сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-85-771

Р.Гелерак

УРАВНЕНИЯ Д-Л-Р ДЛЯ КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Следствия из корреляционных неравенств

1985

ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей работе [1] мы сформулировали новый критерий единственности предельного гиббсовского состояния для класса непрерывных классических систем частиц, взаимодействующих с помощью положительно определенного парного потенциала. Важным элементом доказательства этого критерия являются некоторые корреляционные неравенства типа неравенств Жинибра, которые мы выписали и доказали в работе [1]. Настоящая работа является продолжением доказательства критерия, сформулированного в работе [1] как теорема 1. Оказывается, что эта теорема является прямым следствием корреляционных неравенств, доказанных там же, и некоторых добавочных аргументов. Предлагаемая работа непосредственно связана с работой [1]. Ссылки на ее результаты мы отмечаем, добавляя к номеру формулы или утверждения из работы [1] символ 1. В последующих работах мы собираемся доказать, что теорема 1 [1] в сущности утверждает то, что в классе рассматриваемых здесь систем частиц не происходит фазового перехода первого рода.

1. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЫ НА ОСИ $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$.

В случае пустой внешней конфигурации $\hat\omega = \phi$ проблему существования термодинамических пределов для корреляционных функций можно решить, используя некоторые другие корреляционные неравенства, доказанные Фрёлихом и Парком в [19].

На корреляционные функции $c^n_\Lambda(z\,|\,(\hat x)_n)$ легко получить равномерную оценку сверху:

$$0 \le c^n_\Lambda(z\,|\,(\hat x)_n) \le z^n\left[\exp\frac{\alpha_*^2}{2}\,V(0)\right]^n \qquad /1.1/$$

и доказать /в области $z > 0$/, что они монотонно возрастают с увеличением объема Λ. К сожалению, в присутствии нулевой внешней конфигурации эти корреляционные неравенства уже неверны.

Чтобы доказать существование термодинамических пределов для моментов типа $\hat c^n_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,(\hat x)_n)$ или $\hat c^n_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,(\hat x)_n)$ /см. определения 3.1-3.4 [1] /, мы применим в этой работе некоторые топологические соображения.

Определение 1.1

Пусть $\zeta > 0$, $f = \{f_n(\hat{x})_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность комплексно-значных измеримых функций f_n на пространствах $(R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n}$. Тогда векторное пространство

$$\mathfrak{B}_\zeta = \{f : \sup_n \zeta^{-n} \| f_n \|_{L_\lambda^\infty [(R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n}]} = \| f \|_\zeta < \infty\},$$

где $L_\lambda^\infty[(R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n}]$ означает пространство существенно ограниченных относительно $(dx \otimes d\lambda(\alpha))^{\otimes n}$ и измеримых функций, определенных на множестве $(R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n}$ с нормой $\|\cdot\|_\zeta$, является банаховым. Замкнутое пространство $\mathfrak{B}_\zeta^S$, состоящее из последовательностей симметричных функций, тоже является банаховым. Пространство $\mathfrak{B}_\zeta$ является дуальным пространством пространства $\{{}^*\mathfrak{B}_\zeta, {}^*\|\ \|\}$, где ${}^*\mathfrak{B}_\zeta = \bigoplus_0^\infty L_\lambda^1((R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n})$, а норма ${}^*\|\cdot\|_\zeta$ определяется формулой

$$^*\| \phi \|_\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \| \phi_n \|_{L_\lambda^1((R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n})}. \qquad /1.2/$$

На пространстве $\mathfrak{B}_\zeta$ введем топологию *-слабой сходимости. Напомним, что *-слабая топология в пространстве $\mathfrak{B}_\zeta$ определяется как слабейшая линейная топология, при которой все линейные функционалы вида

$$\langle \phi, f \rangle = \sum_n \int_{R^d} d(\hat{x})_n \phi_n(\hat{x})_n f_n(\hat{x})_n, \qquad /1.3/$$

($\phi \in {}^*\mathfrak{B}_\zeta$) являются непрерывными. Тогда из корреляционных неравенств /3.9/ [1], /3.11/ [1] и оценки /1.1/ получаем, что оценки:

$$| c_\Lambda^n(z, \hat{\omega}, t \,|\, (\hat{x})_n) | \leq z^n \exp\left(\frac{\alpha_*^2}{2} V(0)\, n\right), \qquad /1.4/$$

$$| \hat{c}_\Lambda^n(z, \hat{\omega}, t \,|\, (\hat{x})_n) | \leq z^n \exp\left(\frac{\alpha_*^2}{2} V(0)\, n\right), \qquad /1.5/$$

верны для всех $z > 0$, $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$ и $t \in R^1$. Выбирая $\zeta = \exp\left(\frac{\alpha_*^2}{2} V(0)\right)$, получаем, что для всех $z > 0$, $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$, $\Lambda \subset R^d$ вектор $c_\Lambda(z, \hat{\omega}, t) = \{c_\Lambda^n(z, \hat{\omega}, t \,|\, (\hat{x})_n)\}_{n=1}^\infty$ принадлежит единичному шару пространства $\mathfrak{B}_\zeta$. Тогда, применяя известную теорему Банаха-Алаоглу, получаем, что семейство $\{c_\Lambda(z, \hat{\omega}, t)\}_\Lambda$ относительно компактно в *-слабой топологии. Поэтому из семейства $\{c_\Lambda(z, \hat{\omega}, t)\}_\Lambda$ можно извлечь последовательность $\{c_{\Lambda_k}(z, \hat{\omega}, t)\}_{k=1}^\infty$, $\Lambda_k \uparrow R^d$, такую, что существует

$$^* - \lim_{k \to \infty} c_{\Lambda_k}(z, \hat{\omega}, t) = c_\infty(z, \hat{\omega}, t). \qquad /1.6/$$

Те же аргументы можно применить к моментам ρ_Λ^n, $c_\Lambda^{n,m}$ и $\hat{c}_\Lambda^n$, определенным формулами //3.1/ [1] /3.2/ [1]

Предложение 1.1

Пусть $z \geq 0$, $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$, $t \in R^1$. Тогда для любой последовательности $\Lambda_n \uparrow R^d$ существуют последовательности $(n_1) \subset (n)$, $(n_2) \subset (n)$, $(n_3) \subset (n)$, $(n_4) \subset (n)$ такие, что последовательности векторов

$$\{c_{\Lambda_{n_1}}(z, \hat{\omega}, t)\}, \ \{c_{\Lambda_{n_2}}^{(\cdot,\cdot)}(z, \hat{\omega}, t)\}, \ \{\rho_{\Lambda_{n_3}}(z, \hat{\omega}, t)\}, \ \{\hat{c}_{\Lambda_{n_4}}(z, \hat{\omega}, t)\},$$

являются сходящимися в *-слабой топологии пространства $\mathfrak{B}_\zeta$. В ситуации, описанной теоремой 1 [1], существует единственный термодинамический предел $\rho_\infty(z, \hat{\omega}, t)$. В этом случае можно значительно усилить результат предложения /1.1/. Предположим, что z и $\hat{\omega}$ удовлетворяют предположениям теоремы 1 [1]. Тогда граничные корреляционные функции $\rho_\infty^n(z, \hat{\omega}, t \,|\, (\hat{x})_n)$ не зависят от $\hat{\omega}$ и равны $\rho_\infty^n(z \,|\, (\hat{x})_n)$. Моменты $\{\rho_\infty^n(z \,|\, (\hat{x})_n)\}_{n=1}^\infty$ единственным образом определяют некоторую меру $\mu_\infty^z(d\phi)$ на пространстве $S'(R^d)$ такую, что

$$\rho_\infty^n(z \,|\, (\hat{x})_n) = z^n \int \mu_\infty^z(d\phi) \prod_{i=1}^n :e^{i\alpha_i \phi(x_i)}: .$$

Используя некоторые аргументы из работ [1-3], можно доказать следующую формулу интегрирования по частям относительно меры μ_∞^z

$$\int e^{i\phi(f)} \mu_\infty^z(d\phi) = \exp\left(-\frac{1}{2} V(f,f)\right).$$

$$\cdot \int \mu_\infty^z(d\phi) \exp\left[z \int d(\hat{x}) :e^{i\alpha\phi(x)}: \left(e^{-\alpha f * V(x)} - 1\right)\right]. \qquad /1.7/$$

Тогда из формулы /1.7/ следует

$$\int e^{i\phi(f)} \mu_\infty^z(d\phi) = \exp\left(-\frac{1}{2} V(f,f)\right).$$

$$\cdot \int \mu_\infty^z(d\phi) \exp\left[z \int d(\hat{x}) :e^{i\alpha\phi(x)}: \left(e^{-\alpha(f * V)(x)} - 1\right)\right]. \qquad /1.8/$$

Применяя последовательно эту формулу /вместе с некоторыми легко контролируемыми регуляризациями/, получаем, что $\{\rho_\infty^n(z \,|\, (\hat{x})_n)\}$ удовлетворяет хорошо известным равенствам типа равенств Майера-Монтролла

$$\rho^n_\infty(z\,|\,(\hat x)_n) = \exp\Big[-\sum_{1\le i\le j\le n} \alpha_i\alpha_j V(x_i-x_j)\Big]\cdot$$

$$\cdot\, z^n \int \mu^z_\infty(d\phi)\exp\Big[z\int d(\hat x) : e^{i\alpha\phi(x)} : \cdot \qquad /1.9/$$

$$\cdot\,(\exp - \mathcal{E}((\hat x)\,|\,(\hat x)_n) - 1)\Big].$$

Используя это обстоятельство, мы докажем

Предложение 1,2

Пусть $z>0,\ \hat\omega\in\hat\Omega^f_\infty$ удовлетворяют предположениям теоремы 1[1]. Предположим также, что $V\in L^1(R^d)$. Тогда для каждого компакта $\Lambda\subset R^d$ имеем:

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^d} \|\chi_\Lambda(\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,-)-\rho^n_\infty(z\,|\,-)\|_{L^\infty_\Lambda((R^d\otimes\Sigma)^{\otimes n})} = 0. \qquad /1.10/$$

Доказательство

Используя очевидную квазиинвариантность меры $\mu_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,d\phi)$ относительно смещений, можно выписать уравнения Майера-Монтролла для $\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,(\hat x)_n)$:

$$\chi_\Lambda(x)_n\,\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,(\hat x)_n) = \chi_\Lambda(x)_n\, z^n \exp - \mathcal{E}((\hat x)_n\,|\,(\hat x)_n)\cdot$$

$$\cdot\,\exp(-\mathcal{E}((\hat x)_n\,|\,\hat\omega(\Lambda^c)))\cdot\int \mu_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,d\phi)\cdot \qquad /1.11/$$

$$\cdot\,\exp\Big[z\int_\Lambda d(\hat x) : e^{i\alpha\phi(x)} : (e^{-\alpha\sum_{i=1}^n \alpha_i V(x-x_i)}-1)\, e^{it\mathcal{E}((\hat x)\,|\,\hat\omega(\Lambda^c))}\Big].$$

Ядра Майера-Монтролла

$$\mathfrak{M}^{n,m}[(\alpha,x)_n;(\beta,y)_m] = \prod_{j=1}^m \big[e^{-\beta_j\sum_{i=1}^n \alpha_i V(x_i-y_j)}-1\big] \qquad /1.12/$$

определяют отображения из множества $(R^d\otimes\Sigma)^{\otimes n}$ в пространстве $L^1_\lambda[(R^d\otimes\Sigma)^{\otimes m}]$. Имеем однородные оценки по норме:

$$\sup_{(\hat x)_n\in(R^d\otimes\Sigma)^{\otimes n}} \|\mathfrak{M}^{n,m}((\hat x)_n;(\hat y)_m)\|_{L^1_\lambda((R^d\otimes\Sigma)^{\otimes m})} \le$$

$$\le\Big[e^{\frac{\alpha_*^2}{2}nV(0)}\Big]^m\cdot\alpha_*^{2m}n^m\cdot\|V\|_{L_1}. \qquad /1.13/$$

Из этих оценок следует, что на отображения

$$(R^d\otimes\Sigma)^{\otimes n}\ni(\hat x)_n\to\Big|\frac{1}{m!}\mathfrak{M}^{n,m}((\hat x)_n;(\hat y)_m)\Big|\in{}^*\mathfrak{B}_\zeta \qquad /1.14/$$

имеем равномерные оценки по норме:

$$\sup_{(\hat x)_n\in(R^d\otimes\Sigma)^{\otimes n}} \Big\|\,\Big|\mathfrak{M}^{n,m}((\hat x)_n|)\cdot\frac{1}{m!}\Big|_{m=1}^\infty\Big\|_{{}^*\mathfrak{B}_\zeta}\le \qquad /1.15/$$

$$<\exp(\alpha_*^2\, e^{\alpha_*^2 nV(0)}\cdot n)\,\|V\|_{L_1}.$$

Теперь заметим, что из уравнения Майера-Монтролла следуют равенства:

$$\chi_\Delta(x)_n(\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,t\,|\,(\hat x)_n)-\rho^n_\infty(z\,|\,(\hat x)_n) =$$

$$= z^n\chi_\Lambda(\hat x)_n\exp(-\mathcal{E}((\hat x)_n\,|\,(\hat x)_n)[\exp(it\mathcal{E}((\hat x)_n\,|\,\hat\omega(\Lambda^c))\,\chi_\Lambda(\hat x)_n-1]\cdot$$

$$\cdot\int\mu^z_\infty(d\phi)\exp\Big[z\int_\Lambda d(\hat x) : e^{i\alpha\phi(x)} : (e^{-\sum_{i=1}^n \alpha_i V(x-x_i)}-1)\Big]+ \qquad /1.16/$$

$$+\,z^n\chi_\Delta(\hat x)_n\exp(-\mathcal{E}((x)_m\,|\,(\hat x)_n)\exp(it\mathcal{E}((\hat x)_n\,|\,\hat\omega(\Lambda^c)))\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=1}^\infty\frac{1}{m!}\int d(\hat v)_m\,\mathfrak{M}^{n,m}((\hat x)_n;(\hat v)_m)\cdot$$

$$\cdot\,[\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,t)(\hat x)_n)-\rho^n_\infty(z\,|\,(\hat x)_n)].$$

Доказательство будет завершено, если мы докажем следующую лемму.

Лемма 1.3

Пусть $\hat\omega\in\hat\Omega^f_\infty$ и $V\in L^1(R^d)$. Тогда для произвольного компакта $\Theta\subset R^d$ имеем:

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^d}\ \operatorname*{ess\,sup}_{(x\in\Theta)}|\mathcal{E}((\hat x)\,|\,\hat\omega(\Lambda\ ))| = 0. \qquad /1.17/$$

Доказательство леммы 1.3.

Из предположения $\hat\omega\in\Omega^f_\infty$ следует существование конечного d и ограниченного множества $\Lambda(\hat\omega)\subset R^d$ такого, что для произвольного единичного куба $\Delta\subset R^d-\Lambda(\hat\omega)$ имеем $|\hat\omega(\Lambda)|\le d$. Тогда, взяв Λ достаточно большой, получим:

$$\| \mathcal{E}((\hat{x}) | \hat{\omega}(\Lambda^c)) \|_{L^\infty(\Theta)} \leq d \int_{|x| > \operatorname{dist}(\partial\Theta, \partial\Lambda)} |V(x)|\, dx \quad . \qquad /1.18/$$

Используя предположение $V \in L^1(R^d)$, получим утверждение леммы.

Определение 1.2.

Двухчастичный потенциал **V** назовем регулярным снизу и сверху /ℓu -регулярным/ тогда и только тогда, когда существует положительная, монотонно убывающая функция Ψ, определенная на множестве $\{t \in R^1 | t \geq 0\}$, и такая, что

$$\int_0^\infty dt\, t^{d-1} \Psi(t) < \infty , \qquad /1.19/$$

и для произвольного $x \in R^d$ имеем

$$-\Psi(|x|) \leq V(x) \leq \Psi(|x|) . \qquad /1.20/$$

случае ℓu -регулярного парного потенциала **V** предложение 2.4 можно усилить.

Теорема 1.1.

Пусть $\hat{V} \in L^1(R^d)$ будет ℓu -регулярным парным взаимодействием. Предположим, что $z, \hat{\omega} \in \hat{\Omega}^f_\infty$ удовлетворяют предположениям теоремы 1 [1]. Тогда для произвольного компакта $\Lambda \subset R^d$ имеет место следующее равенство:

$$\lim_{\Lambda \uparrow R^d} \sup_{(\hat{x})_m \in (\Lambda \times \Sigma)^{\otimes m}} |\rho^n_\Lambda(z, \hat{\omega}, t | (\hat{x})_n) - \rho^n_\infty(z | (\hat{x})_n)| = 0 . \qquad /1.21/$$

Набросок доказательства

Из ℓu-регулярности потенциала **V** и леммы 1.3 сразу следует, что

$$\lim_{\Lambda \uparrow R^d} \sup_{(\hat{x})_m \in (\Lambda \otimes \Sigma)^{\otimes m}} | e^{t \mathcal{E}((\hat{x})_m | \hat{\omega}(\Lambda^c))} - 1 | = 0 . \qquad /1.22/$$

в доказательстве /1.21/ можно использовать легко получаемые однородные по $(\hat{x})_m \in (\Lambda \times \Sigma)^{\otimes m}$ оценки на оба слагаемых из формулы /1.16/.

Замечания

Методика, использованная при доказательстве теоремы 1.1, намечена в работе Рюеля [4]. В более явном виде была она также использована Загребновым в работе [5]. Заметим, что в случае $\hat{V} \in L^1(R^d)$, $V \in L^1(R^d)$ из леммы Римана-Лебега следует, что V является ℓu -регулярным парным потенциалом.

2. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

2.1. Закон будстрапа для моментов типа c^n_Λ

Возьмем $z \geq 0$, $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$ и произвольное $t \in R^1$. Предположим, что $\Lambda_n \uparrow R^d$, например, в смысле Ван Хова. Применяя предложение 1.1, получаем существование последовательности $(n') \subset (n)$ такой, что последовательность векторов

$$c_{\Lambda_{n'}}(z, \hat{\omega}, t) = \{ c^m_{\Lambda_{n'}}(z, \hat{\omega}, t | (\hat{x})) \}^\infty_{m=1} \in \mathcal{B}_\zeta$$

будет сходиться в *-слабой топологии пространства $\mathcal{B}_\zeta$. Возьмем теперь вектор $f \in {}^*\mathcal{B}_\zeta$ следующего вида:

$f = \{ f_1(x, \alpha), 0, \ldots, 0, f_m((\hat{x})_m, 0, \ldots \}$, где предполагаем $f_1(x, \alpha) \geq 0$ и $f_m(\hat{x})_m > 0$ почти везде. Предположим теперь следующие соотношения:

$$1^\circ \quad \lim_{n' \to \infty} \langle f_1, c^1_{\Lambda_{n'}}(z, \omega, t) \rangle = \langle f_1, c^1_\infty(z) \rangle > 0 , \qquad /2.1/$$

и

$$2^\circ \quad \lim_{n' \to \infty} \langle f_m, c^m_{\Lambda_{n'}}(z, \omega, t) \rangle = \langle f_m, c^m_\infty(z) \rangle . \qquad /2.2/$$

Докажем, используя предложение 1.1, что индуктивные предположения 1° и 2° влекут для произвольного $f_{m+1} \in L^1((R^d \otimes \Sigma)^{\otimes m+1})$ равенство

$$3^\circ \quad \lim_{n' \to \infty} \langle f_{m+1}, c^{m+1}_{\Lambda_{n'}}(z, \hat{\omega}, t) \rangle =$$

$$= \langle f_{m+1}, c^{m+1}_\infty(z) \rangle . \qquad /2.3/$$

Чтобы доказать, что 1°+2° влечет за собой 3°, разложим правую часть неравенства /35/ [1] по степеням δ, и проинтегрируем их вместе с функцией f:

$$0 \le \langle f'_m, c^m_{\Lambda_n'}(z)\rangle - \langle f_m, c^m_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t)\rangle \pm$$

$$\pm \delta [\langle f^m \otimes (f_1 \cdot c^1_{\Lambda_n'}(z)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle - \qquad /2.4/$$

$$- \langle f_m \otimes (f_1 \cdot c^1_{\Lambda_n'}(z)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle] + O_{\Lambda_n'}(\delta^2).$$

Если теперь мы сможем доказать, что

$$(*) \quad -\infty < \liminf_{n' \to \infty} O_{\Lambda_n'}(\delta^2) < \infty$$

и является величиной порядка $o(\delta^2)$, тогда разделим обе части равенства /2.4/ на δ и перейдем к пределу $\delta = 0$. Используя /*/ вместе с индуктивным предположением 2°, имеем:

$$0 < \pm \liminf_{(n' \to \infty)} [\langle f \otimes (f^m_1 \cdot c^1_{\Lambda_n}(z,\omega,t)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle -$$

$$- \langle f^m \otimes (f_1 \cdot c^1_{\Lambda_n'}(z), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle]. \qquad /2.5/$$

Напомним, что из корреляционных неравенств, доказанных Фрелихом и Парком в работе [19], следует, что поточечные пределы $c^m_\infty(z|(\hat{x})_m) = \lim_{n\to\infty} c^m_{\Lambda_n}(z|(\hat{x})_m)$ существуют и допускают однородную оценку

$$1 \le c^m_{\Lambda_n'}(z|(\hat{x})_m) \le z^m \exp[\frac{\alpha^2_*}{2} m V(0)]. \qquad /2.6/$$

В частности, отсюда следует, что $c^1_\infty(z|(\hat{x})_1)$ является константой, зависящей от α. Из предложения 2.2 [1], следует, что верхняя оценка /2.6/ остается верной также для $|c^m_{\Lambda_n'}(z,\omega,t|(\hat{x})_m)$.

Заметим, что из оценки /2.6/ и из $f_1 \cdot c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t) \in L^1_\lambda(R^d \otimes \Sigma)$ следует оценка:

$$\| f_1 c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t)\|_{L^1_\lambda(R^d \otimes\Sigma)} \le e^{\frac{\alpha^2_*}{2}V(0)} \|f_1\|_{L^1_\lambda}. \qquad /2.7/$$

Теперь заметим, что:

$$\langle f^m \otimes (f^1 \cdot c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle =$$

$$= \langle f^m \otimes (f^1 \cdot c^1_\infty(z)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle +$$

$$+ \langle f^m \otimes (f^1 (c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t) - c^1_\infty(z)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle. \qquad /2.8/$$

Имея в виду предложение 2.2 [1] и индуктивное предположение 1°, получаем

$$\lim_{n'\to\infty} \langle f^m \otimes (f^1(c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t) - c^1_\infty(z)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z)\rangle| \le$$

$$\le \lim_{n'\to\infty} (e^{(m+1)\frac{\alpha^2_*}{2}V(0)} \| f_m \otimes (f_1 \cdot c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t) - c^1_\infty(z))\|_{L^1_\lambda} \le \qquad /2.9/$$

$$\le e^{(m+1)\frac{\alpha^2_*}{2}V(0)} \cdot \|f^m\|_{L^1_\lambda} \lim_{n'\to\infty} \langle f_1, (c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t) - c^1_\infty(z))\rangle| = 0.$$

Аналогичным образом получаем

$$\lim_{n'\to\infty} |\langle f^m \otimes f^1(c^1_\infty(z) - c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t)), c^{m+1}_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t)\rangle| \le \qquad /2.10/$$

$$\le e^{\frac{(m+1)}{2}\alpha^2_* V(0)} \|f_m\|_{L^1_\lambda} \lim_{n'\to\infty} |\langle f^1, c^1_\infty(z) - c^1_{\Lambda_n'}(z,\hat{\omega},t)\rangle| = 0.$$

Применяя теперь утверждение о монотонной сходимости к остальным членам формулы /2.4/, получаем, что операцию $\liminf_{n'\to\infty}$ можно превратить в $\lim_{n'\to\infty}$. Поэтому получаем

$$\langle f_m \otimes f_1; c^{m+1}_\infty(z) - c^{m+1}_\infty(z,\hat{\omega},t)\rangle = 0. \qquad /2.11/$$

Из-за того, что *-слабая топология есть топология Хаусдорфа и аннулирующее множество конуса положительных элементов в пространстве $L^1_\lambda((R^d \otimes \Sigma)^{\otimes m})$ является тривиальным, окончательно получаем, что $c^{m+1}(z) = c^{m+1}_\infty(z,\hat{\omega},t)$ в смысле пространства $L^\infty_\lambda[(R^d \otimes \Sigma)^{\otimes(m+1)}]$. Нам осталось еще доказать /*/. Для этой цели нужно доказать, что

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \liminf_{n'\to\infty} O_{\Lambda_n'}(\delta)) = 0.$$

Имеется следующая оценка

$$|O_{\Lambda_n'}(\delta^2)| \le \qquad /2.12/$$

$$\le \delta^2 (\sum_{k=2}^{\infty} \frac{|\delta|^{k-2}}{k!} \|f^1\|^k_{L^1_\lambda} C^k_2) \cdot \|f_m\|_{L^1_\lambda} C_1(m).$$

Здесь C_1, C_2 - явно выражаемые через z, $V(0)$ и α_* константы. Оценка /2.12/ прямо следует из верхней оценки /2.6/. Тогда из оценки /2.12/ прямо следует свойство / * /. В итоге мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.1.

Предположим, что $V \in L^1(R^d)$. Возьмем $z>0, \hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$. Пусть $c_\infty(z,\hat{\omega},t)$ будет каким-нибудь вектором, полученным в предл. 2. Если $c^1_\infty(z,\hat{\omega},t) = c^1_\infty(z)$ в смысле пространства $L^\infty_\Lambda(R^d \otimes \Sigma)$, тогда для произвольного $n \geq 1$:

$$c^n_\infty(z,\hat{\omega},t) = c^n_\infty(z)$$

в смысле пространства $L^\infty_\lambda((R^d \otimes \Sigma)^{\otimes n})$.

2.2. Продолжение анализа до ρ^n_Λ.

Симметризованные моменты типа c^n_Λ /либо $\hat{c}^n_\Lambda$ / не определяют полностью термодинамического предела гиббсовской меры $\nu_\Lambda(z,\omega|d\hat{\eta})$. Чтобы восполнить этот пробел, расширим теорему 2.1., включая моменты типа $\{\rho^n_\Lambda\}^\infty_{n=1}$. С этой целью мы снова применим корреляционные неравенства параграфа 2.2.[1]. На протяжении этого параграфа предположим, что $z>0, t \in R^1$ и $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$ выбраны таким способом, что верна теорема 2.1.

Из теоремы 2.1. следует, что существует некоторая вероятностная мера $\mu_\infty(z,\hat{\omega},t|d\phi)$ на пространстве $S'(R^d)$ такая, что

$$\int \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\,\mu_\infty(z,\hat{\omega},t|d\phi) = c^n_\infty(z,\hat{\omega},t|(\hat{x})_n). \qquad /2.13/$$

Из теоремы 2.1 можно легко вывести, что сужение меры $\mu_\infty(z,\hat{\omega},t|d\phi)$ на четную часть σ-алгебры Бореля в пространстве $S'(R)$ совпадает с сужением меры $\mu^z_\infty(z|d\phi)$ на четную часть. Это означает, что взяв любую четную по аргументу ϕ-функцию $F(\phi) \in L^1(\mu^z_\infty)$, имеем

$$\int F(\phi)\mu^z_\infty(d\phi) = \int F(\phi)\mu^z_\infty(z,\hat{\omega},t|d\phi). \qquad /2.14/$$

Используя теперь корреляционные неравенства /3.26/, докажем следующую теорему.

Теорема 2.2.

Предположим, что $V \in L^1(R^d)$. Возьмем $z>0, \hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V), t \in R^1$. Пусть $\{s^{()}\}$ будет каким-нибудь вектором, полученным в предл. 2.1. Тогда, если $c^1_\infty(z,\hat{\omega},t) = c^1_\infty$ в пространстве $L^\infty_\lambda(R^d \otimes \Sigma)$, то для произвольных $n,m \in N$ имеем:

$$s^{n,m}(z,\hat{\omega},t|(\hat{x})_n,(\hat{y})_m) = s^{n,m}_\infty(z|(\hat{x})_n,(\hat{y})_m). \qquad /2.15/$$

Доказательство

Возьмем произвольное число $\alpha \in [0,2\pi)$. Применяя теорему 2.1. и корреляционное неравенство /3.9/[1], получаем:

$$\begin{aligned}
&< \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\sin(\alpha_{n+1}\phi(x_{n+1}) \pm \alpha)>^{(\hat{\omega})}_\infty(z,t) = \\
&= \cos\alpha < \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\cos(\alpha_{n+1}\phi(x_{n+1}))>^{(\hat{\omega})}_\infty(z,t) \pm \\
&\pm \sin\alpha < \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\sin(\alpha_{n+1}\phi(x_{n+1}))>^{(\hat{\omega})}_\infty(z,t) = \\
&= \cos\alpha < \prod_{i=1}^{n+1} c(\phi)(\hat{x}_i)>_\infty(z) \pm \\
&\pm \sin\alpha < \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\sin\alpha_{n+1}\phi(x_{n+1})>^{(\hat{\omega})}_\infty(z,t) \leq \\
&\leq < \prod_{i=1}^{n+1} c(\phi)(\hat{x}_i)>_\infty(z).
\end{aligned} \qquad /2.16/$$

Отсюда прямо следует, что

$$< \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\sin\alpha_{n+1}\phi(x_{n+1})>^{(\hat{\omega})}_\infty(z,t) = 0. \qquad /2.17/$$

Применяя теперь элементарную формулу

$$\sin\alpha\,\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \qquad /2.18/$$

получаем

$$\begin{aligned}
&< \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\prod_{j=1}^m s(\phi)(\hat{y}_j)>^{(\hat{\omega})}_\infty(z,t) = \\
&= < \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)\prod_{j=1}^n s(\phi)(\hat{y}_j)>_\infty(z).
\end{aligned} \qquad /2.19/$$

2.3. Завершение доказательства теоремы 1 [1]

Из предположения 3 теоремы 1 [1] следует, что условные корреляционные функции $\hat{\rho}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\,|\,(\hat{x})_n)$ являются аналитическими и равномерно ограниченными в некоторой окрестности $o(0,i)$. Применяя теорему Витали и результаты параграфа 2.2., получаем, что при предположении

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^d} c^1_\Lambda(z,\hat{\omega},t\,|\,(\alpha,x)) = \lim_{\Lambda\uparrow R^d} c^1_\Lambda(z\,|\,(\alpha,0)) \qquad /2.20/$$

все корреляционные функции $\hat{\rho}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\,|\,(\hat{x})_n)$ сходятся в области $o(0,i)$ к $\rho^n_\infty(z\,|\,(\hat{x})_n)$. Ясно также, что аргументы, использованные в доказательстве теоремы 2.1, можно применить в целой области $o(0,i)$. Это влечет, в свою очередь, слабую сходимость условных мер $\mu_\Lambda(z,\hat{\omega}\,|\,d\phi)$ к мере $\mu^0_\infty(z\,|\,d\phi)$.

Используя известное свойство вогнутых функций и применив предположения 1 и 2, получаем

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^d} \frac{d}{dz} p^{(\hat{\omega})}_\Lambda(z,\zeta)\Big|_{z=z_0} = \lim_{\Lambda\uparrow R^d} \frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda d(\hat{x}) \langle c(\phi)(\hat{x})\rangle^{(\hat{\omega})}_\Lambda(z_0,\zeta) =$$

$$= \frac{d}{dz} p^0_\infty(z)\Big|_{z=z_0} = \lim_{\Lambda\uparrow R^d} \frac{1}{|\Lambda|} \int d(\hat{x}) \langle c(\phi)(\hat{x})\rangle^{\Phi}_\Lambda(z_0) \qquad /2.21/$$

для всех $\zeta \in |(1-\epsilon)i,(1+\epsilon)i|$. Из последнего равенства и предположения 3 следует

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^d} \langle c(\phi)(\hat{x})\rangle^{(\hat{\omega})}_\Lambda(z_0,\zeta) = \langle c(\phi)(\alpha,0)\rangle_\infty(z_0) \qquad /2.21/$$

для ζ, как и выше. Используя предположение 4 и теорему Витали, получим равенство /2.20/. Это завершает доказательство теоремы 1 [1].

3. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Термодинамический предел свободной энергии $p^0_\infty(z)$ является, как хорошо известно, вогнутой функцией аргумента z, кроме, возможно, счетного числа значений z. Более того, в области применимости метода Кирквуда-Зальцбурга $p^0_\infty(z)$ является аналитической функцией z. Из предыдущих замечаний следует, что предположение 1 теоремы 1 [1] верно почти для всех $z \in R^1$.

Независимость термодинамического предела свободной энергии от класса разумных граничных условий является одним из основных законов статистической механики /хотя и можно показать примеры, где это неверно [6] /. При предположениях теоремы 1 [1] относительно потенциала V, можно ожидать, что для разумных граничных условий давление от них не зависит. Некоторые нежелательные результаты могут возникнуть здесь за счет некомпактности пространства $\hat{\Omega}(V)$. Поэтому разумно с самого начала сузить носители предельных мер Гиббса. Меры Гиббса с носителями на множестве Ω^f_∞ назовем предельными мерами Гиббса умеренного роста. Нетрудно проверить, что в случае $V \subset L^1(R^d)$ имеем включение $\hat{\Omega}^f_\infty \subset \hat{\Omega}(V)$. Общая формулировка результата о существовании и независимости $p^{(\hat{\omega})}_\infty(z)$ от $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}^f_\infty$ является темой другой работы. Здесь мы сформулируем несложное предложение по этому вопросу.

Предложение 3.1.

Предположим, что $V \in L^1(R^d)$ и $\hat{V} \in L^1(R^d)$.

1. Пусть для $\omega \in \hat{\Omega}^f_\infty$ выполняется равенство

$$\forall_{0\le z'\le z} \lim_{\Lambda\uparrow R^d} \hat{c}^1_\Lambda(z',\hat{\omega},L\,|\,(\alpha,x)) = c^1_\infty(z'\,|\,(\alpha,0)) \qquad /3.1/$$

для

$\omega \in \Omega^f_\infty$.

Тогда $p^{(\hat{\omega})}_\infty(z)$ существует и равно $p^0_\infty(z)$.

2. Пусть $|z|$ достаточное малое. Тогда $p^{(\hat{\omega})}_\infty(z)$ существует для произвольного $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}^f_\infty$ и равняется $p^0_\infty(z)$.

Доказательство

Очевидно следующее равенство:

$$p^{(\hat{\omega})}_\Lambda(z) = \frac{1}{|\Lambda|} \int_\Lambda d(\hat{x}) \int_0^z \hat{c}^1_\Lambda(z',\hat{\omega},i\,|\,(\hat{x}))\,dz'. \qquad /3.2/$$

Из этого равенства с помощью предположения /3.1/ и применения теоремы мажорированной сходимости получаем

$$\lim_{\Lambda\uparrow R^d} |p^{(\hat{\omega})}_\Lambda - p^{(\Phi)}_\Lambda| = \lim_{\Lambda\uparrow R^d} \frac{1}{|\Lambda|} \Big| \int d(\hat{x}) \int_0^z (\hat{c}^1_\Lambda(z',\hat{\omega},i\,|\,(\hat{x})) - c^1_\Lambda(z'\,|\,(\hat{x})_n)\,dz' = 0. \qquad /3.3/$$

Доказательство утверждения 2 следует прямо из сформулированной ниже теоремы 3.1 и первой части этого предложения. Предположение 3 теоремы 1 [1] связано с возможным явлением спонтанного нарушения трансляционной инвариантности. Некоторые результаты относительно этой проблемы получены в работах [7]. Некоторые критерии отсутствия спонтанного нарушения трансляционной инвариантности можно сформулировать для рассматриваемых в этой работе систем. Однако в последующих применениях теоремы 1 [1] мы ограничимся трансляционно-инвариантными предельными мерами Гиббса.

Наиболее сложным этапом в применении теоремы 1 [1] является проверка предположения 4 [1]. Возможны некоторые модификации этого условия. Отметим одну из них. Метод аналитического продолжения, описанный при формулировке теоремы 1 [1], влечет за собой необходимость исследовать расположение нулей статистической суммы как функции ζ. Это, по-видимому, является очень сложной проблемой. Однако ее можно обойти следующим путем. Проведем аналитические продолжения только в числителе формулы /2.4/ [1] /:

$$d\tilde{\mu}_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\mid d\phi)=$$

$$=\frac{1}{Z_\Lambda(z,\hat{\omega})}\exp\Big(z\int_\Lambda d(x):\cos(a\phi(\hat{x})+\zeta\,\mathcal{E}((\hat{x})\mid\hat{\omega}(\Lambda^c)):\Big)\cdot\mu^0_V(d\phi).\qquad /3.4/$$

Тогда для $\zeta\in R^1$ применимы все результаты параграфов 2 и 3. Имея в виду теорему Витали, можем теперь сформулировать условие 4 теоремы 1 [1] следующим образом:

4' существует окрестность $o(0,i)$ комплексной плоскости C^1, содержащая точки $\zeta=i$ и $\zeta=0$, в которую можно аналитически продолжить все условные корреляционные функции

$$\tilde{\rho}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\mid(\hat{x})_n)=\frac{1}{Z_\Lambda(z,\hat{\omega})}\cdot z^n\exp(i\zeta\,\mathcal{E}((\hat{x})_n\mid\hat{\omega}(\Lambda^c)))\cdot$$

$$\cdot\int\mu^0_V(d\phi)\exp\Big(z\int_\Lambda d(\hat{x}):\cos(a\phi(x)+\zeta\,\mathcal{E}((\hat{x})\mid\hat{\omega}(\Lambda^c)):\cdot\qquad /3.5/$$

$$\cdot\prod_{i=1}^{n}:\exp(i a_i\phi(x_i)):.$$

В области $o(0,i)$ верны равномерные оценки вида:

$$\sup_{\substack{\zeta\in o(0,i)\\ \Lambda}}|\tilde{\rho}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\mid(\hat{x}))|\le\xi_n((\hat{x})_n)<\infty,\qquad /3.6/$$

где ξ_n - некоторые константы.

В области применимости метода Кирквуда-Зальцбурга можно проверить это условие. Интегрируя по частям в /3.5/, получим уравнения типа уравнения Кирквуда-Зальцбурга для корреляционных функций

$$\tilde{\rho}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta)=z\exp(i\zeta\,\mathcal{E}((\hat{x})_n\mid\hat{\omega}(\Lambda^c)))\cdot$$

$$\cdot\exp(-\mathcal{E}((\hat{x})_1\mid(\hat{x})_n-(\hat{x})_1)\cdot$$

$$\cdot\int\tilde{\mu}_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\mid d\phi)\exp[z\int_\Lambda d(\hat{x}):e^{ia\phi(x)}:\cdot\qquad /3.7/$$

$$\cdot(e^{i\zeta\mathcal{E}((\hat{x})\mid\hat{\omega}(\Lambda^c))}\cdot e^{-\mathcal{E}((\hat{x})\mid(\hat{x})_1)}-1)]\cdot$$

$$\cdot\prod_{i=2}^{n}:e^{ia_i\phi(x_i)}:.$$

Используя стандартную методику, можно теперь сформулировать следующий результат.

Лемма 1.4.

Предположим, что $V\in L^1(R^d)$, $\hat{V}\in L^1(R^d)$. Пусть $|z|$ достаточно мало. Тогда существуют константы ξ_n такие, что для $\hat{\omega}\in\hat{\Omega}^f_\infty$:

$$|\chi_\Lambda(x_n)\tilde{\rho}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta\mid(\hat{x})_n)|\le\xi_n$$

равномерно по Λ i $\zeta\in o(0,i)$.

Таким способом мы получили следующую теорему:

Теорема 3.1

Предположим, что $V\in L^1(R^d)$, $\hat{V}\in L^1(R^d)$. Пусть $|z|$ достаточно мало. Тогда множество $T_G^T(z)$ предельных мер Гиббса умеренного роста, которое трансляционно-инвариантно, состоит не более чем из одного элемента.

Заметим, что теорема 3.1 следует также из результатов работы [5]. Дальнейшие применения теоремы 1 [1] являются темой последующей работы.

В заключение хочу выразить свою признательность В.А.Загребнову за ценные замечания по поводу вопросов, затронутых в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гелерак Р. ОИЯИ, P17-85-770, Дубна, 1985.
2. Gielerak R., Fortschr.der.Phys., 1981, 29 (1), p.19.
3. Dimock J., Glimm J., Adv. in Math., 1974, 72, p.58
4. Ruelle D., Comm. Math.Phys., 1970, 18, p.127.
5. Загребнов В.А., ТМФ, 1982, 51/3/, с.389.
6. Lenard A.J. Journ.Math.Phys., 1963, 4, p.533.
7. Fröhlich J., Ch.-E Pfister, Comm.Math.Phys., 1981,81,p.277.
8. Gruber Ch., Martin P.A. Phys.Rev.Lett., 1980, 45, p.853. Ann. of Phys., 1981, 131, p.56.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1985 года.

Гелерак Р.

P17-85-771

Уравнения Д-Л-Р для класса непрерывных систем с положительно определенным парным взаимодействием. Следствия из корреляционных неравенств

Исследуются некоторые следствия, вытекающие из корреляционных неравенств типа неравенств Жинибра для класса непрерывных классических систем частиц, взаимодействующих с помощью положительно определенного парного потенциала.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Gielerak R.

P17-85-771

DLR Equations for a Class of Continual Systems with Positively Defined Two-Body Interactions. Consequences of the Correlation Inequalities

Equilibrium equations by Dobrushin-Lanford and Ruelle are investigated for a class of continual systems of particles interacting via a two-body pair potential of positive type. Creterion for the independence of the limit Gibbs states on the external configuration is formulated. Consequences of some correlation inequalities of the Ginibre type are investigated here. In particular the bootstrap principle is formulated for the correlation functions, which reduce the problem to the question about independence of the infinite volume free energy of the boundary conditions and some technical estimates on the conditioned correlation functions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985