

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Д-183

5/2-75

P17 - 8532

В.В.Данилов, В.А.Прейзендорф, Н.Б.Рубин

1666/2-75

К ВОПРОСУ
О ПЕРЕХОДЕ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБРАЗЦОВ
В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЕ СОСТОЯНИЕ
ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

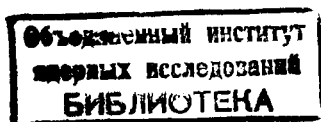
1975

P17 - 8532

В.В.Данилов, В.А.Прейзендорф, Н.Б.Рубин

К ВОПРОСУ
О ПЕРЕХОДЕ ДВУХСВЯЗНЫХ ОБРАЗЦОВ
В СВЕРХПРОВОДЯЩЕЕ СОСТОЯНИЕ
ПРИ НАЛИЧИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Направлено в журнал "Физика низких температур"



Данилов В.В., Преизендорф В.А., Рубин Н.Б.

P17 - 8532

К вопросу о переходе двухсвязных образцов в сверхпроводящее состояние при наличии магнитного поля

На основании термодинамического рассмотрения показывается, что при переходе двухсвязного образца в сверхпроводящее состояние в заданном однородном магнитном поле полный ток в образце оказывается равным нулю. Определена величина магнитного потока, захваченного образцом при этом переходе, рассчитаны некоторые частные случаи распределения замороженного магнитного потока ("шайба", тор).

Работа выполнена в Отделе новых методов ускорения ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Danilov V.V., Preizendorf V.A., Rubin N.B. P17 - 8532

On the Problem of Doubly Connected Sample Transition to the Superconducting State in the Presence of the Magnetic Field

Basing on the thermodynamical consideration it is shown that, by doubly connected sample transition to the superconducting state in a given homogeneous magnetic field, total current in a sample is equal to zero. The value of the magnetic flux captured by the sample at this transition has been determined. Some particular cases of distribution of the quenched magnetic flux ("washer", tor) are calculated.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

1. Введение

Многосвязные сверхпроводники в достаточно слабых магнитных полях обладают свойством сохранять значение магнитного потока, захваченного в момент перехода в сверхпроводящее состояние. Это свойство широко используется для создания специальных распределений магнитного поля в заданных областях, в частности, для экранирования и улучшения однородности магнитного поля ^{/1-4/}. Теоретически распределение замороженных магнитных полей рассматривалось лишь для нескольких модельных случаев ^{/2,4/}, причем величина захваченного потока считалась свободным параметром, задаваемым при постановке задачи.

В данной работе на основании термодинамического рассмотрения показывается, что при переходе двухсвязного образца в сверхпроводящее состояние в заданном однородном магнитном поле полный ток в образце оказывается равным нулю. Это дает возможность определить величину магнитного потока, захваченного при переходе, и найти распределение магнитного поля. Для простоты рассматривается случай, когда образец имеет цилиндрическую симметрию. Схема расположения элементов, входящих в рассмотрение, дана на рис. 1. При охлаждении образца в магнитном поле, меньшем первого критического для нулевой температуры, образец сначала проходит через "промежуточное" состояние, и лишь дальнейшее понижение температуры приводит к тому, что весь образец оказывается сверхпроводящим. Закон сохранения потока здесь в общем случае не выполняется. Он выполняется лишь для бесконечно тонкого кольца.

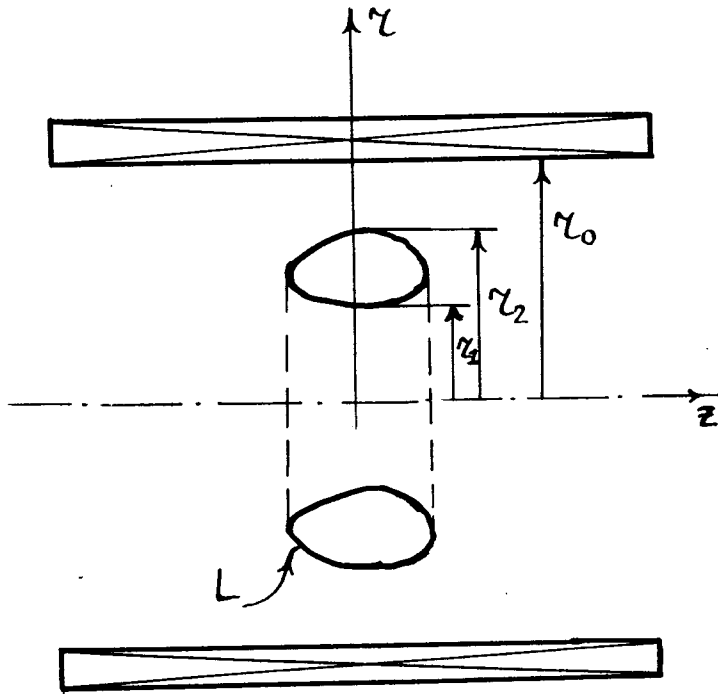


Рис. 1. Общая схема рассматриваемой задачи. L - контур границы образца, имеющего азимутальную симметрию, r_1, r_2 - внутренний и внешний радиусы образца, r_0 - радиус обмоток внешнего соленоида, создающего однородное магнитное поле $H_{вн}$.

Для решения задачи нам понадобятся некоторые термодинамические формулы, относящиеся к промежуточному состоянию. Цель использования этих формул - получить выражение для полного термодинамического потенциала Гиббса рассматриваемой системы. Вариация этого потенциала при заданном внешнем поле /заданных внешних токах/ и постоянной температуре^{/5/} позволит найти условие равновесия системы.

2. Термодинамические потенциалы для рассматриваемой системы

Свободная энергия /без учета стрикционных явлений/ в единице объема /"единичность" объема отмечается индексом "1"/ сверхпроводника, находящегося в промежуточном состоянии, выражается формулой

$$F_1 = N_1 - T \cdot S_1 + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi}, \quad /1/$$

где N_1 - полная внутренняя энергия всех электронов в единице объема /энергию отсчитываем от энергии ионного фона/, третий член - магнитная энергия в образце, S_1 - энтропия единицы объема тела, T - абсолютная температура. Сумма

$$N_1 + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi} = U_1 \quad /2/$$

есть термодинамическая внутренняя энергия единицы объема тела, включающая в себя магнитную энергию. \vec{B} и \vec{H} - соответствующим образом усредненные индукция и напряженность магнитного поля /усреднение ведется по участкам тела, большим толщины слоев в промежуточном состоянии/.

Как известно^{/5,6/},

$$\vec{B} = (1 - \rho) \cdot H_k \cdot \vec{\tau}, \quad \vec{H} = H_k \cdot \vec{\tau}, \quad /3/$$

где ρ - доля единичного объема, приходящегося на сверхпроводящее состояние; H_k - критическое поле; $\vec{\tau}$ - единичный вектор в направлении силовых линий.

Учитывая, что энергия конденсации в сверхпроводящих областях есть $(-\rho \cdot \frac{H_k^2}{8\pi})$, получим:

$$N_1 - T \cdot S_1 = N_{1n} - T \cdot S_{1n} - \rho \cdot \frac{H_k^2}{8\pi}, \quad /4/$$

где N_{1n} и S_{1n} - соответствующие величины для нормального состояния всех электронов единицы объема. Тогда выражение /1/ примет вид

$$F_1 = N_{1n} - T \cdot S_{1n} - \rho \cdot \frac{\Pi_k^2}{8\pi} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Pi}}{8\pi},$$

или, после перегруппировки членов и использования /3/,

$$F_1 = N_{1n} - T \cdot S_{1n} - \frac{\Pi_k^2}{8\pi} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Pi}}{4\pi}. \quad /5/$$

Термодинамический потенциал Гиббса* /при сделанных предположениях/ для единицы объема тела по определению есть

$$G_1 = F_1 - \frac{\vec{B} \cdot \vec{\Pi}}{4\pi} = N_{1n} - T \cdot S_{1n} - \frac{\Pi_k^2}{8\pi}. \quad /6/$$

Термодинамический потенциал Гиббса в области вне тела /индекс "e"/ равен:

$$G_{1e} = F_{1e} - \frac{\vec{B}_e \cdot \vec{\Pi}_e}{4\pi} = \frac{\vec{B}_e \cdot \vec{\Pi}_e}{8\pi}. \quad /7/$$

Здесь принято

$$U_{1e} = F_{1e} = \frac{\vec{B}_e \cdot \vec{\Pi}_e}{8\pi}. \quad /8/$$

Ввиду аддитивности термодинамического потенциала и в предположении равенства температур тела и окружающей среды получаем для всего пространства:

$$G = N_n - TS_n - \frac{\Pi_k^2}{8\pi} V - \frac{1}{8\pi} \int_{(e)} \vec{B} \cdot \vec{\Pi} \cdot dV. \quad /9/$$

V - объем тела, индекс (e) при знаке интеграла указывает, что интегрирование распространяется на "внешний" объем /исключая объем тела/; отсутствие индекса "1" при N_n и S_n означает, что соответствующие величины относятся ко всему телу.

*Некоторые формулы для используемых термодинамических потенциалов приводятся в Приложении.

** Величины, относящиеся к области самого тела, иногда будем снабжать индексом "i".

Обозначив зависящую от температуры аддитивную часть потенциала /9/ через G_T получим

$$G = G_T - \frac{1}{8\pi} \int_{(e)} \vec{B} \cdot \vec{\Pi} \cdot dV, \quad G_T = N_n - TS_n - \frac{\Pi_k^2}{8\pi} \cdot V. \quad /10/$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{(e)} \vec{H} \cdot \vec{B} \cdot dV &= \int_{(e)} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} \cdot dV = \int_{(e)} \{ \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} - \text{div} [\vec{H} \cdot \vec{A}] \} dV = \\ &= \frac{4\pi}{c} \int_{(e)} \vec{A} \cdot \vec{j}_{\text{вн}} \cdot dV - \int_{(\Sigma)} [\vec{v}_{\Sigma} \cdot \vec{H}] \cdot \vec{A} \cdot d\sigma. \end{aligned}$$

Здесь $\vec{j}_{\text{вн}}$ - плотность тока, создающего внешнее /не возмущенное телом/ магнитное поле $\vec{H}_{\text{вн}}$:

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \vec{H}_{\text{вн}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{вн}}, \quad \vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad /11/$$

\vec{A} - вектор-потенциал поля, \vec{v}_{Σ} - вектор наружной нормали к поверхности объема интегрирования, т.е. вектор, направленный по нормали к поверхности сверхпроводящего тела внутрь его, Σ - поверхность тела, $d\sigma$ - элемент поверхности тела.

Считая, что в среде магнитная проницаемость $\mu = 1$, $\vec{H} = \vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, запишем

$$G = G_T - \frac{1}{2c} \int_{(e)} \vec{A} \cdot \vec{j}_{\text{вн}} \cdot dV - \frac{1}{8\pi} \int_{(\Sigma)} \vec{A} \cdot [\vec{n}_{\Sigma} \cdot \text{rot} \vec{A}] d\sigma, \quad /12/$$

где $\vec{n}_{\Sigma} = -\vec{v}_{\Sigma}$.

Как указывалось при постановке задачи, наша система обладает цилиндрической симметрией /азимут обозначим θ /. Тогда можно ввести лишь одну ковариантную компоненту вектор-потенциала A , зависящую от полярного радиуса r и осевой координаты z и соответствующую потоку магнитного поля $\Phi(r, z)$ через круг радиуса r .

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial z},$$

$$\tilde{\Delta} \mathbf{A} = \mathbf{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} = - \frac{4\pi}{c} \mathbf{r} \cdot \mathbf{j}_{\text{ВН}},$$

$$2\pi \mathbf{A}(\mathbf{r}, z) = \Phi(\mathbf{r}, z) = \int_0^{\mathbf{r}} \mathbf{B}_z \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \cdot d\theta,$$

$$\mathbf{A}(0, z) = 0. \quad /13/$$

$\mathbf{j}_{\text{ВН}}$ - единственная /азимутальная/ компонента внешнего тока. Тогда после интегрирования по азимуту θ получим

$$G = G_T - \frac{\pi}{c} \int \frac{1}{r} \mathbf{A} \cdot \mathbf{j}_{\text{ВН}} \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \cdot dz + \frac{1}{4} \int_L \frac{1}{r\ell} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} d\ell^*, \quad /14/$$

где L - контур границы тела при $\theta = \text{Const}$ /рис. 1/, $r\ell$ - текущий полярный радиус на контуре L .

Пренебрегая толщиной обмотки соленоида, полагая

$$\mathbf{j}_{\text{ВН}} = w \cdot \mathbf{I} \cdot \delta(r - r_0), \quad /15/$$

где w - число витков катушки на 1 см ее длины, r_0 - радиус витка, I - ток в витке, и учитывая, что

$$H_{\text{ВН}} = \frac{4\pi w I}{c}, \quad /16/$$

найдем

$$G = G_T - \frac{1}{4} H_{\text{ВН}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}(r_0, z) dz + \frac{1}{4} \int_L \frac{1}{r\ell} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} d\ell, \quad /17/$$

где n - координата в направлении \vec{n} , имеющая размерность длины.

* Если по телу течет поверхностный ток, то производная $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n}$ на границе тела имеет разрыв; в формуле /14/ и далее, где это специально не оговорено, берется "внешняя" производная.

3. Условие равновесия

Как показано в /5/, термодинамическое равновесие при заданных внешних токах и температуре соответствует минимуму потенциала G . Это означает, в частности, что равновесию соответствует равенство нулю вариации δG потенциала G . Из общего выражения для вариации δG , приведенного в Приложении, непосредственно следует $\delta G = 0$ при $\delta T = 0$, $\delta H_{\text{ВН}} = 0$.

Проварьируем потенциал магнитного поля в формуле /17/, представив

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, z) = \mathbf{A}_{\text{ВН}}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}_{\text{СП}}(\mathbf{r}, z), \quad \delta \mathbf{A} = \delta \mathbf{A}_{\text{СП}}(\mathbf{r}, z), \quad /18/$$

$$\mathbf{A}_{\text{ВН}} = H_{\text{ВН}} \cdot \frac{r^2}{2}, \quad r < r_0.$$

Здесь $\mathbf{A}_{\text{ВН}}$ - потенциал, соответствующий однородному полю $H_{\text{ВН}}$ /при постоянном I потенциал $\mathbf{A}_{\text{ВН}}$ не варьируется/; $\mathbf{A}_{\text{СП}}$ - потенциал магнитного поля, создаваемого токами, текущими в сверхпроводящем теле.

$$\delta G = - \frac{H_{\text{ВН}}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}}(r_0, z) dz + \frac{1}{4} \int_L \delta \mathbf{A}_{\text{СП}} \cdot \frac{1}{r\ell} \frac{\partial (\mathbf{A}_{\text{ВН}} + \mathbf{A}_{\text{СП}})}{\partial n} \cdot d\ell +$$

$$+ \frac{1}{4} \int_L \frac{1}{r\ell} (\mathbf{A}_{\text{ВН}} + \mathbf{A}_{\text{СП}}) \frac{\partial (\delta \mathbf{A}_{\text{СП}})}{\partial n} \cdot d\ell. \quad /19/$$

Используем "внешнюю" теорему Остроградского в форме

$$2\pi \left[\int_L \frac{1}{r\ell} \psi \frac{\partial \xi}{\partial n} d\ell - \int_L \frac{1}{r\ell} \xi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\ell \right] = \int_{(e)} \frac{1}{r^2} [\xi \tilde{\Delta} \psi - \psi \tilde{\Delta} \xi] dv \quad /20/$$

и, учитывая, что во внешнем по отношению к телу объеме $\tilde{\Delta} \mathbf{A}_{\text{СП}} = \tilde{\Delta} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}} = 0$, получим

$$\delta G = - \frac{H_{\text{ВН}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}}(r_0, z) dz + \frac{1}{2} \int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{СП}}}{\partial n} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}} \cdot d\ell +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_L \frac{1}{r\ell} \cdot \delta \mathbf{A}_{\text{СП}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ВН}}}{\partial n} d\ell. \quad /21/$$

Заметим, что производная $\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ВН}}}{\partial n}$ на поверхности тела непрерывна.

Дальнейшие преобразования будем проводить для случая, когда уже весь образец перешел в сверхпроводящее состояние, т.е. когда все сверхпроводящие токи текут лишь по поверхности и $V=0$ в теле сверхпроводника $T \leq T_a$, $\Pi_k(T_a) = \Pi_{\text{ВН}}$ /.

Используя соотношение

$$\text{rot } \vec{B}_{\text{СП}} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}_{\text{СП}}, \quad /22/$$

преобразуем первый член в /21/ к виду

$$\begin{aligned} - \frac{\Pi_{\text{ВН}}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}}(\mathbf{r}_0, z) dz &= - \frac{\Pi_{\text{ВН}}}{2} \int_0^r \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \int_{-\infty}^{\infty} \delta B_{z\text{СП}}(r, z) dz = \\ &= - \pi \frac{\Pi_{\text{ВН}}}{c} \int_L \mathbf{r}^2 \delta g \cdot d\ell, \quad /23/ \end{aligned}$$

где

$$g = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \int_{\Delta n} \mathbf{j}_{\text{СП}} \cdot d\mathbf{n} = - \frac{c}{4\pi r} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \Big|_e - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \Big|_i \right) = - \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n} \Big|_e \quad /24/$$

g - циркулирующий поверхностный ток, приходящийся на единицу длины контура L , ограничивающего сечение сверхпроводящего образца; μ определяется скачком нормальной производной от \mathbf{A} на границе тела, причем "внутренняя" производная /индекс "i"/ равна нулю при $\vec{B} = 0$ внутри тела.

Вариация линейной плотности поверхностного тока в образце при $\delta \mathbf{A}_{\text{ВН}} = 0$:

$$\delta g = - \frac{c}{4\pi r} \frac{\partial(\delta \mathbf{A}_{\text{СП}})}{\partial n}.$$

Преобразуя /23/ с учетом выражения для δg при помощи теоремы Остроградского, получим, что первый член в /21/ по величине и по знаку в точности совпадает с третьим членом. Тогда

$$\delta G = \int_L \frac{1}{r\ell} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ВН}}}{\partial n} d\ell + \frac{1}{2} \int_L \frac{1}{r\ell} \delta \mathbf{A}_{\text{СП}} \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{СП}}}{\partial n} d\ell \quad /25/$$

В состоянии равновесия $\delta G = 0$. Это должно быть верно при произвольных значениях вариаций $\delta \mathbf{A}_{\text{СП}}$. Примем

$$\delta \mathbf{A}_{\text{СП}} = \text{Const.} \quad \text{Поскольку } \int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{ВН}}}{\partial n} d\ell = 0, \text{ получаем}$$

$$0 = \int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{СП}}}{\partial n} \cdot d\ell = - \frac{4\pi}{c} \int g \cdot d\ell = - \frac{4\pi}{c} I_{\text{СП}} \quad /26/$$

Таким образом, доказано, что после перехода двухсвязного образца в сверхпроводящее состояние во внешнем однородном поле полный ток в нем $I_{\text{СП}}$ оказывается равным нулю.

4. Энергетические соотношения

При переходе тела в сверхпроводящее состояние в заданном магнитном поле ($\delta \vec{H}_{\text{ВН}} = 0$) количество выделяемого тепла ΔQ определяется изменением энтальпии /аналогично изобарическому процессу/. Энтальпия имеет вид

$$W = W_e + W_i = - \int (e) \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi} dv + N_n - \frac{I_k^2}{8\pi} V + \frac{\Pi_k T}{4\pi} \frac{d\Pi_k}{dT} \int \rho dv \quad /27/$$

/см. формулы из Приложения/, V - объем тела.

Обозначим величины, относящиеся к моменту начала перехода тела в "промежуточное" состояние, индексом "а"/такое обозначение использовалось выше/:

$$\rho_a = 0, \quad \Pi_k(T_a) = \Pi_{\text{ВН}},$$

а величины, относящиеся к моменту, когда тело полностью перешло в сверхпроводящее состояние, - индексом "b":

$$\rho_b = 1, \quad B_b = 0 \quad \text{/в теле/}.$$

Можно показать, что

$$\int (e) \frac{\vec{B}_b \cdot \vec{H}_b}{8\pi} dv = \frac{H_{\text{ВН}}^2}{8\pi} V_0 + \frac{\pi H_{\text{ВН}}}{2c} \int_L g \cdot \mathbf{r}_\ell^2 \cdot d\ell, \quad /28/$$

где V_0 - объем всего пространства,

$$\int_{(e)} \frac{\vec{B}_a \cdot \vec{H}_a}{8\pi} dv = \frac{H_{BH}^2}{8\pi} (V_0 - V), \quad /29/$$

$$\Delta Q = W_b - W_a = N_n(T_b) - N_n(T_a) + \frac{H_k(T_b)}{4\pi} \cdot \frac{dH_k}{dT} \Big|_b \cdot V - \frac{1}{2} \left[\frac{H_k^2(T_b)}{4\pi} \cdot V + \frac{\pi H_{BH}}{c} \int_L gr_\ell^2 d\ell \right]. \quad /30/$$

Изменение термодинамической внутренней энергии всего пространства оказывается равным

$$U_b - U_a = \frac{\pi H_{BH}}{c} \int_L gr_\ell^2 d\ell + \Delta Q. \quad /31/$$

Следовательно, в соответствии с первым законом термодинамики совершаемая работа равна:

$$\Delta R = \frac{\pi H_{BH}}{c} \int_L g \cdot r_\ell^2 \cdot d\ell. \quad /32/$$

Прямой подсчет работы, совершаемой в обмотке внешнего соленоида при перестройке магнитного поля и изменении магнитного потока, дает

$$R_{BH} = \int_a^b \mathcal{E} \cdot I \cdot dt = - \int_a^b I \cdot \frac{w}{c} \cdot \frac{d\Phi(r_0, z)}{dt} dz \cdot dt = - \frac{2\pi w}{c} I \cdot \int_{-\infty}^{\infty} A_{сп}(r_0, z) dz = - \frac{\pi H_{BH}}{c} \int_L g \cdot r_\ell^2 d\ell. \quad /33/$$

Здесь \mathcal{E} - наводимая в витках обмотки э.д.с. /при преобразованиях использованы вычисления, аналогичные тем, которые проводились при получении /23/, предполагалось также, что ток $I = \text{Const}$, т.е. работает стабилизация/.

Таким образом, как и следовало ожидать,

$$R_{BH} = -\Delta R. \quad /34/$$

Изменение свободной энергии для всего пространства имеет вид

$$F_b - F_a = [N_n(T_b) - N_n(T_a)] - [T_b S_n(T_b) - T_a S_n(T_a)] - \frac{1}{2} \left[\frac{H_k^2(T_b)}{4\pi} \cdot V - \frac{\pi H_{BH}}{c} \int_L gr_\ell^2 d\ell \right]. \quad /35/$$

В предельных случаях /примеры будут даны ниже/, когда после перехода образца в сверхпроводящее состояние поле вне образца не искажается, промежуточное состояние отсутствует и $T_a = T_b$, тогда должно быть: $F_b - F_a = \Delta R$ /в изотермическом процессе разность свободных энергий есть работа* /. Из сравнения двух выражений для работы ΔR следует, что в этих предельных случаях /при $T_a = T_b$ /:

$$- \frac{\pi H_{BH}}{c} \int_L gr_\ell^2 d\ell = \frac{H_{BH}^2}{4\pi} V. \quad /36/$$

Это получается и из непосредственного подсчета /28/ при

$$\int_{(e)} \frac{\vec{B}_b \cdot \vec{H}_b}{8\pi} = \frac{H_{BH}^2}{8\pi} (V_0 - V). \quad /37/$$

Тогда

$$\Delta R = F_b - F_a = - \frac{H_k^2}{4\pi} V,$$

$$\Delta Q = W_b - W_a = \frac{H_k}{4\pi} \cdot \frac{dH_k}{dT} V,$$

$$U_b - U_a = \Delta R + \Delta Q. \quad /38/$$

* В общем случае неизотермического процесса изменение свободной энергии не есть работа. Тогда при $H_{BH} = \text{Const}$ работа вычисляется из

$$\Delta R = \Delta U - \Delta W, \quad \Delta U = U_b - U_a, \quad \Delta W = W_b - W_a.$$

Получился физически ясный результат. В работу пошла двойная энергия конденсации: собственно энергия конденсации и равная ей в данном случае энергия внешнего поля в объеме образца.

4. Распределение магнитного поля и токов

Сверхпроводящему состоянию тела соответствует постоянство потенциала $A = \text{Const}$ в его объеме, т.е. $\vec{V} = 0$ в этом объеме. Обозначим константу через C и учтем, что

$$A_{\text{вн}}|_L = \frac{H_{\text{вн}}}{2} r_\rho^2 \quad / \text{индекс } L \text{ указывает, что речь идет}$$

о поверхности тела/. Тогда уравнение для определения магнитного поля вне тела и граничное условие будут иметь вид

$$\tilde{\Delta} A_{\text{сн}} = 0, \quad A_{\text{сн}}|_L = C - \frac{H_{\text{вн}}}{2} r_\rho^2, \quad /39/$$

где C пока не определено, причем

$$C = \frac{1}{2\pi} \Phi_{\text{вм}}, \quad /40/$$

где $\Phi_{\text{вм}}$ - "вмороженный" поток магнитного поля /см. /13// через отверстие данного тела. Разобьем решение задачи на две части, положив

$$A_{\text{сн}} = A^{(0)} + A^{(1)}. \quad /41/$$

Тогда

$$\tilde{\Delta} A^{(0)} = 0, \quad A^{(0)}|_L = C,$$

$$\tilde{\Delta} A^{(1)} = 0, \quad A^{(1)}|_L = -\frac{H_{\text{вн}}}{2} r_\rho^2, \quad /42/$$

причем

$$A^{(0)}|_\infty = A^{(1)}|_\infty = 0.$$

Введем нормализованные решения соответствующих уравнений X и Y :

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} X &= 0, & X|_L &= 1, \\ \tilde{\Delta} Y &= 0, & Y|_L &= r_\rho^2. \end{aligned} \quad /43/$$

/Для внутренней области тела, очевидно, $X = 1$; $Y = r^2$ /. Тогда искомым потенциал

$$A_{\text{сн}}(r, z) = C \cdot X(r, z) - \frac{H_{\text{вн}}}{2} \cdot Y(r, z). \quad /44/$$

Функции X и Y зависят лишь от геометрии сверхпроводящего образца и для конкретных задач могут быть найдены численным или аналитическим методом.

Найдем на основе полученного выше условия равновесия константу C :

$$\begin{aligned} 0 = I_{\text{сн}} &= -\frac{c}{4\pi L} \int \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial A_{\text{сн}}}{\partial n} d\ell = -\frac{c}{4\pi L} \int \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial X}{\partial n} \cdot d\ell + \\ &+ \frac{H_{\text{вн}}}{2 L} \int \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial Y}{\partial n} d\ell. \end{aligned} \quad /45/$$

Тогда

$$C = \frac{1}{2} H_{\text{вн}} \cdot \frac{\int \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial Y}{\partial n} \cdot d\ell}{\int \frac{1}{r_\rho} \frac{\partial X}{\partial n} \cdot d\ell}. \quad /46/$$

Для тела в виде линейного контура радиуса \bar{r} функция $Y = \bar{r}^2 \cdot X$, и мы получаем

$$C^{(\text{лин})} = \frac{H_{\text{вн}} \cdot \bar{r}^2}{2}; \quad \Phi_{\text{вм}}^{(\text{лин})} = H_{\text{вн}} \cdot \pi \cdot \bar{r}^2, \quad /47/$$

что совпадает с потоком внешнего поля через контур. В общем случае вмороженный поток

$$\Phi_{\text{ВМ}} = H_{\text{ВН}} \cdot \pi \frac{\int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial Y}{\partial n} d\ell}{\int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial X}{\partial n} d\ell} \quad /48/$$

Решив чисто электродинамические задачи /43/, найдя затем C из /46/, мы определим $A_{\text{СП}}$ во всем пространстве, а соответственно и распределение поверхностных токов, отнесенных к единице длины контура в сверхпроводящем теле:

$$g(r, z) = -\frac{c}{4\pi r} \frac{\partial A}{\partial n}, \quad A = A_{\text{СП}} + H_{\text{ВН}} \cdot \frac{r^2}{2} \quad /49/$$

/заметим, что $\int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial A_{\text{ВН}}}{\partial n} d\ell - \int_L \frac{dr}{dn} d\ell = 0$ /.

Если мы знаем вмороженный поток, то нетрудно решить также задачу о токе $I'_{\text{СП}}$, который возникает в двухсвязном сверхпроводящем теле после выключения внешнего поля. Здесь работает закон сохранения потока. Тогда

$$A'_{\text{СП}}(r, z) = \frac{\Phi_{\text{ВМ}}}{2\pi} X(r, z), \quad g' = -\frac{c\Phi_{\text{ВМ}}}{8\pi^2 r\ell} \frac{\partial X}{\partial n}(r, z),$$

$$I'_{\text{СП}} = \frac{c\Phi_{\text{ВМ}}}{8\pi^2} \int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial X}{\partial n} d\ell. \quad /50/$$

Вычисление магнитной энергии в этом случае дает*:

$$U_{\text{М}} = U - N = -\frac{8\pi^2}{\int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial X}{\partial n} d\ell} \frac{(I'_{\text{СП}})^2}{2c^2}. \quad /51/$$

То есть величина

* Во избежание недоразумений отметим, что формула /28/ /см. выше/ получена в предположении $H_{\text{ВН}} \neq 0$, $I'_{\text{СП}} = 0$ и, следовательно, здесь неприменима.

$$-\frac{8\pi^2}{\int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial X}{\partial n} d\ell} = \mathcal{L} \quad /52/$$

играет роль самоиндукции образца.

Тогда наведенный ток $I'_{\text{СП}}$ из /50/ выражается обычной формулой

$$I'_{\text{СП}} = c\Phi_{\text{ВМ}} \cdot \mathcal{L}^{-1}. \quad /53/$$

Рассмотрим задачу в иной постановке. Пусть сначала образец переведен в сверхпроводящее состояние и имеет температуру $T_1 < T_k$ | $H_{\text{ВН}} = 0$, а затем включается поле,

которое достигает значения $H_{\text{ВН}}$, меньшего чем поле, которое при $T = T_1$ переводит /хотя бы частично/ образец в нормальное состояние. В этом случае из закона сохранения потока получаем:

$$\Phi_{\text{ВМ}} = 2\pi C = 0, \quad g''(r, z) = \frac{cH_{\text{ВН}}}{8\pi r\ell} \frac{\partial Y}{\partial n},$$

$$I''_{\text{СП}} = \frac{c \cdot H_{\text{ВН}}}{8\pi} \int_L \frac{1}{r\ell} \frac{\partial Y}{\partial n} d\ell, \quad A''_{\text{СП}} = -\frac{H_{\text{ВН}}}{2} Y(r, z). \quad /54/$$

$I''_{\text{СП}}$ - ток в образце, наведенный в этом случае. Из /50/ и /54/ с учетом выражения для вмороженного потока получаем

$$I'_{\text{СП}} = -I''_{\text{СП}}. \quad /55/$$

Подчеркнем, что в состоянии, соответствующем току $I'_{\text{СП}}$, внешнее магнитное поле отсутствует, тогда как в состоянии с током $I''_{\text{СП}}$ оно есть. Данный результат - прямое следствие полученного выше из условия равновесия /24/ выражения для $\Phi_{\text{ВМ}}$. Это справедливо для произвольного двухсвязного тела, обладающего цилиндрической симметрией.

6. Примеры расчета

а/ Численный метод

Для нахождения нормированных решений X и Y внешней задачи уравнения Лапласа численным методом перейдем к интегральным уравнениям.

Для этого воспользуемся формулой, дающей выражение для векторного потенциала через заданные финитные токи и отвечающей условию $A|_{\infty} = 0$ /6/. В нашем случае эта формула выглядит так:

$$A_{\text{CH}} = \frac{r}{c} \int_L g \cdot r_{\ell} \cdot d\ell \int_0^{2\pi} \frac{d\theta \cdot \cos\theta}{R}, \quad /56/$$

где R - расстояние между точкой наблюдения и элементом интегрирования /точкой источника/. Введем обозначения для "нормированных" линейных токов:

$$g_X = -\frac{c}{4\pi r} \left(\frac{\partial X}{\partial n} \Big|_c - \frac{\partial X}{\partial n} \Big|_i \right) = -\frac{c}{4\pi r} \frac{\partial X}{\partial n} \Big|_c, \quad /57/$$

$$g_Y = -\frac{c}{4\pi r} \left(\frac{\partial Y}{\partial n} \Big|_c - \frac{\partial Y}{\partial n} \Big|_i \right) = -\frac{c}{4\pi r} \left(\frac{\partial Y}{\partial n} \Big|_c - 2r \frac{\partial r}{\partial n} \right).$$

Тогда сверхпроводящий ток, приходящийся на единицу длины контура границы L , будет равен

$$g = g_X \cdot \frac{\Phi_{\text{BM}}}{2\pi} - g_Y \cdot \frac{H_{\text{BH}}}{2}, \quad /58/$$

а для g_X и g_Y получим интегральные уравнения:

$$1 = \frac{r_s}{c} \int_L g_X \cdot r_{\ell} \cdot d\ell \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{R_{\ell s}}, \quad /59/$$

$$1 = \frac{1}{cr_s} \int_L g_Y \cdot r_{\ell} \cdot d\ell \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{R_{\ell s}},$$

где

$$R_{\ell s} = \sqrt{r_{\ell}^2 + r_s^2 + (z_{\ell} - z_s)^2 - 2r_{\ell}r_s \cos\theta}. \quad /60/$$

В этих формулах индекс "s" соответствует произвольной фиксированной точке на контуре L , азимут θ отсчитывается от плоскости, проходящей через ось и точку наблюдения. Нормированные решения X и Y , определяющие поле во всем пространстве /см. /44/ и /18//, выражаются через g_X и g_Y следующим образом:

$$X(r, z) = \frac{r}{c} \int_L g_X r_{\ell} \cdot d\ell \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{R}; Y = \frac{r}{c} \int_L g_Y r_{\ell} \cdot d\ell \int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta \cdot d\theta}{R}, \quad /61/$$

соответственно

$$\Phi_{\text{BM}} = H_{\text{BH}} \cdot \pi \frac{\int_L g_Y \cdot d\ell}{\int_L g_X \cdot d\ell}. \quad /62/$$

В предельном случае двухсвязного тела в виде бесконечного полого кругового цилиндра с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2 равенство нулю магнитного поля в теле цилиндра означает:

$$g(r_2) = -I \cdot w = -\frac{cH_{\text{BH}}}{4\pi}. \quad /63/$$

Из условий отсутствия полного тока следует:

$$g(r_1) = I \cdot w = \frac{cH_{\text{BH}}}{4\pi}. \quad /64/$$

Тогда замороженный поток имеет вид

$$\Phi_{\text{BM}} = \pi r_1^2 H_{\text{BH}}. \quad /65/$$

Работа выражается формулой

$$\Delta R = \frac{\pi H_{\text{BH}}^2}{c} \int_L g \cdot r_{\ell}^2 \cdot d\ell = \frac{H_{\text{BH}}^2}{4\pi} [\pi r_2^2 - \pi r_1^2] \cdot Z = -\frac{H_{\text{BH}}^2}{4\pi} V, \quad /66/$$

где $Z \rightarrow \infty$ - длина цилиндра. Тепло ΔQ в данном случае равно:

$$\Delta Q = \frac{H_k}{4\pi} \frac{dH_k}{dT} V, \quad H_k = H_{BH} \quad /67/$$

Очевидно, $\Delta Q < 0$, то есть при этом тепло выделяется. Здесь $T_a = T_b$, т.е. промежуточное состояние отсутствует, поскольку поле в окрестности бесконечного цилиндра не искажилось. Для цилиндра без отверстия результат можно найти у Де Жена ^{/5/}.

Уравнения /59/ и /60/, являясь интегральными уравнениями Фредгольма 1-го рода, относятся к классу "некорректных" задач. Поэтому обычно попытка численно решить их сведением к линейной алгебраической системе приводит к неустойчивым решениям ввиду плохой обусловленности системы и малости ее детерминанта. Для получения устойчивого решения подобных уравнений разработаны регуляризующие алгоритмы ^{/7,8/}.

Однако в данном случае уравнения /59/ и /60/ удалось решить сведением к линейной алгебраической системе, используя так называемое явление саморегуляризации ^{/9/}. Оно связано с тем, что точки наблюдения и интегрирования в /59/ и /60/ принадлежат одному контуру и ядро этих уравнений имеет логарифмическую особенность при совпадении этих точек. В результате диагональные элементы системы превосходят по величине все остальные, определитель отличен от нуля и решение устойчиво.

Интеграл по контуру L в /59/ и /60/ разбивается на сумму m интегралов по элементарным контурам ℓ_i . Плотность тока в пределах такого элементарного контура считается постоянной и выносится из-под интеграла. Уравнение записывается для m точек наблюдения, принадлежащих различным элементарным контурам. В результате получаем следующую линейную алгебраическую систему:

$$\sum_{i=1}^m \bar{g}_i \int_{\ell_i} r_{\ell_i} d\ell_i \int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta \cdot d\theta}{R_{\ell_i s_j}} = f_j; \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad /68/$$

Здесь \bar{g}_i и f_j равны g_{xi} и $\frac{c}{r_{sj}}$ для /59/ и g_{yi} и cr_{sj} для /60/.

Каждое уравнение в /68/ интегрировалось по объему

j -го элементарного контура, чтобы исключить зависимость решения от расположения точки наблюдения в пределах контура. После этого интегрирования коэффициенты при g_i в /68/ представляют собой коэффициенты самоиндукции и взаимной индукции соответствующих контуров, что позволяет широко использовать справочные данные по этим коэффициентам /см., например, /10/ /.

Были решены задачи для геометрии, показанной на рис. 2, с параметрами 1/ $r_1 = 5$ см; $r_2 = 15$ см; $Z = 40$ см; 2/ $r_1 = 5$ см; $r_2 = 15$ см; $Z = 10$ см. В первом примере $\Phi_{BM} = H_{BH} \cdot \pi r_{\Phi}^2$, $r_{\Phi} = 5,75$ см.

Значения плотностей тока на единицу длины в точках А и Д /см. рис. 2/ равны $g_A = -2,6 \cdot 10^9 \cdot H_{BH}$ /здесь и далее используются единицы CGS /, $g_D = 3,2 \cdot 10^9 \cdot H_{BH}$. Для рассмотренного выше предельного случая бесконечного цилиндра $g_A = -g_D = -2,4 \cdot 10^9 \cdot H_{BH}$. Результат первого примера близок к результату для бесконечного цилиндра.

Во втором примере $r_{\Phi} = 6,7$ см; $g_A = -3,2 \cdot 10^9 \cdot H_{BH}$; $g_D = 4,2 \cdot 10^9 \cdot H_{BH}$. Здесь уже имеется существенное отличие от предельного случая.

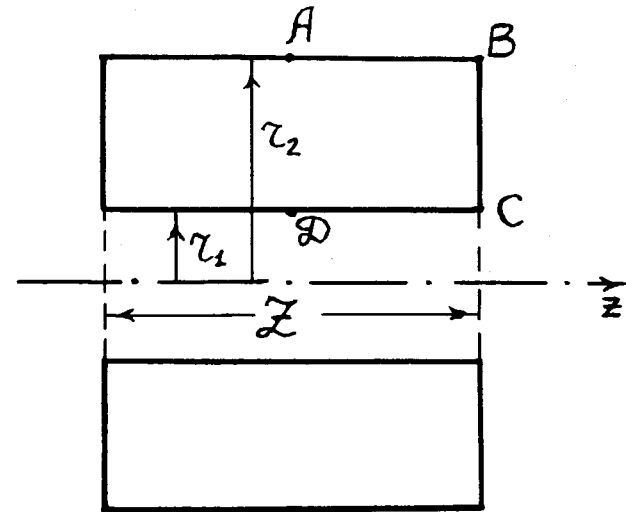


Рис. 2. Образец в виде "шайбы".

Б/ Аналитическое рассмотрение для тора круглого сечения

Если образец имеет форму тора круглого сечения /рис. 3/, то переход к тороидальным координатам /11,12/ позволяет получить аналитическое выражение для функций X и Y, которые, как отмечалось, дают решение рассматриваемой задачи о переходе образца в сверхпроводящее состояние в заданном внешнем поле. Формулы перехода от цилиндрической (r, θ, z) системы координат к тороидальной (η, ω, φ) имеют вид

$$\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 \eta} = (r - a \cdot \operatorname{cth} \eta)^2 + z^2; \quad \frac{a^2}{\sin^2 \omega} = r^2 + (z - a \cdot \operatorname{ctg} \omega)^2, \quad /69/$$

либо для обратного перехода

$$r = a \cdot \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \eta - \cos \omega}, \quad z = a \cdot \frac{\sin \omega}{\operatorname{ch} \eta - \cos \omega}, \quad /70/$$

где $a = \sqrt{R_0^2 - \rho_0^2}$, R_0, ρ_0 - параметры тороида /рис. 3/. В тороидальных координатах поверхность тороида соответствует координатной поверхности $\eta = \eta_0 = \text{Const}$, где

$$\eta_0 = \ln \left(\frac{R_0 + a}{\rho_0} \right), \text{ и тогда}$$

$$\rho_0 = \frac{a}{\operatorname{sh} \eta_0}, \quad R_0 = a \cdot \operatorname{cth} \eta_0, \quad \operatorname{ch} \eta_0 = \frac{R_0}{\rho_0}. \quad /71/$$

Внутренняя область тороида соответствует координатной области $\eta_0 \leq \eta < \infty; 0 \leq \omega, \phi < 2\pi$. Вне тороида

$$0 \leq \eta \leq \eta_0; \quad 0 \leq \omega, \phi < 2\pi. \quad /72/$$

Вид функции X можно определить из решения, полученного Фоком /11/ в задаче о скин-эффекте для тороидального образца:

$$X = \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)}} \cdot P_X(\eta, \omega), \quad /73/$$

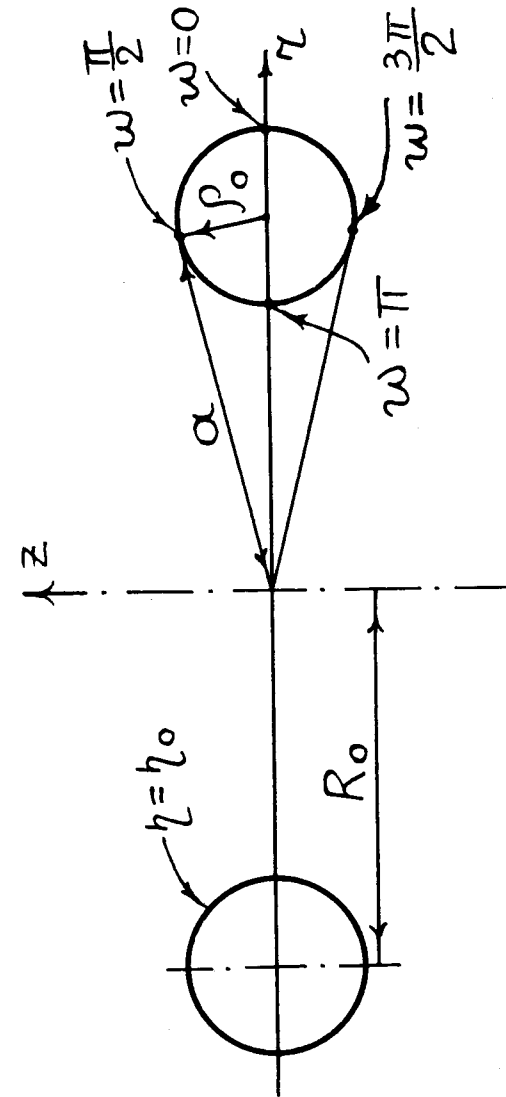


Рис. 3. Образец в виде тора круглого сечения.

где $P_X = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) \frac{q_n(\eta_0)}{f_n(\eta_0)} f_n(\eta) \cos n\omega = P_{Xe}, 0 \leq \eta \leq \eta_0,$ /74/

$$P_X = \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) q_n(\eta) \cos n\omega = P_{Xi}, \eta \geq \eta_0.$$

Здесь

$$\delta_{0n} = \begin{cases} 1, & \text{для } n = 0, \\ 0, & \text{для } n \neq 0, \end{cases}$$

$q_n(\eta), f_n(\eta)$ - полная система тороидальных функций, определяемых интегральными представлениями /11/:

$$q_n(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)} \cdot \cos n\omega \cdot d\omega, /75/$$

$$f_n(\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi-\eta}^{+\eta} \sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \cos t)} \cdot \operatorname{ch} nt \cdot dt.$$

Решение уравнения /43/ для Y получим, воспользовавшись этой системой функций (g_n, f_n) и удовлетворяя заданному граничному условию /43/:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)}} \cdot P_Y(\eta, \omega), /76/$$

где

$$P_Y = -4a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) (n^2 - \frac{1}{4}) q_n(\eta) \cos n\omega = P_{Yi}, \eta \geq \eta_0, /77/$$

$$P_Y = -4a^2 \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) (n^2 - \frac{1}{4}) \frac{q_n(\eta_0)}{f_n(\eta_0)} f_n(\eta) \cos n\omega = P_{Ye}, 0 \leq \eta \leq \eta_0.$$

Используя полученный выше результат /26/ о равенстве нулю полного тока после перехода образца в сверхпроводящее состояние и выражения /74-77/, можно, в частности, получить:

$$\Phi_{BM} = -4\pi a^2 H_{BH} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (2 - \delta_{0n}) \frac{q_n(\eta_0)}{f_n(\eta_0)} \right\} \cdot \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{n^2 - \frac{1}{4}} \frac{q_n(\eta_0)}{f_n(\eta_0)} \right\}^{-1}, /78/$$

$$g_X = - \frac{c}{8\sqrt{2}\pi^3} \frac{\Phi_{BM}}{a^2} (\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{n^2 - \frac{1}{4}} \frac{\cos n\omega}{f_n(\eta_0)},$$

$$g_Y = - \frac{c}{8\sqrt{2}\pi^2} H_{BH} (\operatorname{ch} \eta - \cos \omega)^{3/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{f_n(\eta_0)} \cdot \cos n\omega, /79/$$

$$\Delta R = a^3 \cdot \operatorname{sh} \eta_0 \cdot H_{BH}^2 \cdot \left\{ \frac{\Phi_{BM}}{2\pi a^2 H_{BH}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{n^2 - \frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{f_n(\eta_0)} \cdot \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \frac{dq_n}{d\eta} \right] - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 - \delta_{0n}}{f_n(\eta_0)} \frac{d}{d\eta} \left[\frac{1}{\operatorname{sh} \eta} \cdot \frac{dq_n}{d\eta} \right] \right\}. /80/$$

Здесь общие выражения для $\Phi_{BM}, g_X, g_Y, \Delta R$ даются формулами /48/, /57/, /32/. Для предельного случая тонкого тороида $\rho_0/R_0 \ll 1$ получим:

$$\Phi_{BM} \approx \pi H_{BH} \cdot R_0^2 \cdot \left[1 - \left(\ln \frac{8R_0}{\rho_0} - 1 \right) \cdot \left(\frac{\rho_0}{R_0} \right)^2 \right], /81/$$

$$\Delta R \approx - \frac{\pi R_0^3 \cdot H_{BH}^2}{\ln(8R_0/\rho_0) - 2} \text{ в нулевом приближении по } \left(\frac{\rho_0}{R_0} \right), /82/$$

Формула /81/ сравнивалась с результатами численного расчета для $\rho_0 = 5 \text{ см}$ и $R_0 = 100 \text{ см}$ /при этих параметрах поправочный член в /81/ равен 10^{-2} /. Результаты совпали с относительной точностью $2 \cdot 10^{-5}$ / $r_{\text{эф}} = 99,5 \text{ см}$ /. При $\rho_0 = 5 \text{ см}$ и $R_0 = 10 \text{ см}$ численный расчет дает $r_{\text{эф}} = 7,39 \text{ см}$, а формула /81/ - $r_{\text{эф}} = 7,46 \text{ см}$.

То есть даже при $\frac{\rho_0}{R_0} = 1/2$ эта формула дает удовлетворительную точность.

Авторы искренне благодарят А.Б.Кузнецова и Л.Л.Зинovieву за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые формулы для используемых термодинамических величин /без учета стрикционных явлений/

U - внутренняя энергия,

$F = U - TS$ - свободная энергия,

$G = U - TS - \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv$ - термодинамический потенциал Гиббса /аналог/,

$W = U - \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \cdot \vec{H} dv$ - энтальпия /аналог/.

Смысл названий двух последних потенциалов отвечает формальной замене давления на \vec{H} и объема на \vec{B} в обычных определениях этих потенциалов.

Вариации потенциалов имеют вид

$$\delta U = T \cdot \delta S + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dv = T \cdot \delta S + \int \vec{\Pi}_{\text{BH}} \cdot \left(\delta \vec{M} + \frac{\delta \vec{\Pi}_{\text{BH}}}{4\pi} \right) dv,$$

$$\delta F = -S \cdot \delta T + \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dv = -S \cdot \delta T + \int \vec{\Pi}_{\text{BH}} \cdot \left(\delta \vec{M} + \frac{\delta \vec{\Pi}_{\text{BH}}}{4\pi} \right) dv,$$

$$\delta G = -S \cdot \delta T - \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \cdot \delta \vec{H} dv = -S \cdot \delta T - \int \left(\vec{M} + \frac{\vec{\Pi}_{\text{BH}}}{4\pi} \right) \delta \vec{\Pi}_{\text{BH}} \cdot dv,$$

$$\delta W = T \cdot \delta S - \frac{1}{4\pi} \int \vec{B} \cdot \delta \vec{H} dv = T \cdot \delta S - \int \left(\vec{M} + \frac{\vec{\Pi}_{\text{BH}}}{4\pi} \right) \delta \vec{\Pi}_{\text{BH}} \cdot dv.$$

Здесь $\vec{M} = \frac{1}{4\pi} (\vec{B} - \vec{H}) \cdot \vec{\Pi} \neq \vec{\Pi}_{\text{BH}}$ в общем случае. Вариации,

относящиеся к единице объема, соответствуют первой форме записи, приведенной выше.

Элементарные работа δR и тепло δQ имеют вид

$$\delta R = \frac{1}{4\pi} \int \vec{H} \cdot \delta \vec{B} dv, \quad \delta Q = T \cdot \delta S.$$

Далее идут формулы для отнесенных к единице объема величин в области, занимаемой телом /образцом/, на-

ходящимся в промежуточном состоянии /обозначения введены ранее, индекс "s" указывает, что величина относится к сверхпроводящему состоянию/:

$$U_1 = N_1 + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{8\pi}; \quad N_1 = N_{1n} - \rho \left(\frac{H_k^2}{8\pi} - \frac{H_k \cdot T}{4\pi} \frac{dH_k}{dT} \right);$$

$$dN_1 = T \cdot dS_1 - \frac{H_k^2}{8\pi} d\rho; \quad dN_{1n} = T \cdot dS_{1n};$$

$$U_1 = N_{1n} - \frac{H_k^2}{8\pi} + \rho \frac{H_k \cdot T}{4\pi} \cdot \frac{dH_k}{dT} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{4\pi};$$

$$S_1 = (1 - \rho) S_{1n} + \rho \cdot S_{1s}; \quad S_{1n} - S_{1s} = - \frac{H_k}{4\pi} \cdot \frac{dH_k}{dT};$$

$$F_1 = N_{1n} - \frac{H_k^2}{8\pi} - T \cdot S_{1n} + \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{4\pi}; \quad G_1 = N_{1n} - \frac{H_k^2}{8\pi} - T \cdot S_{1n};$$

$$W_1 = N_{1n} - \frac{H_k^2}{8\pi} + \rho \cdot \frac{H_k \cdot T}{4\pi} \cdot \frac{dH_k}{dT}.$$

Литература

1. A.F.Hildebrandt, H.Wahlquist, D.D.Elleman. *J.Appl.Phys.*, 33, 1798 (1962).
2. W.L.Williams. M.J.Stephen, C.T.Lane. *Phys.Lett.*, 9, 102 (1964).
3. W.O.Hamilton. *Rev.Phys.Appl.*, 5, 41 (1970).
4. С.П.Бондаренко, В.П.Шеремет, С.С.Виноградов. *ЖТФ*, 43, 2273 /1973/.
5. П.Де Жен. *Сверхпроводимость металлов и сплавов*. Москва, Мир, 1968.
6. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*, Москва, 1957.
7. А.Н.Тихонов. *ДАН СССР*, 151, 501 /1963/.
8. А.Н.Тихонов. *ДАН СССР*, 153, 49 /1963/.

9. В.И.Дмитриев, Е.В.Захаров. Вычислительные методы и программирование. Вып. 8, МГУ, 49 /1968/.
10. П.Л.Калантаров, Л.А.Цейтлин. Расчет индуктивностей. Госэнергоиздат, Ленинград, 1955.
11. В.А.Фок. *Phys. Zs. d. Sowjetunion*, 1, 215 (1932).
12. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике. Наука, Москва, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 января 1975 года.