сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-85-961

М.Т.Тураев*, А.С.Шумовский, В.И.Юкалов

СВЕРХИЗЛУЧЕНИЕ В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ДИПОЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

* Институт ядерной физики АН УзССР

1985

В работах [1-3] была построена точная иерархия кинетических уравнений для сверхизлучательной системы, представляющей собой систему из N двухуровневых атомов одного сорта в среде. Вместе с тем, безусловный интерес представляет изучение многокомпонентных двухуровневых систем, состоящих из центров разных сортов. В таких системах наличие взаимодействия между компонентами может привести к существенному изменению параметров, определяющих генерацию. В равновесном случае, например, подобное взаимодействие приводит к повышению температуры фазового перехода в состояние со спонтанной поляризацией системы [4].

В этой связи в настоящей работе мы исследуем процесс сверхизлучения в двухуровневой системе, содержащей две компоненты, характеризуемые дипольными моментами. Гамильтониан рассматриваемой системы можно представить в виде:

$$H = H_{S-I} + H_{ph} + H_{I-ph} + H_{S-ph}, \qquad /1/$$

где энергия среды описывается оператором

$$H_{S-I} = \sum_{r,r'} g(S_r^+ I_{r'}^- + I_{r'}^+ S_r^-) + \hbar \sum_r \Omega_r S_r^z + \hbar \sum_{r'} \Omega'_{r'} I_{r'}^z , \qquad /2/$$

$$S_r^{\pm} = S_r^x \pm i S_r^y, \qquad S^{\alpha} = \sum_{r=1}^{N} S_r^{\alpha}, \qquad (\alpha = x, y, z), \qquad /3/$$

$$I_{r'}^{\pm} = I_{r'}^x \pm i I_{r'}^y, \qquad I^{\alpha} = \sum_{r'=1}^{N} I_{r'}^{\alpha} . \qquad /4/$$

Оператор H_{ph} соответствует энергии свободного электромагнитного поля

$$H_{ph} = \sum_q \hbar\omega_q \left(a_q^+ a_q + \frac{1}{2}\right), \qquad /5/$$

где a_q^+, a_q - операторы рождения и уничтожения фотонов с волновым вектором $\vec{q}$ и поляризацией $\vec{e}$.

Взаимодействия дипольных систем с полем излучения задаются операторами H_{I-ph} и H_{S-ph}:

$$H_{I-ph} = \sum_{q,r'} i\lambda_{qx}\left(a_q^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}'} + a_q e^{i\vec{q}\vec{r}'}\right) I_{r'}^x + \sum_{q,r'} i\lambda_{qy}\left(a_q^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}'} + a_q e^{i\vec{q}\vec{r}'}\right) I_{r'}^y , \qquad /6/$$

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

$$H_{S-ph} = \sum_{q,r} i\mu_{qx}\,(a_q^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}} + a_q e^{i\vec{q}\vec{r}})\,S_r^x + \qquad /7/$$

$$+ \sum_{q,r} i\mu_{qy}\,(a_q^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}} + a_q e^{i\vec{q}\vec{r}})\,S_r^y .$$

Здесь

$$\begin{cases} \lambda_{qx} = \dfrac{1}{\sqrt{N}}\left(\dfrac{2\pi\hbar c\rho}{q}\right)^{1/2}(q_y e_{qz} - q_z e_{qy}), \\ \lambda_{qy} \equiv \dfrac{1}{\sqrt{N}}\left(\dfrac{2\pi\hbar c\rho}{q}\right)^{1/2}(q_z e_x + q_x e_z), \end{cases} \qquad /8/$$

$$\mu_{qx} = \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{2\pi\hbar c\rho'}{q}\right)^{1/2}(q_y e'_{qz} - q_z e'_{qz}), \qquad /9/$$

$$\mu_{qy} \equiv \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\frac{2\pi\hbar c\rho'}{q}\right)^{1/2}(q_z e'_x + q_x e'_{qz}).$$

Здесь $\vec{e}_\alpha$ - единичный вектор поляризации, ρ и ρ'-плотности излучателей соответствующих подсистем.

Следуя [5], построим обобщенное кинетическое уравнение для рассматриваемой системы с гамильтонианом /1/. Динамические свойства этой системы можно описать с помощью неравновесного оператора D_t, удовлетворяющего уравнению Лиувилля

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}D_t = [H, D_t], \qquad /10/$$

при начальных условиях:

$$D_{t_0} = \rho(S)\otimes D(\mathcal{I}), \qquad D(\mathcal{I}) = Z^{-1}\exp(-\beta H(\mathcal{I})), \qquad /11/$$

где

$$Z = \mathop{\mathrm{Tr}}_{(\mathcal{I})}\exp(-\beta H(\mathcal{I})), \quad \mathop{\mathrm{Tr}}_{(S)}\rho(S) = 1, \quad \mathop{\mathrm{Tr}}_{(\mathcal{I})}D(\mathcal{I}) = 1. \qquad /12/$$

Как видно, принятое начальное условие соответствует тому положению, когда в момент времени $t = t_0$ фотонное поле $\mathcal{I}$ находится в состоянии статистического равновесия с обратной температурой β, и в этот же момент включено взаимодействие его с динамической системой S, характеризуемой равновесным статистическим оператором $\rho(S)$.

Так как из /11/ и /12/ следует, что

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{(S,\mathcal{I})} D_t = \mathop{\mathrm{Tr}}_{(S,\mathcal{I})} D_{t_0},$$

то

$$\mathop{\mathrm{Tr}}_{(S,\mathcal{I})} D_t = \mathop{\mathrm{Tr}}_{(S)}\rho(S)\,\mathop{\mathrm{Tr}}_{(\mathcal{I})}D(\mathcal{I}) = 1,$$

и мы имеем обычную нормировку для статистического оператора дипольной $(S,\mathcal{I})$ системы.

Введем представление Гейзенберга для динамической величины $\mathfrak{U}(S,\mathcal{I})$, заданной в представлении Шредингера, выражением

$$\mathfrak{U}(S_t,\mathcal{I}_t) = U^{-1}(t,t_0)\,\mathfrak{U}(S,\mathcal{I})\,U(t,t_0),$$

где унитарный оператор $U(t,t_0)$ удовлетворяет уравнению

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U(t,t_0) = HU(t,t_0), \qquad U(t_0,t_0) = 1.$$

Для среднего значения оператора $\mathfrak{U}(t,S,\mathcal{I})$ в момент времени t имеем

$$\langle\mathfrak{U}\rangle_t = \mathop{\mathrm{Tr}}_{(S,\mathcal{I})}\mathfrak{U}(t,S,\mathcal{I})D_t =$$

$$= \mathop{\mathrm{Tr}}_{(S,\mathcal{I})}\mathfrak{U}(t,S,\mathcal{I})U(t,t_0)D_{t_0}U^{-1}(t,t_0) = \qquad /13/$$

$$= \mathop{\mathrm{Tr}}_{(S,\mathcal{I})}\{U^{-1}(t,t_0)\,\mathfrak{U}(t,S,\mathcal{I})\,U(t,t_0)\}D_{t_0}.$$

Так как операторы рождения и уничтожения фотонов коммутируют со всеми операторами дипольных подсистем и принимая во внимание известные бозе-соотношения, из /1/ получим следующие уравнения движения в представлении Гейзенберга

$$\begin{cases} i\hbar\,\dot{a}_q(t) = \hbar\omega_q a_q(t) + B_q^+(t), \\ i\hbar\,\dot{a}_q^+(t) = -\hbar\omega_q a_q^+(t) - B_q(t), \end{cases} \qquad /14/$$

где

$$B_q^+(t) = i\sum_{q,r} e^{-i\vec{q}\vec{r}_t}\{(\lambda_{qx}I_r^x(t) + \lambda_{qy}I_r^y(t)) + (\mu_{qx}S_r^x(t) + \mu_{qy}S_r^y(t))\}. \qquad /15/$$

Формальное решение системы /14/ имеет вид

$$\begin{cases} a_q(t) = \tilde{a}_q(t) - iF_q(t), \\ a_q^+(t) = \tilde{a}_q^+(t) + iF_q(t), \end{cases} \qquad /16/$$

где

$$\tilde{a}_q(t) = a_q(t_0)e^{-i\omega_q(t-t_0)}$$

$$F_q(t) = \frac{1}{\hbar}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i\omega_q(t-\tau)}B_q^+(\tau). \qquad /17/$$

Пусть $\mathcal{O}$ - произвольный оператор, действующий на собственные функции гамильтониана /1/ в представлении Гейзенберга. Тогда соответствующее уравнение движения для $\mathcal{O}$ имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{O} = [\mathcal{O}, H]. \qquad /18/$$

Будем исследовать это уравнение на основе метода [5]. Усредняя /18/ посредством /13/, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle [H_{S-I}, \mathcal{O}]\rangle =$$

$$= (i\hbar)^{-1}\sum_{q,r}\{\langle a_q(t)[\mathcal{O}, B_q(t)]\rangle + \langle a_q^+(t)[\mathcal{O}, B_q^+(t)]\rangle\}. \qquad /19/$$

С учетом /16/ уравнение /19/ переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle [H_{S-I}, \mathcal{O}]\rangle =$$

$$= (i\hbar)^{-1}\sum_{q,r}\langle \tilde a_q(t)[\mathcal{O}, B_q(t)]\rangle - \hbar^{-1}\sum_{q,r}\langle F_q(t)[\mathcal{O}, B_q(t)]\rangle + \qquad /20/$$

$$+ (i\hbar)^{-1}\sum_{q,r}\langle \tilde a_q^+(t)[\mathcal{O}, B_q^+(t)]\rangle + \hbar^{-1}\sum_{q,r}\langle F_q^+(t)[\mathcal{O}, B_q^+(t)]\rangle.$$

Для того, чтобы избавиться от входящих в правую часть уравнения /20/ бозонных переменных $\tilde a_q(t)$, $\tilde a_q^+(t)$, воспользуемся леммой Боголюбова и Боголюбова /мл./ [5]:

$$\langle \tilde a_q(t)\,\mathfrak{U}\rangle = (1 + N_q)\langle[\tilde a_q(t), \mathfrak{U}]\rangle,$$

$$\langle \tilde a_q^+(t)\,\mathfrak{U}\rangle = N_q\langle[\mathfrak{U}, \tilde a_q^+(t)]\rangle,$$

где $N_q = \exp(-\beta\hbar\omega_q/2)/\mathrm{sh}(\beta\hbar\omega_q/2)$. Теперь уравнение /20/ при помощи соотношений /16/ принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle [H_{S-I}, \mathcal{O}]\rangle = (i\hbar)^{-1}\sum_{q,r}(1 + N_q)\langle[(a_q(t) +$$

$$+ iF_q(t)), [\mathcal{O}, B_q(t)]]\rangle - \hbar^{-1}\sum_{q,r}\langle F_q(t)[\mathcal{O}, B_q(t)]\rangle + \qquad /21/$$

$$+ (i\hbar)^{-1}\sum_{q,r}N_q\langle[[\mathcal{O}, B_q^+(t)], (a_q^+(t) - iF_q(t))]\rangle + \hbar^{-1}\sum_{q,r}\langle F_q^+(t)[\mathcal{O}, B_q^+(t)]\rangle.$$

Принимая во внимание соотношение

$$[a_q(t), [\mathcal{O}, B_q(t)]] = 0, \qquad [[\mathcal{O}, B_q^+(t)], a_q^+(t)] = 0$$

и /17/, из /21/, в свою очередь получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle [H_{S-I}, \mathcal{O}]\rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q,r}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i\omega_q(t-\tau)} N_q\langle B_q^+(\tau)[\mathcal{O}, B_q(t)]\rangle -$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q,r}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i\omega_q(t-\tau)}(1 + N_q)\langle[\mathcal{O}, B_q(t)]B_q^+(\tau)\rangle +$$

$$+ \frac{1}{\hbar^2}\sum\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{i\omega_q(t-\tau)}(1 + N_q)\langle B_q(\tau)[\mathcal{O}, B_q^+(t)]\rangle - \qquad /22/$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q,r}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{i\omega_q(t-\tau)} N_q\langle[\mathcal{O}, B_q^+(t)]B_q(\tau)\rangle.$$

Подставляя сюда явные выражения операторов $B_q(t)$ и $B_q^+(t)$, получаем искомую иерархию кинетических уравнений для рассматриваемой системы с гамильтонианом /1/:

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle [H_{S-I}, \mathcal{O}]\rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q}\sum_{r,r'}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i[\omega_q(t-\tau) + \vec q(\vec r - \vec r')]} N_q\langle(I_\lambda(\tau) + S_\mu(\tau)) \times$$

$$\times [\mathcal{O}, (I_\lambda(t) + S_\mu(t))]\rangle -$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q}\sum_{r,r'}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i[\omega_q(t-\tau) + \vec q(\vec r - \vec r')]}(1 + N_q)\langle[\mathcal{O}, (I_\lambda(t) + S_\mu(t))] \times$$

$$\times (I_\lambda(\tau) + S_\mu(\tau))\rangle + \qquad /23/$$

$$+ \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q}\sum_{r,r'}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{i[\omega_q(t-\tau) + \vec q(\vec r - \vec r')]}(1 + N_q)\langle(I_\lambda(\tau) + S_\mu(\tau)) \times$$

$$\times [\mathcal{O}, (I_\lambda(t) + S_\mu(t))]\rangle -$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_{q}\sum_{r,r'}\int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{i[\omega_q(t-\tau) + \vec q(\vec r - \vec r')]} N_q\langle[\mathcal{O}, (I_\lambda(t) + S_\mu(t))] \times$$

$$\times (I_\lambda(\tau) + S_\mu(\tau))\rangle,$$

где

$$I_\lambda(\kappa) = \lambda_{qx} I^x_{r'}(\kappa) + \lambda_{qy} I^y_{r'}(\kappa), \qquad (\kappa = t, \tau)$$

$$S_\mu(\kappa) = \mu_{qx} S^x_r(\kappa) + \mu_{qy} S^y_r(\kappa).$$

Подчеркнем, что эта иерархия является точной, так как в правой части уравнения содержатся средние более высокого порядка, чем в левой, и она является общим случаем иерархии, построенной в работах /1,3/.

ПРОБЛЕМА СПОНТАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Здесь обсудим возможные следствия уравнения /23/. Рассмотрим специальный случай, когда в начальный момент времени излучение /поле/ в системе отсутствует:

$$D_f = |0\rangle\langle 0| . \qquad /24/$$

Появление поля при $t > t_0$ можно в этом случае трактовать как спонтанное излучение. С учетом начального условия /24/ уравнение /23/ можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathcal{O}\rangle + (i\hbar)^{-1}\langle [H_{S-I}, \mathcal{O}]\rangle =$$

$$= \frac{1}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{-i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle (I_\lambda(\tau) + S_\mu(\tau)) \times$$

$$\times [\mathcal{O}, (I_\lambda(t) + S_\mu(t))]\rangle - \qquad /25/$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau\, e^{i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle [\mathcal{O}, (I_\lambda(t) + S_\mu(t))] \times$$

$$\times (I_\lambda(\tau) + S_\mu(\tau))\rangle .$$

При $\mathcal{O} \equiv I^a,\ S^a,\ (a = x, y, z)$ из /25/ имеем

$$\frac{d}{dt}\langle I^x(t)\rangle + 2\sum_{r,r'} g\langle S^y_r(t) I^z_{r'}(t)\rangle + \sum_{r'} \Omega'_r \langle I^y_{r'}(t)\rangle =$$

$$= \frac{i}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \lambda_{qx}\lambda_{qy} I^x_{r'}(\tau) I^z_r(t) + \qquad /26а/$$

$$+ \lambda^2_{qy} I^y_{r'}(\tau) I^z_r(t) + \mu_{qx}\lambda_{qy} S^x_r(\tau) I^z_{r'}(t) + \mu_{qy}\lambda_{qy} S^y_r(\tau) I^z_{r'}(t)\rangle -$$

$$- e^{i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \lambda_{qx}\lambda_{qy} I^z_{r'}(t) I^x_r(\tau) + \lambda^2_{qy} I^z_{r'}(t) I^y_r(\tau) +$$

$$+ \lambda_{qy}\mu_{qx} I^z_{r'}(t) S^x_r(\tau) + \lambda_{qy}\mu_{qy} I^z_{r'}(t) S^y_r(\tau)\rangle \} ,$$

$$\frac{d}{dt}\langle I^y(t)\rangle + 2\sum_{r,r'} g\langle S^x_r(t) I^z_{r'}(t)\rangle - \sum_{r} \Omega'_{r'} \langle I^x_{r'}(t)\rangle =$$

$$= -\frac{i}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \lambda^2_{qx} I^x_{r'}(\tau) I^z_r(t) +$$

$$+ \lambda_{qx}\lambda_{qy} I^y_{r'}(\tau) I^z_r(t) + \mu_{qx}\lambda_{qx} S^x_r(\tau) I^z_{r'}(t) + \mu_{qy}\lambda_{qx} S^y_r(\tau) I^z_{r'}(t)\rangle - \qquad /26б/$$

$$- e^{i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \lambda^2_{qx} I^z_{r'}(t) I^x_r(\tau) + \lambda_{qx}\lambda_{qy} I^z_{r'}(t) I^y_r(\tau) +$$

$$+ \mu_{qx}\lambda_{qx} I^z_{r'}(t) S^x_r(\tau) + \mu_{qy}\lambda_{qx} I^z_{r'}(t) S^y_r(\tau)\rangle \} ,$$

$$\frac{d}{dt}\langle I^z(t)\rangle + 2\sum_{r,r'} g (\langle I^x_{r'}(t) S^y_r(t) - S^x_r(t) I^y_{r'}(t)\rangle =$$

$$= \frac{i}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \lambda_{qx}\lambda_{qy} (I^y_{r'}(\tau) I^y_r(t) - I^x_{r'}(\tau) I^x_r(t)) +$$

$$+ \lambda^2_{qx} I^x_{r'}(\tau) I^y_r(t) + \mu_{qx}\lambda_{qx} S^x_r(\tau) I^y_{r'}(t) + \mu_{qy}\lambda_{qx} S^y_r(\tau) I^y_{r'}(t) - \qquad /26в/$$

$$- \lambda^2_{qy} I^y_{r'}(\tau) I^x_r(t) - \mu_{qx}\lambda_{qy} S^x_r(\tau) I^x_{r'}(t) - \mu_{qy}\lambda_{qy} S^y_r(\tau) I^x_{r'}(t)\rangle -$$

$$- e^{i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \lambda_{qx}\lambda_{qy} (I^y_{r'}(t) I^y_r(\tau) - I^x_{r'}(t) I^x_r(\tau)) +$$

$$+ \lambda^2_{qx} I^y_{r'}(t) I^x_r(\tau) + \mu_{qx}\lambda_{qx} I^y_{r'}(t) S^y_r(\tau) + \mu_{qy}\lambda_{qx} I^y_{r'}(t) S^y_r(\tau) -$$

$$- \lambda^2_{qy} I^x_{r'}(t) I^y_r(\tau) - \mu_{qx}\lambda_{qy} I^x_{r'}(t) S^x_r(\tau) - \mu_{qy}\lambda_{qy} I^x_{r'}(t) S^y_r(\tau)\rangle \} .$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^x(t)\rangle + 2\sum_{r,r} g\langle I^y_r(t) S^z_r(t)\rangle + \sum_{r} \Omega_r \langle S^y_r(t)\rangle =$$

$$= \frac{i}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q (t-\tau) + q(r-r')]} \langle \mu_{qx}\mu_{qy} S^x_r(\tau) S^z_{r'}(t) +$$

$$+\mu_{qy}^2 S_r^y(\tau) S_r^z(t) + \lambda_{qx}\mu_{qy} I_{r'}^x(\tau) S_r^z(t) + \lambda_{qy}\mu_{qy} I_{r'}^y(\tau) S_r^z(t)> -$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} <\mu_{qx}\mu_{qy} S_r^z(t) S_{r'}^x(\tau) +$$

$$+\mu_{qy}^2 S_r^z(t) S_{r'}^y(\tau) + \lambda_{qx}\mu_{qy} S_r^z(t) I_{r'}^x(\tau) + \qquad /27a/$$

$$+\lambda_{qy}\mu_{qy} S_r^z(t) I_{r'}^y(\tau) > \},$$

$$\frac{d}{dt} <S^y(t)> + 2\sum_{r,r'} g <I_{r'}^x(t) S_r^z(t)> - \sum_r \Omega_r <S_r^x> =$$

$$= -\frac{i}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} <\mu_{qx}^2 S_r^x(\tau) S_{r'}^z(t) +$$

$$+\mu_{qx}\mu_{qy} S_r^y(\tau) S_{r'}^z(t) + \lambda_{qx}\mu_{qx} I_{r'}^x(\tau) S_r^z(t) + \lambda_{qy}\mu_{qx} I_{r'}^y(\tau) S_r^z(t)> - \qquad /27б/$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+\vec{q}(r-r')]} <\mu_{qx}^2 S_r^z(t) S_{r'}^x(\tau) + \mu_{qx}\mu_{qy} S_r^z(t) S_{r'}^y(\tau) +$$

$$+\lambda_{qx}\mu_{qx} S_r^z(t) I_{r'}^x(\tau) + \lambda_{qy}\mu_{qx} S_r^z(t) I_{r'}^y(\tau) > \},$$

$$\frac{d}{dt} <S^z(t)> + 2\sum_{r,r'} g <S_r^x(t) I_{r'}^y(t) - I_{r'}^x(t) S_r^y(t)> =$$

$$= \frac{i}{\hbar^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} <\mu_{qx}\mu_{qy}(S_r^y(\tau) S_{r'}^y(t) - S_r^x(\tau) S_{r'}^x(t)) +$$

$$+\mu_{qx}^2 S_r^x(\tau) S_{r'}^y(t) + \lambda_{qx}\mu_{qx} I_{r'}^x(\tau) S_r^y(t) + \lambda_{qy}\mu_{qx} I_{r'}^y(\tau) S_r^y(t) - \qquad /27в/$$

$$-\mu_{qy}^2 S_r^y(\tau) S_{r'}^x(t) - \lambda_{qx}\mu_{qy} I_{r'}^x(\tau) S_r^x(t) - \lambda_{qy}\mu_{qy} I_{r'}^y(\tau) S_r^x(t)> -$$

$$-e^{i[\omega(t-\tau)+q(r-r')]} <\mu_{qx}\mu_{qy}(S_r^y(t) S_{r'}^y(\tau) - S_r^x(t) S_{r'}^x(\tau)) +$$

$$+\mu_{qx}^2 S_r^y(t) S_{r'}^x(\tau) + \lambda_{qx}\mu_{qx} S_r^y(t) I_{r'}^x(\tau) + \lambda_{qy}\mu_{qx} S_r^y(t) I_{r'}^y(\tau) -$$

$$-\mu_{qy}^2 S_r^x(t) S_{r'}^y(\tau) - \lambda_{qx}\mu_{qy} S_r^x(t) I_{r'}^x(\tau) - \lambda_{qy}\mu_{qy} S_r^x(t) I_{r'}^y(\tau)> \}.$$

Соотношения /26/-/27/ представляют собой интегро-дифференциальные уравнения, в правой части которых стоят двухвременные средние более высокого порядка, чем в левой. Для простоты перейдем к приближению самосогласования, т.е. совершим расцепления бинарных средних вида

$$<S^\alpha S^\beta> \cong <S^\alpha><S^\beta>,$$

$$<I^\alpha I^\beta> \cong <I^\alpha><I^\beta>,$$

$$<SI> \cong <S><I>.$$

Тогда уравнения /26/ и /27/ принимают вид (частоты $\Omega_r = \Omega$. $\Omega'_r = \Omega'$):

$$\frac{d}{dt}<I^x(t)> + 2g<S^y(t)><I^z(t)> + \Omega'<I^y(t)> =$$

$$= \frac{i}{(N\hbar)^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} (\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I^x(\tau)><I^y(t)> +$$

$$+\lambda_{qy}^2<I^y(\tau)><I^z(t)> + \mu_{qx}\lambda_{qy}<S^x(\tau)><I^z(t)> + \qquad /28a/$$

$$+\mu_{qy}\lambda_{qy}<S^y(\tau)><I^z(t)>) -$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} (\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I^z(t)><I^x(\tau)> +$$

$$+\lambda_{qy}^2<I^z(t)><I^y(\tau)> + \lambda_{qy}\mu_{qx}<I^z(t)><S^x(\tau)> +$$

$$+\mu_{qy}\lambda_{qy}<I^z(t)><S^y(\tau)>) \},$$

$$\frac{d}{dt}<I^y(t)> + 2g<S^x(t)><I^z(t)> - \Omega'<I^x(t)> =$$

$$= -\frac{i}{(N\hbar)^2}\sum_q \sum_{r,r'} \int_{t_0}^{t} d\tau \{ e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} (\lambda_{qy}^2<I^x(\tau)><I^z(t)> + \qquad /28б/$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I^y(\tau)><I^z(t)> + \mu_{qx}\lambda_{qx}<S^x(\tau)><I^z(t)> + \mu_{qy}\lambda_{qx}<S^y(\tau)><I^z(t)>) -$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]} (\lambda_{qx}^2<I^z(t)><I^x(\tau)> +$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}<I^z(t)><I^y(\tau)> + \mu_{qx}\lambda_{qx}<I^z(t)><S^x(\tau)> + \mu_{qy}\lambda_{qx}<I^z(t)><S^y(\tau)>) \}.$$

$$\frac{d}{dt}\langle I^z(t)\rangle+2g\left(\langle I^x(t)\rangle\langle S^y(t)\rangle-\langle S^x(t)\rangle\langle I^y(t)\rangle\right)=$$

$$=\frac{i}{(N\hbar)^2}\sum\sum\int d\tau\{e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}[\lambda_{qx}\lambda_{qy}(\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle-\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle)+$$

$$+\lambda_{qx}^2\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle+\mu_{qy}\lambda_{qx}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle-$$

$$-\lambda_{qy}^2\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle-\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle-\mu_{qy}\lambda_{qy}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle]-\tag{28в}$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}[\lambda_{qx}\lambda_{qy}(\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle-\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle)+$$

$$+\lambda_{qx}^2\langle I^y(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle I^y(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\mu_{qy}\lambda_{qx}\langle I^y(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle-$$

$$-\lambda_{qy}^2\langle I^x(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle-\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle I^x(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle-\mu_{qy}\lambda_{qy}\langle I^x(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle]\}.$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^x(t)\rangle+2g\langle I^y(t)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\Omega\langle S^y(t)\rangle=$$

$$=\frac{i}{(N\hbar)^2}\sum_q\sum_{r,r'}\int_{t_0}^{t}d\tau\{e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}(\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+$$

$$+\mu_{qy}^2\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle)-\tag{29а}$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}(\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\mu_{qy}^2\langle S^z(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle+$$

$$+\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle)\},$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^y(t)\rangle+2g\langle I^x(t)\rangle\langle S^z(t)\rangle-\Omega\langle S^x(t)\rangle=$$

$$=-\frac{i}{(N\hbar)^2}\sum_q\sum_{r,r'}\int_{t_0}^{t}d\tau\{e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}(\mu_{qx}^2\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+$$

$$+\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\tag{29б}$$

$$+\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle)-$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}(\mu_{qx}^2\langle S^z(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+$$

$$+\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle S^z(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+$$

$$+\lambda_{qy}\mu_{qx}\langle S^z(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle)\},$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^z(t)\rangle+2g\left(\langle S^x(t)\rangle\langle I^y(t)\rangle-\langle I^x(t)\rangle\langle S^y(t)\rangle\right)=$$

$$=\frac{i}{(N\hbar)^2}\sum_q\sum_{r,r}\int_{t_0}^{t}d\tau\{e^{-i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}[\mu_{qx}\mu_{qy}(\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle-\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle)+$$

$$+\mu_{qx}^2\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle-\tag{29в}$$

$$-\mu_{qy}^2\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle-\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle-\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle]-$$

$$-e^{i[\omega_q(t-\tau)+q(r-r')]}[\mu_{qx}\mu_{qy}(\langle S^y(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle-\langle S^x(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle)+$$

$$+\mu_{qx}^2\langle S^y(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle S^y(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle S^y(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle-$$

$$-\mu_{qy}^2\langle S^x(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle-\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle S^x(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle-\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle S^x(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle]\}.$$

Учитывая известные соотношения

$$N^{-1}\sum_r e^{i\vec{q}\vec{r}}=\phi(\vec{q}),$$

$$N^{-2}\sum_{r,r'}e^{-i\vec{q}(r-r')}=N^2\cdot N^{-2}\phi(\vec{q})\,\phi(-\vec{q})=\phi^2(\vec{q}),$$

$$\phi(-\vec{q})=\phi(\vec{q}),$$

из /28/ и /29/ получим

$$\frac{d}{dt}\langle I^x(t)\rangle+2g\langle S^y(t)\rangle\langle I^z(t)\rangle+\Omega'\langle I^y(t)\rangle=$$

$$=\frac{i}{\hbar^2}\sum_q\phi^2(\vec{q})\int_{t_0}^{t}d\tau\{e^{-i\omega_q(t-\tau)}(\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle+\tag{30а}$$

$$+\lambda_{qy}^2\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle+\mu_{qy}\lambda_{qy}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle)-$$

$$-e^{i\omega_q(t-\tau)}(\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I^z(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\lambda_{qy}^2\langle I^z(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle+$$

$$+\lambda_{qy}\mu_{qx}\langle I^z(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle I^z(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle\},$$

$$\frac{d}{dt}\langle I^y(t)\rangle+2g\langle S^x(t)\rangle\langle I^z(t)\rangle-\Omega'\langle I^x(t)\rangle=$$

$$=-\frac{i}{\hbar^2}\sum_q \phi(\vec q)\int_{t_0}^{t} d\tau\{e^{-i\omega(t-\tau)}(\lambda_{qx}^2\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle+$$

$$+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle+\mu_{qy}\lambda_{qx}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^z(t)\rangle)-$$

$$-e^{i\omega_q(t-\tau)}(\lambda_{qx}^2\langle I^z(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\lambda_{qx}\lambda_{qy}\langle I^z(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle+$$

$$+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle I^z(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\mu_{qy}\lambda_{qx}\langle I^z(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle)\}, \qquad /30б/$$

$$\frac{d}{dt}\langle I^z(t)\rangle+2g(\langle I^x(t)\rangle\langle S^y(t)\rangle-\langle S^x(t)\rangle\langle I^y(t)\rangle)=$$

$$=\frac{i}{\hbar^2}\sum_q\phi^2(\vec q)\int_{t_0}^{t} d\tau\{e^{-i\omega_q(t-\tau)}[\lambda_{qx}\lambda_{qy}(\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle-\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle)+$$

$$+\lambda_{qx}^2\langle I^x(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^y(t)\rangle-$$

$$-\lambda_{qy}^2\langle I^y(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle-\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle-\mu_{qy}\lambda_{qy}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle]-$$

$$-e^{i\omega_q(t-\tau)}[\lambda_{qx}\lambda_{qy}(\langle I^y(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle-\langle I^x(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle)+$$

$$+\lambda_{qx}^2\langle I^y(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qx}\langle I^y(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\mu_{qy}\lambda_{qx}\langle I^y(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle-$$

$$-\lambda_{qy}^2\langle I^x(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle-\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle S^x(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle-\mu_{qy}\lambda_{qy}\langle S^y(\tau)\rangle\langle I^x(t)\rangle]\}. \qquad /30в/$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^x(t)\rangle+2g\langle I^y(t)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\Omega\langle S^y(t)\rangle=$$

$$=\frac{i}{\hbar^2}\sum_q\phi^2(\vec q)\int_{t_0}^{t} d\tau\{e^{-i\omega_q(t-\tau)}(\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+ \qquad /31а/$$

$$+\mu_{qy}^2\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle)-$$

$$-e^{i\omega_q(t-\tau)}(\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\mu_{qy}^2\langle S^z(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle+$$

$$+\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle)\},$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^y(t)\rangle+2g\langle I^x(t)\rangle\langle S^z(t)\rangle-\Omega\langle S^x(t)\rangle=$$

$$=-\frac{i}{\hbar^2}\sum_q\phi^2(\vec q)\int_{t_0}^{t} d\tau\{e^{-i\omega_q(t-\tau)}(\mu_{qx}^2\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+$$

$$+\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle+\mu_{qx}\lambda_{qy}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^z(t)\rangle)- \qquad /31б/$$

$$-e^{i\omega_q(t-\tau)}(\mu_{qx}^2\langle S^z(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\mu_{qx}\mu_{qy}\langle S^z(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle+$$

$$+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle S^z(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qx}\langle S^z(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle)\},$$

$$\frac{d}{dt}\langle S^z(t)\rangle+2g(\langle S^x(t)\rangle\langle I^y(t)\rangle-\langle I^x(t)\rangle\langle S^y(t)\rangle)=$$

$$=\frac{i}{\hbar^2}\sum\phi^2(\vec q)\int_{t_0}^{t} d\tau\{e^{-i\omega_q(t-\tau)}[\mu_{qx}\mu_{qy}(\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle-\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle)+ \qquad /31в/$$

$$+\mu_{qx}^2\langle S^x(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qx}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^y(t)\rangle-$$

$$-\mu_{qy}^2\langle S^y(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle-\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle I^x(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle-\lambda_{qy}\mu_{qx}\langle I^y(\tau)\rangle\langle S^x(t)\rangle]-$$

$$-e^{i\omega_q(t-\tau)}[\mu_{qx}\mu_{qy}(\langle S^y(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle-\langle S^x(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle)+$$

$$+\mu_{qx}^2\langle S^y(t)\rangle\langle S^x(\tau)\rangle+\lambda_{qx}\mu_{qx}\langle S^y(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle+\lambda_{qy}\mu_{qx}\langle S^y(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle-$$

$$-\mu_{qy}^2\langle S^x(t)\rangle\langle S^y(\tau)\rangle-\lambda_{qx}\mu_{qy}\langle S^x(t)\rangle\langle I^x(\tau)\rangle-\lambda_{qy}\mu_{qy}\langle S^x(t)\rangle\langle I^y(\tau)\rangle]\}.$$

Чтобы интегрировать правые части уравнения, сделаем следующие предположения. С учетом условия /24/ предположим, что излучатели жестко закреплены в узлах простой кубической решетки. Будем также предполагать, что распределения собственных частот излучателей Ω_r' и Ω_r симметричны относительно некоторой частоты Ω и не зависят от координат излучателей. Обозначим $J(\Omega)$ функцию распределения частот и усредним величину $e^{i\Omega_r t}$ с учетом неоднородного лоренцева уширения /5/

$$\langle e^{i\Omega_r t}\rangle\equiv e^{i\Omega_r t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iWt}\,J(W)\,dW=e^{i\Omega t}\,e^{-|t|/2T},$$

где T - так называемое время жизни осциллятора. Заметим, что обычно рассматривается лишь простейший случай $\Omega_r = \Omega$ и $\Omega'_{r'} = \Omega'$. Следовательно, в силу определения имеем:

$$\langle I^\alpha(\tau)\rangle = \langle I^\alpha(t)\rangle e^{-i\Omega'(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/2T'}$$

$$\langle S^\alpha(\tau)\rangle = \langle S^\alpha(t)\rangle e^{-i\Omega(t-\tau)} e^{-(t-\tau)/2T}. \qquad /32/$$

Теперь с учетом /32/ уравнения /30/-/31/ принимают вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle I^x\rangle + 2g\langle S^y\rangle\langle I^z\rangle + \Omega'\langle I^y\rangle = [\gamma_1\langle I^x\rangle + \gamma_2\langle I^y\rangle + \gamma_3\langle S^x\rangle + \gamma_4\langle S^y\rangle]\langle I^z\rangle, \\ \frac{d}{dt}\langle I^y\rangle + 2g\langle S^x\rangle\langle I^z\rangle - \Omega'\langle I^x\rangle = [-\gamma_1\langle I^y\rangle - \eta_1\langle I^x\rangle - \eta_2\langle S^x\rangle - \eta_3\langle S^y\rangle]\langle I^z\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle I^z\rangle + 2g(\langle I^x\rangle\langle S^y\rangle - \langle S^x\rangle\langle I^y\rangle) = \gamma_1(\langle I^y\rangle^2 - \langle I^x\rangle^2) + \eta_4\langle I^x\rangle\langle I^y\rangle + \\ \qquad + \eta_2\langle S^x\rangle\langle I^y\rangle - \eta_3\langle S^y\rangle\langle I^y\rangle - \gamma_3\langle S^x\rangle\langle I^x\rangle - \gamma_4\langle S^y\rangle\langle I^x\rangle. \end{cases} \qquad /33/$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\langle S^x\rangle + 2g\langle I^y\rangle\langle S^z\rangle + \Omega\langle S^y\rangle = (\gamma_3\langle S^x\rangle + \chi_1\langle S^y\rangle + \chi_2\langle I^x\rangle + \chi_3\langle I^y\rangle)\langle S^z\rangle, \\ &\frac{d}{dt}\langle S^y\rangle + 2g\langle I^x\rangle\langle S^z\rangle - \Omega\langle S^x\rangle = -(\chi_4\langle S^x\rangle + \gamma_3\langle S^y\rangle + \chi_2\langle I^x\rangle - \zeta_1\langle I^y\rangle)\langle S^z\rangle, \\ &\frac{d}{dt}\langle S^z\rangle + 2g(\langle S^x\rangle\langle I^y\rangle - \langle I^x\rangle\langle S^y\rangle) = \gamma_3(\langle S^y\rangle^2 - \langle S^x\rangle^2) + \zeta_2\langle S^x\rangle\langle S^y\rangle + \\ &\qquad + \chi_2\langle I^x\rangle\langle S^y\rangle + \zeta_3\langle I^y\rangle\langle S^y\rangle - \zeta_4\langle I^x\rangle\langle S^x\rangle - \chi_3\langle I^y\rangle\langle S^x\rangle. \end{aligned} \qquad /34/$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$\gamma_1 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda_{qx}\lambda_{qy}$, $\qquad \gamma_2 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda^2_{qy}$,

$\gamma_3 = \xi_{(\Omega)}\cdot\mu_{qx}\lambda_{qy}$, $\qquad \gamma_4 = \xi_{(\Omega)}\cdot\mu_{qy}\lambda_{qy}$,

$\eta_1 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda^2_{qx}$, $\qquad \eta_2 = \xi_{(\Omega)}\cdot\mu_{qx}\lambda_{qx}$,

$\eta_3 = \xi_{(\Omega)}\cdot\mu_{qy}\lambda_{qx}$, $\qquad \eta_4 = \xi_{(\Omega')}\cdot(\lambda^2_{qy} - \lambda^2_{qy})$.

$\chi_1 = \xi_{(\Omega)}\cdot\mu^2_{qy}$, $\qquad \chi_2 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda_{qx}\mu_{qx}$,

$\chi_3 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda_{qy}\mu_{qy}$, $\qquad \chi_4 = \xi_{(\Omega)}\cdot\mu^2_{qx}$,

$\zeta_1 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda_{qy}\mu_{qx}$, $\qquad \zeta_2 = \xi_{(\Omega)}\cdot(\mu^2_{qx} - \mu^2_{qy})$,

$\zeta_3 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda_{qy}\mu_{qx}$, $\qquad \zeta_4 = \xi_{(\Omega')}\cdot\lambda_{qx}\mu_{qy}$.

где

$$\xi_{(\Omega)} = \sum_q \phi^2(\vec{q})\frac{8\omega_q T^2}{h[4(\omega_q^2 - \Omega^2)T^2 + 4i\Omega T + 1]},$$

$$\xi_{(\Omega')} = \sum_q \phi^2(\vec{q})\frac{8\omega_q (T')^2}{h[4(\omega_q^2 - (\Omega')^2)(T')^2 + 4i\Omega' T' + 1]}.$$

Эти выражения получены при $t_0 \to -\infty$. Таким образом, мы построили замкнутую систему уравнений /33/ и /34/, полностью описывающую процесс спонтанного коллективного излучения в рассматриваемой двухкомпонентной дипольной системе. В силу существенной нелинейности этой системы ее дальнейшее исследование может быть выполнено численно, что предполагается сделать в дальнейшем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н./мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ТМФ, 1982, 52, с.423.
2. Боголюбов Н.Н./мл./, Фам Ле Киен, Шумовский А.С ТМФ, 1984, 56, 3, с.108.
3. Bogolubov N.N.(Jr.), Fam Le Kien, Shumovsky A.S. Physica, 1984, 128A, p.273.
5. Кудрявцев И.К., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. Квантовая электроника, 1979, 11, с.2434.
5. Аллен А., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", М., 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1985 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.
Д11-83-511	Труды совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике. Дубна, 1982.	2 р. 50 к.
Д7-83-644	Труды Международной школы-семинара по физике тяжелых ионов. Алушта, 1983.	6 р. 55 к.
Д2,13-83-689	Труды рабочего совещания по проблемам излучения и детектирования гравитационных волн. Дубна, 1983.	2 р. 00 к.
Д13-84-63	Труды XI Международного симпозиума по ядерной электронике. Братислава, Чехословакия, 1983.	4 р. 50 к.
Д2-84-366	Труды 7 Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1984.	4 р. 30 к.
Д1,2-84-599	Труды VII Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1984.	5 р. 50 к.
Д17-84-850	Труды Ш Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1984. /2 тома/	7 р. 75 к.
Д10,11-84-818	Труды V Международного совещания по проблемам математического моделирования, программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 1983	3 р. 50 к.
	Труды IX Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1984 /2 тома/	13 р.50 к.
Д4-85-851	Труды Международной школы по структуре ядра, Алушта, 1985.	3 р. 75 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Тураев М.Т., Шумовский А.С., Юкалов В.И.

Р17-85-961

Сверхизлучение в двухкомпонентной дипольной системе

Получена точная иерархия кинетических уравнений, на основе которой построена система дифференциальных уравнений, описывающая процесс спонтанного излучения и учитывающая прямые взаимодействия диполей разных сортов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод О.С.Виноградовой.

Turaev M.T., Shumovsky A.S., Yukalov V.I.

P17-85-961

Supperradiance in Two-Component Dipole System

Exact hierarchy of kinetic equations for a two-component dipole system is found and applied to construct a closed system of differential equations describing the process of collective spontaneous radiation and taking account of direct interactions of different-sort dipoles.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985