объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-86-206

В.Г.Маханьков, Р.Мырзакулов*

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И НЕПРЕРЫВНАЯ **XYZ**-МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА С ОДНОИОННОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

Направлено в журнал "Physica Scripta"

* Институт физики высоких энергий
АН КазССР, Алма-Ата

1986

В последнее время значительное внимание удаляется изучению кристаллов, магнетиков и некоторых органических соединений, структура которых имеет слоистый характер /I/. Основой теоретического изучения такого рода магнетиков является модель Гейзенберга. Экспериментальные исследования /2/ одномерных магнетиков указывают на существование в них при низких температурах возбуждений, которые можно трактовать как солитоны. Последние обычно являются решениями нелинейных классических уравнений. Поэтому представляется важным проследить переход от квантового (решеточного) к непрерывному (классическому) варианту модели Гейзенберга. Иногда такой переход осуществляется путем формальной замены спинового оператора $\hat{S}$ классическим вектором /3/. Альтернативным и математически более естественным подходом является усреднение квантового гамильтониана модели Гейзенберга по некоторым состояниям.

Ниже мы рассмотрим XYZ -модель Гейзенберга с учетом одноионной анизотропии. Переход от квантового описания к классическому осуществляется с помощью обобщенных когерентных состояний (ОКС) группы SU(2). Использование последних оправдано их близостью к соответствующим классическим состояниям.

I. XXZ-модель Гейзенберга во внешнем магнитном поле

Рассмотрим XXZ- модель Гейзенберга для ферромагнетика с учетом внешнего магнитного поля, направленного по оси анизотропии:

$$\hat{H}=-\frac{1}{4}\sum_{j,\sigma} J_{jj+\sigma}\left(\hat{S}_j^+\hat{S}_{j+\sigma}^- + \hat{S}_j^-\hat{S}_{j+\sigma}^+\right)-\frac{1}{2}\sum_{j,\sigma}\bar{J}_{jj+\sigma}\hat{S}_j^z\hat{S}_{j+\sigma}^z-\mu h\sum_j \hat{S}_j^z , \tag{I.I}$$

где $\hat{S}_j^{\pm}$, $\hat{S}_j^z$ - спиновые операторы, $J_{jj+\sigma}$, $\bar{J}_{jj+\sigma}$ - обменные интегралы, $\sigma = \pm I$, т.е. учитываются взаимодействия ближайших соседей.

Перейдем от спиновых операторов $\hat{S}^{\pm}$, $\hat{S}^z$ к двум бозе-операторам рождения a_j^+ и уничтожения a_j с помощью представления Холстейна-Примакова ($S \gg I$):

$$\hat{S}_j^+=\sqrt{2s}\sqrt{1-\frac{a_j^+a_j}{2s}}\,a_j\ ,\qquad \hat{S}_j^-=\sqrt{2s}\,a_j^+\sqrt{1-\frac{a_j^+a_j}{2s}}\ ,\qquad \hat{S}_j^z=s-a_j^+a_j \tag{I.2}$$

с $\left[a_i,a_j^+\right]=\delta_{ij}\ ,\ \left[a_i,a_j\right]=\left[a_i^+\ ,\ a_j^+\right]=0$.

В низкотемпературном пределе ($a_j^+a_j \ll 2s$) в разложении радикалов в формулах (I.2) по степеням $a_j^+a_j/2s$ можно ограничиться первыми членами:

$$\sqrt{1-\frac{a_j^+a_j}{2s}}=1-\frac{a_j^+a_j}{4s}-\frac{(a_j^+a_j)^2}{32s^2}-\dots \tag{I.3}$$

В пренебрежении членами порядка $a^+a/2s$ в разложении корня (I.3) континуальным пределом xxz-модели Гейзенберга (I.I) является нелинейное уравнение Шредингера с кубической нелинейностью (НУШ) /4/:

$$i\dot{\Phi}+A\Phi''+\tilde{\mu}\Phi+\lambda|\Phi|^2\Phi=0\ , \tag{I.4}$$

где $A=sJ_o a^2$, $\tilde{\mu}=2sJ_o(1-\rho)-\mu h$, $\lambda=2J_o\rho$, s – спин, a – постоянная решетки, $\rho=\bar{J}_o/J_o$ характеризует анизотропию модели, $J_o=J_{jj+\sigma}$, $\bar{J}_o=\bar{J}_{jj+\sigma}$.

Учитывая следующий член в разложении корня (I.3), мы придем опять к (I.4), но с перенормированным коэффициентом при нелинейном члене $|\Phi|^2\Phi$:

$$\lambda\sim(\rho-1)\ . \tag{I.5}$$

В результате при $\rho=1$, т.е. в случае xxx-модели, $\lambda=0$ и кубический член в (I.4) исчезает, а взаимодействие "выключается". Отсюда следует, что: I) даже в низкотемпературном пределе нельзя пренебрегать по крайней мере вторым членом в разложении (I.3); 2) при $\rho\approx 1$, т.е. в xxz-модели со слабой анизотропией, необходимо рассматривать следующие члены в (I.3). С точностью $O((a^+a)^3)$ гамильтониан (I.I) имеет вид

$$\hat{H}=H_o-\frac{s}{2}\sum_{j,\sigma}J_o\Big[(a_{j+\sigma}^+a_j+ba_{j+\sigma}^+a_j^+a_ja_j+ca_{j+\sigma}^+a_j^{+2}a_j^3+ba_{j+\sigma}^{+2}a_{j+\sigma}a_j+$$
$$+b^2a_{j+\sigma}^{+2}a_j^+a_{j+}a_j^2+ca_{j+\sigma}^{+3}a_{j+\sigma}^2a_j)+(a_j^+a_{j+\sigma}+ba_j^{+2}a_ja_{j+\sigma}+ \tag{I.6}$$

$$+ca_j^{+3}a_j^2a_{j+\sigma}+ba_j^+a_{j+\sigma}^+a_{j+\sigma}^2+b^2a_j^{+2}a_{j+\sigma}^+a_ja_{j+\sigma}^2+ca_j^+a_{j+\sigma}^{+2}a_{j+\sigma}^3)\Big]-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{j,\sigma}\bar{J}_o\left[-s(a_j^+a_j+a_{j+\sigma}^+a_{j+\sigma})+a_{j+\sigma}^+a_j^+a_ja_{j+\sigma}\right]+\mu h\sum_j a_j^+a_j\ ,$$

где $H_o=-\frac{s^2}{2}\sum_{j\sigma}J_{jj+\sigma}-\mu hsN$, $b=-\frac{1}{4s}(1+\frac{1}{8s})$, $c_z=-\frac{1}{32s^2}$.

Используя процедуру, описанную в /5/, после несложных вычислений получим " φ^6-модель":

$$i\dot{\Phi}+A\Phi''+\tilde{\mu}\Phi+\lambda|\Phi|^2\Phi-\gamma|\Phi|^4\Phi=0\ , \tag{I.7}$$

где $\lambda=2J_o(\rho-4sb)$, $\gamma=6sJ_o(b^2+2c)$.

Уравнение (I.7) встречается в различных физических задачах и довольно интенсивно изучается в последнее время /6/. На языке бозе-газа оно соответствует двухчастичному притяжению на далеких "расстояниях" и трехчастичному отталкиванию на "близких" расстояниях и более приспособлено для описания паулевских частиц, чем обычное НУШ группы s3.

Рассмотрим теперь многокомпонентное обобщение xxz-модели (I.I) и учтем колебания решетки в следующих приближениях:

$$J_{jj+\sigma}=J_o-J_1\left|x_{j+\sigma}-x_j\right|\ ,$$
$$U=\frac{\gamma_1}{2}(x_{j+\sigma}-x_j-a)^2+\frac{\gamma_2}{3!}(x_{j+\sigma}-x_j-a)^3\ . \tag{I.8}$$

После длинных, но несложных вычислений и масштабного преобразования получим следующую систему уравнений:

$$i\dot{\Phi}+\Phi''-n\Phi+\lambda(\bar{\Phi}\Phi)\Phi-\gamma(\bar{\Phi}\Phi)^2\Phi=0\ ,$$
$$\ddot{n}=n''+\alpha(n^2)''+\beta n^{IV}+(\bar{\Phi}\Phi)''\ , \tag{I.9}$$

где $\alpha,\beta=\mathrm{const}$, $\bar{\Phi}=\bar{\Phi}+\gamma_o$, $\gamma_o=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\dots,1}_{p},\ \underbrace{-1,\dots,-1}_{q})$,
$\Phi=(\Phi_1,\Phi_2,\dots,\Phi_N)^t$, $N=p+q$.

Система (I.9) описывает спин-спиновое, спин-фононное и фонон-фононное взаимодействия. При $\gamma=\lambda=0$, $N=1$ система (I.9) была получена одним из авторов в /7/, она является интегрируемой при $\alpha=-1$, $\beta=1/3$ /8/. В /9/ для системы (I.9) при $\gamma=0$ был найден и исследован широкий класс односолитонных решений, а в случае групп U(2) и U(1,1) установлены области существования таких решений на (α,β)-плоскости.

2. XYZ-модель с одноионной анизотропией во внешнем магнитном поле

Рассмотрим XYZ-модель Гейзенберга, описываемую гамильтонианом вида /3/:

$$\hat{H} = \hat{H}_{XYZ} + \hat{H}_K + \hat{H}_m , \tag{2.I}$$

где

$$\hat{H}_{XYZ} = -\sum_n \left\{ \frac{1}{4}\left[J^-(\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^+ + \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+1}^-) + J^+(\hat{S}_n^+ \hat{S}_{n+1}^- + \hat{S}_{n+1}^+ \hat{S}_n^-) \right] + J_3 \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+1}^z \right\} ,$$

$$\hat{H}_k = -\frac{1}{2}\sum_n \left\{ \frac{1}{4}\left[K^-(\hat{S}_n^+ \hat{S}_n^+ + \hat{S}_n^- \hat{S}_n^-) + K^+(\hat{S}_n^+ \hat{S}_n^- + \hat{S}_n^- \hat{S}_n^+) \right] + K_3 \hat{S}_n^{z\,2} \right\} ,$$

$$\hat{H}_m = -\mu h \sum_n \hat{S}_n^z , \quad J^{\pm} = J_1 \pm J_2 , \quad K = K_1 \pm K_2 ,$$

$$J_i = J_o + \frac{m_i a^2}{2} , \quad \hat{S}_n^{\pm} = \hat{S}_n^x \pm i \hat{S}_n^y ,$$

a – постоянная решетки, J_i – обменные интегралы, K_i – константы одноионной анизотропии.

Спиновые операторы $\hat{S}_n^{\pm}$, $\hat{S}_n^z$ удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\left[\hat{S}_n^z, S_n^{\pm}\right] = \pm \hat{S}_n^{\pm} , \quad \left[\hat{S}_n^-, \hat{S}_n^+\right] = -2\hat{S}_n^z \tag{2.2a}$$

и

$$\left[\hat{S}_i^{\pm}, \hat{S}_j^z\right] = \left[\hat{S}_i^-, \hat{S}_j^+\right] = \left[\hat{S}_i^-, \hat{S}_j^-\right] = \left[\hat{S}_i^+, \hat{S}_j^+\right] = \left[\hat{S}_i^z, \hat{S}_j^z\right] = 0 \tag{2.2б}$$

при $i \neq j$.

Уравнение движения для оператора спина имеет стандартный вид:

$$i\hbar \dot{\hat{S}}_n = \left[\hat{S}_n, \hat{H}\right] , \tag{2.3}$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} i\hbar \dot{\hat{S}}_n^x &= \frac{1}{2}(K_2 - K_3)\hat{S}_n^x + J_2 \hat{S}_{n+1}^y \hat{S}_n^z - J_3 \hat{S}_n^y \hat{S}_{n+1}^z + (K_2 - K_3)\hat{S}_n^z \hat{S}_n^y - \mu h \hat{S}_n^y , \\ i\hbar \dot{\hat{S}}_n^y &= \frac{1}{2}(K_3 - K_1)\hat{S}_n^y - J_1 \hat{S}_{n+1}^x \hat{S}_n^z + J_3 \hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^z + (K_3 - K_1)\hat{S}_n^x \hat{S}_n^z + \mu h \hat{S}_n^z , \\ i\hbar \dot{\hat{S}}_n^z &= \frac{1}{2}(K_1 - K_2)\hat{S}_n^z + J_1 \hat{S}_{n+1}^x \hat{S}_n^y - J_2 \hat{S}_n^x \hat{S}_{n+1}^y + (K_1 - K_2)\hat{S}_n^y \hat{S}^x{}_n . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Для перехода к классическому пределу усредним оператор $\hat{H}$ по состоянию

$$|\zeta\rangle = \prod_n |\zeta_n\rangle = \prod_n (1 + |\zeta_n|^2)^{-j} e^{\zeta_n \hat{S}_n^+} |j, -j\rangle , \tag{2.5}$$

являющемуся обобщенным когерентным состоянием, соответствующим группе $SU(2)$ /I0/. Имеем

$$H = \langle \zeta | \hat{H} | \zeta \rangle = H_{XYZ} + H_k + H_m , \tag{2.6}$$

где

$$\begin{aligned} H_{XYZ} = -j^2 \sum_n \Big\{ &\left[(1 + |\zeta_n|^2)(1 + |\zeta_{n+1}|^2)\right]^{-1} \Big[J^-(\zeta_n \zeta_{n+1} + \zeta_n^* \zeta_{n+1}^*) + \\ &+ J^+(\zeta_n \zeta_{n+1}^* + \zeta_n \zeta_{n+1}^*) + J_3(|\zeta_n|^2 - 1)(|\zeta_{n+1}|^2 - 1)\Big]\Big\} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_k = -\frac{1}{2}\sum_n \Big\{ &(1 + |\zeta_n|^2)^{-2} \Big[\frac{1}{2}K^- j(2j-1)(\zeta_n^{*2} + \zeta_n^2) + \frac{1}{2}K^+ j \bullet (2j |\zeta_n|^2 + \\ &+ |\zeta_n|^4 + 1 + 2j |\zeta_n|^2) + K_3 j^2 ((1 - |\zeta_n|^2)^2 + \frac{2}{j}|\zeta_n|^2)\Big]\Big\} , \end{aligned}$$

$$H_m = -\mu h j \sum_n (|\zeta_n|^2 - 1)(|\zeta_n|^2 + 1)^{-1} , \quad j \text{ – спин.}$$

Для усредненных спиновых операторов обычно рассматривают две параметризации через угловые переменные:

$$S_n^x = \sin\theta_n \cos\varphi_n , \quad S_n^y = \sin\theta_n \sin\varphi_n , \quad S_n^z = \cos\theta_n , \tag{2.7}$$

и переменные ζ_n и ζ_n^* с помощью стереографической проекции:

$$S_n^+ = \frac{2\zeta_n}{1 + |\zeta_n|^2} , \quad S_n^- = \frac{2\zeta_n^*}{1 + |\zeta_n|^2} , \quad S_n^z = \frac{1 - |\zeta_n|^2}{1 + |\zeta_n|^2} . \tag{2.8}$$

Величины ζ_n, θ_n и φ_n связаны по формуле

$$\zeta_n = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta_n}{2}\right) e^{i\varphi_n} .$$

Классические уравнения движения в терминах переменных ζ_n, ζ_n^* и $\Phi_n = \cos\theta_n$, φ_n можно получить с помощью скобок Пуассона /II/ ж):

$$\{\zeta_n, \zeta_\ell\} = -i(1 + |\zeta_n|^2)^2 \delta_{n\ell} , \quad \{\varphi_n, \Phi_\ell\} = \delta_{n\ell} . \tag{2.9}$$

ж) – Отметим, что классический лагранжиан, порождающий эти уравнения, получается при рассмотрении соответствующих фазовых интегралов /II/.

Имеем, соответственно,

$$i\dot{\zeta}_n = (1+|\zeta_n|^2)^2\partial H(\zeta_n,\zeta_n^*,\zeta_{n+1},\zeta_{n+1}^*)/\partial\zeta_n^* , \tag{2.10}$$

где H задан формулой (2.6) и

$$\dot{\varphi}_n = \frac{\partial H}{\partial\Phi_n}(\Phi_n,\varphi_n) , \qquad \dot{\Phi}_n = -\frac{\partial H}{\partial\varphi_n}(\Phi_n,\varphi_n) , \tag{2.11}$$

здесь

$$H(\Phi_n,\varphi_n) = -\sum_n \left\{\left[\sqrt{(1-\Phi_n^2)(1-\Phi_{n+1}^2)}\,(J_1\cos\varphi_n\cos\varphi_{n+1} + J_2\sin\varphi_n\sin\varphi_{n+1})\right] + J_3\Phi_n\Phi_{n+1}\right\} - \frac{1}{2}\sum_n\left\{\left[(1-\Phi_n^2)(K_1\cos^2\varphi_n+K_2\sin^2\varphi_n)\right]+K_3\Phi_n^2\right\} - \mu h\sum_n\Phi_n . \tag{2.12}$$

Чтобы перейти к непрерывному пределу, полагая функцию $\zeta(x,y,z,t)$ непрерывной, разложим ее в ряд

$$\zeta_{k+1} = \zeta_k + (\vec{a}\,\nabla)\zeta_k + \frac{1}{2!}(\vec{a}\,\nabla)^2\zeta_k + \ldots , \tag{2.13}$$

где $\vec{a} = (a,a,a)$, ∇ – градиент.

Ограничившись квадратичными по a членами в разложении (2.13), подставляя его в (2.6) и перейдя от суммирования по узлам кристаллической решетки к интегрированию по объему кристалла, получим выражение для классического гамильтониана:

$$H = H_o + H_{xxx} + H_a + H_m , \tag{2.14}$$

где

$$H_o = -j\sum_n\left[J_o j + \frac{1}{4}(K_1+K_2+K_3)\right] ,$$

$$H_{xxx} = 2J_o j^2a^2\int d^3x\,(\nabla\zeta\cdot\nabla\zeta^*)(1+|\zeta|^2)^{-2} ,$$

$$H_a = -2J_o j^2a^2\int d^3x\,(1+|\zeta|^2)^{-2}\left\{\frac{1}{4}\left[M_1(\zeta+\zeta^*)^2 - M_2(\zeta-\zeta^*)^2 + M_3(|\zeta|^2-1)^2\right]\right\} ,$$

$$H_m = -\mu hj\int d^3x\,(|\zeta|^2-1)(|\zeta|^2+1)^{-1} ,$$

$$M_i = \left(m_i + \frac{2j-1}{2j\,a^2}K_i\right)/J_o . \tag{2.15}$$

Уравнение движения для переменных ζ и ζ^* имеет вид

$$i\dot{\zeta} = (1+|\zeta|^2)^2\,\delta H/\delta\zeta^* \tag{2.16}$$

или

$$i\dot{\zeta} + \Delta\zeta - \frac{2\zeta^*|\nabla\zeta|^2}{1+|\zeta|^2} + \frac{1}{2}\left[M_1(\zeta+\zeta^*) + M_2(\zeta-\zeta^*) + M_3(|\zeta|^2-1)\zeta\right] - \frac{\zeta}{2(1+|\zeta|^2)}\left[M_1(\zeta+\zeta^*)^2 - M_2(\zeta-\zeta^*)^2 + M_3(|\zeta|^2-1)^2\right] + 2\mu' h\zeta = 0 , \tag{2.17}$$

здесь Δ – лапласиан, $\mu' = \mu/2J_o j^2a^2$, $t/2J_o j^2a^2 \to t$.

Уравнения движения для полей $\theta(x,y,z,t)$ и $\varphi(x,y,z,t)$ запишем, ограничившись для простоты одноосной анизотропией:

$$\Delta\theta - \left[M_3 + (\nabla\varphi)^2\right]\sin\theta\cos\theta + (\dot{\varphi} - \tfrac{1}{2}h)\sin\theta = 0 , \tag{2.18}$$

$$\operatorname{div}(\sin^2\theta\,\nabla\varphi) - \dot{\theta}\sin\theta = 0 .$$

Отметим здесь, что выбор ОКС, осуществляющих переход от квантовой задачи к классической, не случаен и определяется симметрией гамильтониана. Так, использование ОКС группы $SU(2)$ в рассматриваемом нами случае может быть оправдано лишь для гамильтонианов со слабой анизотропией $J_i - J_j \sim a^2$ и $K_i \sim a^2$, тогда многообразия ОКС и гамильтониана практически совпадают. Невыполнение условий малости анизотропии приводит к весьма "экзотическим" континуальным гамильтонианам, для которых выбор группы ОКС в виде $SU(2)$ вряд ли оправдан.

3. Одномерный случай

Рассмотрим XYZ-модель, ограничившись для простоты одномерным случаем. Введем скобку Пуассона для двух функционалов A и B в виде

$$\{A,B,\} = -i(1+|\zeta|^2)^2\int dx\left\{\frac{\delta A}{\delta\zeta}\frac{\delta B}{\delta\zeta^*} - \frac{\delta A}{\delta\zeta^*}\frac{\delta B}{\delta\zeta}\right\} . \tag{3.1}$$

Тогда поля $\zeta(x,t)$ и $\zeta^*(x,t)$ удовлетворяют коммутационному соотношению

$$\{\zeta(x,t),\ \zeta^*(y,t)\} = -i(1+|\zeta(x,t)|^2)\,\delta(x-y) . \tag{3.2}$$

При этом уравнение движения для поля $\zeta(x,t)$ имеет вид

$$\dot{\zeta} = \{H,\zeta\} \tag{3.3}$$

или

$$i\dot{\zeta}+\zeta''-\frac{2\zeta^*\zeta'^2}{1+|\zeta|^2}+\frac{1}{2}\left[M_1(\zeta+\zeta^*)+M_2(\zeta-\zeta^*)+M_3(|\zeta|^2-1)\zeta\right]-$$
$$-\frac{\zeta}{2(1+|\zeta|^2)}\left[M_1(\zeta+\zeta^*)^2-M_2(\zeta-\zeta^*)^2+M_3(|\zeta|^2-1)^2\right]+2\mu'h\zeta=0\ , \tag{3.4}$$

где $\mu'=\mu/2J_0j^2a^2$, $t\to 2J_0j^2a^2ht$.

Перейдем от полей ζ и ζ^* к сферическим переменным с помощью преобразования:

$$\zeta=\frac{S^+}{1+S_3}\ ,\quad \zeta^*=\frac{S^-}{1+S_3}\ , \tag{3.5}$$

где $S^{\pm}=S_1\pm iS_2$, $S^+S^-+S_3^2=1$, причем $S_k(x,t)$ удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\{S_i(x,t),S_j(y,t)\}=\varepsilon_{ijk}\,S_k(x,t)\,\delta(x-y) \tag{3.6}$$

алгебры Ли $SU(2)$. Для произвольных функционалов A и B скобка Пуассона имеет вид

$$\{A,B\}=\varepsilon_{ijk}\int dx\left(\frac{\delta A}{\delta S_i(x,t)}\cdot\frac{\delta B}{\delta S_j(x,t)}\,S_k(x,t)\right)\ . \tag{3.7}$$

Уравнения движения, эквивалентные (3.4), в терминах S_k имеют вид

$$\dot{S}_k=\{H,S_k\}\ , \tag{3.8}$$

или в векторной форме

$$\dot{\vec{S}}=\left[\vec{S}\cdot(\vec{S}''+M\vec{S})\right]+\left[\vec{h}\cdot\vec{S}\right]\ , \tag{3.9}$$

где

$$\vec{S}=(S_1,S_2,S_3)\ ,\quad M=\mathrm{diag}(M_1,M_2,M_3)\ ,\quad \vec{h}=(0,0,h)\ ,$$
$$H=\int dx\left[|\vec{S}'|^2-(\vec{S}\,M\,\vec{S})-(\vec{h}\,\vec{S})\right]\ . \tag{3.10}$$

Иногда удобно уравнения движения записать в терминах угловых переменных, используя континуальную форму формул (2.7): $S_1=\sin\theta\cos\varphi$, $S_2=\sin\theta\sin\varphi$, $S_3=\cos\theta=\phi$. Имеем

$$\theta_{xx}-(M_3+\varphi'^2)\sin\theta\cos\theta-\left(\frac{1}{2}h_3-\dot{\varphi}\right)\sin\theta=0\ ,$$
$$\sin\theta\,\dot{\theta}=(\varphi'\sin^2\theta)'\ . \tag{3.11}$$

В переменных φ и ϕ система (3.9) есть

$$\dot{\varphi}=\{H,\varphi\}=\frac{\delta H(\varphi,\phi)}{\delta\phi}\ ,$$
$$\dot{\phi}=\{H,\phi\}=-\frac{\delta H(\varphi,\phi)}{\delta\varphi}\ , \tag{3.12}$$

где $\{\varphi(x),\ \phi(y)\}=\delta(x-y)$ и

$$H(\varphi,\phi)=\frac{1}{2}\int dx\left\{\frac{\phi'^2}{1-\phi^2}+\varphi'^2(1-\phi^2)-\left[(1-\phi^2)(M_1\cos^2\varphi+M_2\sin^2\varphi)+M_3\phi^2\right]-h\mu'\phi\right\}\ . \tag{3.13}$$

Уравнение (3.9) может быть записано в стандартной матричной форме:

$$\dot{\tilde{S}}=\frac{1}{2i}\left[\tilde{S},\ (\tilde{S}''+M\tilde{S})\right]+\left[h,\tilde{S}\right]\ , \tag{3.14}$$

где $\tilde{S}=(\vec{S},\vec{\sigma})$, $\vec{\sigma}=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, σ_k – матрица Паули.

В (3.14) последнее слагаемое можно убрать с помощью преобразования

$$\tilde{S}\to e^{iht}\tilde{S}e^{-iht}\ ,$$

в результате

$$\dot{\tilde{S}}=\frac{1}{2i}\left[\tilde{S},(\tilde{S}''+m\tilde{S})\right]\ . \tag{3.15}$$

Уравнения (3.9), (3.11), (3.12), (3.14) и (3.15) являются различными записями известного уравнения Ландау-Лифшица.

4. Обсуждение

Выше мы рассмотрели два варианта процедуры сведения для XYZ – модели ферромагнетика Гейзенберга, т.е. переход от квантового решеточного описания к континуальному классическому. Для этого мы использовали как обычные когерентные состояния группы Гейзенберга-Вейля, так и обобщенные когерентные состояния группы $SU(2)$. В первом случае процедура сведения содержит также преобразование Холстейна-Примакова от спиновых паули-операторов к бозе-операторам и представляет собой в конечном итоге разложение по малому параметру $(N_j/2s)$, где $N_i=a_i^+a_i$ – число частиц. Проведен аккуратный учет всех членов одного порядка в этом разложении для XYZ -модели и показано, что, поскольку коэффициент при младшем нелинейном члене пропорционален величине анизотропии, в случае ее малости необходимо удерживать члены следующего порядка по $N_i/2s$. В результате мы приходим к НУШ модели бозе-газа с "двухчастичным" притяжением и "трехчастичным" отталкиванием. Последняя обладает рядом характерных свойств, существенно отличных от свойств НУШ с кубической нелинейностью /6/. Упомянем здесь некоторые из них: насыщение сил, существование устойчивых неодномерных солитонов и возможность фазового перехода из капельного (солитонного) в конденсатное состояние. Последнее означает, что в таких системах (даже при $\Delta < 0$) возможно возникновение боголюбовского конденсата магнонов.

Второй вариант процедуры сведения связан с использованием ОКС группы $SU(2)$ и, по-видимому, является более последовательным. По крайней мере, такой подход свободен от некоторых ограничений первого, в частности, его можно применять не только для XXX- и XXZ -моделей, но и для XYZ -модели при произвольной величине спина. В то же время он позволяет очертить область, в которой классическую модель анизотропного уравнения Ландау-Лифшица можно считать адекватной квантовой XYZ-модели Гейзенберга. Так, из проведенного анализа следует, что, во-первых, последняя может быть сведена к первой лишь при малой величине анизотропии $\Delta J_j \sim a^2$, т.е. когда симметрии квантового гамильтониана и ОКС лишь незначительно отличаются друг от друга. При значительной величине анизотропии можно получить весьма экзотические уравнения. Во-вторых, дополнительный учет одноионной анизотропии не изменяет вида классических уравнений лишь при $K_i \sim a^2$, причем возникает перенормировка тензора анизотропии. Последний факт совершенно не очевиден априори, поскольку на $SU(2)$ ОКС $\langle (S_n^i)^2 \rangle \neq \langle S_n^i \rangle \langle S_n^i \rangle$, в то время как $\langle S_n^i S_{n+1}^i \rangle = \langle S_n^i \rangle \langle S_{n+1}^i \rangle$. Отметим, что как следствие этого обстоятельства вклад одноионной анизотропии в уравнение Ландау-Лифшица зависит от представления ОКС и обращается в нуль при $j=\frac{1}{2}$, хотя $K_1, K_2, K_3 \neq 0$. Резюмируя, отметим, что приведенные выше результаты являются еще одним подтверждением того факта, что ОКС, минимизирующие соотношение неопределенностей, максимально близки к классическим и позволяют перекинуть мост между квантовыми моделями (моделями квантовой статистики) и классическими. В этом смысле процедура сведения (т.е. переход от дискретного квантового к классическому континуальному описанию), основанная на концепции ОКС, является наиболее последовательной. Этот факт отмечался также в работах /I2/, где была установлена связь между точными решениями квантовой модели Гейзенберга (в виде спиновых комплексов и их совокупностей) и квазиклассическими солитонами модели Ландау-Лифшица.

Авторы благодарны О.К.Пашаеву за обсуждение вопросов, возникавших на разных стадиях выполнения данной работы.

Литература

I. а) Maki K. Progress in Low Temperature Physics, v. VIII , Ed. D.F.Brewer, North-Holland Pub. Company, 1982;
б) Давыдов А.С. Солитоны в молекулярных системах. "Наукова думка", Киев, 1984;
в) De Jongh L.J. and Miedema A.R. Adv. Phys., 1974, 23, p.1.
2. Кодама Г. ТИИЭР, I98I, 69, № 9, с. 62.
3. Косевич А.М. и др. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, I983.
4. Makhankov V.G., Kundu A., Pashaev O.K. Physica Scripta, 1983, 28, p.229-234; Preprint JINR, E17-82-677, Dubna, 1982.
5. Makhankov V.G., Fedyanin V.K. Phys. Rep., 1984, 104, p.1.
6. а) Kartavenko V.G. JINR, P4-83-411, Dubna, 1983.
б) Barashenkov I.V., Makhankov V.G. JINR, E2-84-173, Dubna, 1984.
7. а) Makhankov V.G. Phys.Lett., 1974, 50A, p.42;
б) Preprint JINR, E5-8389, Dubna, 1974;
в) Phys. Rep., 1978, 35, p.1.
8. Кричевер И.М. Функц. анализ, 1986, т. XX, в. 2.
9. Маханьков В.Г., Катышев Ю.В., Мырзакулов Р. Препринт ОИЯИ, PI7-86-94, Дубна, 1986.
I0. Переломов А.М. УФН, I977, т. I23, в. I, с. 23.
II. Kuratsuji H., Suruki T. J. Math Phys., 1980, v.21, No3, p.472.
I2. Гочев И.Г. Препринт ОИЯИ, PI7-84-663; EI7-84-253, Дубна, I984.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1986 года.

Маханьков В.Г., Мырзакулов Р.

Р17-86-206

Обобщенные когерентные состояния и непрерывная XYZ-модель Гейзенберга с одноионной анизотропией

На основе метода обобщенных когерентных состояний /ОКС/ группы SU(2) формируется процедура сведения квантовой решеточной XYZ-модели Гейзенберга с одноионной анизотропией к континуальной классической модели Ландау - Лифшица. Выбор представления ОКС диктуется, во-первых, их близостью к соответствующим классическим состояниям и, во-вторых, близостью геометрических структур однородных пространств, на которых определены ОКС группы SU(2) и вектор магнитного момента соответствующей модели Ландау - Лифшица. В связи с этим описанная процедура сведения справедлива лишь в случае слабой анизотропии, а учет слабой одноионной анизотропии, хотя и зависит от представления ОКС, тем не менее приводит лишь к перенормировке тензора анизотропии классической модели Ландау - Лифшица.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1986

Makhankov V.G., Myrzakulov R.

P17-86-206

Generalized Coherent States and the Continuous Heisenberg XYZ Model with One-Ion Anisotropy

On the basis of the method of generalized coherent states (GCS) of the SU(2) group we formulate the reduction procedure of the quantum lattice Heisenberg XYZ model to the continuum Landau - Lifshits model. The choice of the GCS representation is determined i) by their proximity to the corresponding classical states and ii) by similarity of the geometric structure of the homogeneous spaces on which the SU(2) GCS and the vector of the magnetic moment of the corresponding Landau - Lifshits model are defined. The present reduction procedure is allowed only in the case of weak anisotropy. Accounting for a weak one-ion anisotropy leads to the Landau - Lifshits model with a renormalized anisotropy tensor. The contribution of such an anisotropy vanishes for the s = 1/2 case.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1986