задачи о взаимодействии двухуровневого атома с полем излучения.

Рассмотрим трехуровневый атом с двумя разрешенными переходами I $\longleftrightarrow$ 3 и 2 $\longleftrightarrow$ 3, взаимодействующий с резонансной модой поля излучения $a$. Модельный гамильтониан такой системы в дипольном приближении и приближении вращающейся волны имеет вид[6]:

$$\mathcal{H} = \Omega_1 R_{11} + \Omega_2 R_{22} + \Omega_3 R_{33} + \omega \overset{+}{a} a + \lambda_1 a R_{31} + \lambda_1 \overset{+}{a} R_{13} + \lambda_2 a R_{23} + \lambda_2 \overset{+}{a} R_{32} . \tag{I}$$

Здесь операторы $R_{ij} = |i\rangle\langle j|$ описывают населенности уровней атома (при $i=j$ ) и дипольные переходы (при $i \neq j$ ). Оператор $R_{ij}$ можно представить матрицей 3x3, на пересечении $i$ - й строки и $j$ - го столбца которой стоит I, а все остальные ее элементы равны 0. Вектор $|i\rangle$ является $i$ -тым собственным состоянием атома. Нетрудно убедиться, что

$$[R_{ij}, R_{kl}] = R_{il}\delta_{jk} - R_{kj}\delta_{il} .$$

Оператор $a(\overset{+}{a})$ описывает уничтожение (рождение) бозонного возбуждения с резонансной частотой

$$\omega = \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1), \quad \Omega_2 > \Omega_1 , \tag{2}$$

где $\Omega_j$ -энергия уровня $j$ .Условие (2), алгебраически упрощая задачу, не является принципиальным для нахождения точного решения.

Сохранение заряда (числа возбуждений) системы $\hat{M} = \overset{+}{a} a + \hat{R}$ , $\hat{R} = -R_{11} + R_{22}$ позволяет представить пространство состояний системы в виде $\sum \oplus \mathcal{H}_M$, где каждое подпространство $\mathcal{H}_M$, отвечающее определенному собственному значению заряда $M$, порождается базисом

$$\left\{ |\varphi^M_m\rangle = |M-m\rangle |m\rangle \right\} , \tag{3}$$

где

$$a^+a|M-m\rangle = (M-m)|M-m\rangle, \quad M\geq m,$$

$$\hat{R}|m\rangle = m|m\rangle, \quad m=0,\pm1.$$

Нетрудно убедиться, что возможные значения $m$ в (3) изменяются через единицу в пределах

$$-1\leq m\leq \min(M,1).$$

Размерность подпространства $\mathcal{H}_M$ есть тем самым

$$\dim\mathcal{H}_M = 2+\min(M,1) = 2+\min(n-1,1), \quad n\geq 0, \tag{4}$$

так как возможные собственные значения $M$ пробегают последовательность $M=n-1$, $n\geq 0$.

Решение уравнения Шредингера $|\Psi^M\rangle$ с гамильтонианом (I)

$$\mathcal{H}|\Psi^M\rangle = \mathcal{E}|\Psi^M\rangle, \tag{5}$$

отвечающее собственному значению заряда $M$, можно представить в виде разложения по базису (3) подпространства $\mathcal{H}_M$

$$|\Psi^M\rangle = \sum_{m=-1}^{\min(n-1,1)} c_m|\Phi_m^M\rangle,$$

или

$$|\Psi^{M=n-1}\rangle \equiv |\Psi_n\rangle = (1+c_1^2+c_2^2)^{-1/2}\left(|n\rangle|-1\rangle + c_1|n-1\rangle|0\rangle + c_2|n-2\rangle|1\rangle\right), \quad n\geq 2 \tag{6}$$

$$|\Psi_{n=1}\rangle = (1+c^2)^{-1/2}\left(|1\rangle|-1\rangle + c|0\rangle|0\rangle\right), \quad |\Psi_{n=0}\rangle = |0\rangle|-1\rangle .$$

Подставляя теперь (6) в уравнение (5), получим следующее решение:

i). Если $n\geq 2$, то

$$|\Psi_n^{(\pm)}\rangle = \left(\lambda_1^2 n + \lambda_2^2(n-1) + \vartheta_{(\pm)}^2\right)^{-1/2}\left(\lambda_1\sqrt{n}|n\rangle|-1\rangle + \lambda_2\sqrt{n-1}|n-2\rangle|1\rangle + \vartheta_\pm|n-1\rangle|0\rangle\right), \tag{7}$$

$$\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \Omega_3 + \omega(n-1) + \frac{\Delta}{2} \pm\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+\lambda_1^2 n + \lambda_2^2(n-1)}, \tag{8}$$



$$\Delta = \Omega_1-\Omega_3+\omega, \quad \vartheta_\pm = -\frac{\Delta}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2+\lambda_1^2 n+\lambda_2^2(n-1)}, \tag{9}$$

$$|\Psi_n\rangle = \sqrt{\frac{\lambda_2^2(n-1)}{\lambda_1^2 n+\lambda_2^2(n-1)}}\left(|n\rangle|-1\rangle - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\sqrt{\frac{n}{n-1}}|n-2\rangle|1\rangle\right), \tag{10}$$

$$\mathcal{E}_n = \Omega_1+\omega n = \Omega_2+\omega(n-2)$$

ii). При $n=1$ решение дается формулами (7)-(9), где следует положить $n=1$.

iii). И, наконец, при $n=0$

$$|\Psi_{n=0}\rangle = |0\rangle|-1\rangle, \quad \mathcal{E}_{n=0}=\Omega_1 .$$

Видно, что подпространство состояний $\mathcal{H}_M$, отвечающее собственному значению $M=n-1$, трехмерно, если $n\geq 2$; двумерно, при $n=1$; и одномерно, если $n=0$, что полностью соответствует (4). Нетрудно убедиться в полноте полученной системы собственных функций задачи (1).

Совершенно аналогично решается обобщение задачи (I) на случай нелинейного по бозонным переменным взаимодействия:

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j R_{jj} + \omega a^+a + \lambda_1 a^l R_{31} + \lambda_1(a^+)^l R_{13} + \lambda_2 a^k R_{23} + \lambda_2(a^+)^k R_{32} \tag{11}$$

$$\hat M = a^+a - lR_{11} + kR_{22}, \quad [\mathcal{H},\hat M]=0 . \tag{12}$$

Переходы I$\leftrightarrow$3 и 2$\leftrightarrow$3 осуществляются теперь вследствие испускания (поглощения) $l$ или $k$ квантов поля $a$. Раскладывая, аналогично (6), пространство состояний системы (II) в прямую сумму конечномерных подпространств с фиксированным значением заряда (I2) и решая на каждом из подпространств соответствующее уравнение Шредингера, получим для системы собственных функций и уровней энергии следующие выражения ( $|\Psi^{M=n-l}\rangle \equiv |\Psi_n\rangle$ ) :

i) Для $n\geq l+k$

$$|\Psi_n^{(\pm)}\rangle = \left(\lambda_1^2 a_n^2 + \lambda_2^2 b_n^2 + u_\pm^2\right)^{-1/2}\left(\lambda_1 a_n|n\rangle|-1\rangle + \lambda_2 b_n|n-l-k\rangle|1\rangle + u_\pm|n-l\rangle|0\rangle\right), \tag{13}$$

$$\mathcal{E}_n^{(\pm)} = \Omega_3 + \omega(n-l) + \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2}\right)^2 + \lambda_1^2 a_n^2 + \lambda_2^2 b_n^2}\,, \tag{I4}$$

где $\Delta = \Omega_1 - \Omega_3 + \omega l = \Omega_2 - \Omega_3 - \omega k$, , $a_n^2 = n!/(n-l)!$, $b_n^2 = \frac{(n-l)!}{(n-l-k)!}$,
$u_\pm = -\Delta/2 \pm \sqrt{(\Delta/2)^2 + \lambda_1^2 a_n^2 + \lambda_2^2 b_n^2}$ ,
Решением в случае $n \geq l+k$ является также

$$|\Psi_n\rangle = \left(\lambda_1^2 a_n^2 + \lambda_2^2 b_n^2\right)^{-1/2} \left(\lambda_2 b_n |n\rangle|-1\rangle - \lambda_1 a_n |n-l-k\rangle|1\rangle\right), \tag{I5}$$
$$\mathcal{E}_n = \Omega_1 + \omega n = \Omega_2 + \omega(n-l-k);$$

ii) для $l \leq n < l+k$ решение дается формулами (I3),(I4), где следует положить $b_n = 0$ ;

iii) и, наконец, для $n < l$

$$|\Psi_n\rangle = |n\rangle|-1\rangle\,, \tag{I6}$$
$$\mathcal{E}_n = \Omega_1 + \omega n\,.$$

Заметим, что функции (I3), (I5), (I6) образуют в совокупности полную ортонормированную систему.

## Литература


1. M.Tan-no, K.Yokoto, H.Inaba, J.Phys. B8 (1975) 339.
2. C.M.Bowden,C.R.Stroud,Phys.Rev.A18(1978) 1588.
3. T.W.Mossberg,S.R.Hartmann,Phys.Rev.A23(1981) 1271.
4. J.N.Elgin,Phys.Lett.8A(1980) 140.
5. H.I.Yoo,J.H.Eberly,Phys.Rep.118(1985 239.
6. N.N.Bogolubov(jr.),Fam Le Kien,A.S.Shumovsky,Phys.Lett. 101A(1984),201; Phys.Lett.107A(1985) 173.
7. N.N.Bogolubov(jr.),Fam Le Kien,A.S.Shumovsky, J.Phys.A19(1986) 191.
8. E.A.Kochetov,Preprint JINR E17-85-945(1985),Dubna.



Рукопись поступила в издательский отдел
10 июля 1986 года.



Кочетов Е.А. P17-86-465

Точный спектр системы: трехуровневый атом + излучение


Найдены полная ортонормировочная система собственных функций и уровни энергии трехуровневого неэквидистантного атома, взаимодействующего с одной модой бозонного поля. Подробно рассмотрен вариант теории, когда атомные переходы осуществляются вследствие однобозонного обмена. Приведены результаты для многобозонной модификации взаимодействия.



Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986


Перевод автора


Kochetov E.A. P17-86-465

Exact Spectrum of the System:
Three-Level Atom + Radiation


A complete orthonormalized system of eigenfunctions and energy levels are found for a three-level nonequidistant atom interacting with one mode of the boson field. A detailed consideration is given for the variant of theory when atomic transitions are mediated by one-boson exchange. Results are reported for a multiboson modification of interaction.



The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1986