сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-85-770

Р.Гелерак

УРАВНЕНИЯ Д-Л-Р ДЛЯ КЛАССА НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ С ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫМ ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Корреляционные неравенства

1985

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время исследуются два фундаментальных подхода к математическим основаниям общей теории фазовых переходов в случае непрерывных классических систем. Первый, намеченный еще в 1942 году Майером[1], предлагает провести спектральный анализ оператора Кирквуда - Зальцбурга[2]. Некоторые результаты в этом направлении получены в работах[2,3-7].

Второй подход опирается на анализ фундаментальных равновесных уравнений типа уравнений Добрушина - Ланфорда - Рюеля[8-11]. Некоторые общие положения о существовании и единственности равновесных распределений Гиббса в рамках канонического и большого канонического ансамблей были получены в работах[11-16].

Нейтральные системы частиц, взаимодействующих с помощью положительно определенного парного потенциала, - это класс модельных систем, где недавно получены очень интересные строгие результаты[17-24]. Этот класс моделей очень широк и содержит наиболее интересные с физической точки зрения системы, такие, как /регуляризованные/ газы Кулона или Юкавы. Проблемы существования предельной меры[17-19], строгий анализ экранирования Дебая[20], фазовые переходы типа переходов Березинского - Костерлица - Таулесса[21], правила сумм[22], проблема Θ-вакуума[23], единственность и /почти/ марковское глобальное свойство[24] можно исследовать строго, используя описание большого канонического ансамбля Гиббса через функциональные интегралы.

В нашей работе мы наметим перспективы новой стратегии решения проблемы единственности предельной гиббсовской меры в рамках большого канонического ансамбля для этого класса модельных систем. Мы доказываем новый критерий единственности трансляционно-инвариантных, предельных распределений Гиббса. Доказываемый ниже критерий сводит, по-существу, задачу единственности предельного трансляционно-инвариантного гиббсовского состояния к задаче о независимости одночастичной корреляционной функции от граничных условий. Эта задача, в свою очередь, сводится к задаче о независимости давления от граничных условий. Такой результат переносит в непрерывную область хорошо известные критерии единственности[25], сформулированные для случая решеточных систем с компактным пространством спинов. Так же, как и в работах[26], мы используем некоторые корреляционные неравенства типа неравенств Жинибра. Неравенства такого же типа были открыты при анализе спиновой модели $X-Y$[25], а потом применены для анализа равновесных уравнений Д-Л-Р в некотором широком классе абелевых спиновых систем[26].

1. ВВОДНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

1.1. Рассматриваемые системы

Системы, рассматриваемые в этой работе, - это классические непрерывные системы частиц, взаимодействующих с помощью положительно определенного парного потенциала. Частицы имеют внутренние степени свободы, которые занумерованы точками a некоторого вещественного векторного пространства Σ. Потенциальная энергия взаимодействия между частицей, находящейся в точке $x \in R^d$ во внутреннем состоянии a, и частицей в точке $x' \in R^d$ в состоянии a', задается функцией $V(a, x; a', x')$, определенной на множестве $(\Sigma \otimes R^d)^{\otimes 2}$.

В этой работе мы предполагаем, что функция V положительно определена на $(\Sigma \otimes R^d)^{\otimes 2}$. Распространение внутренних степеней свободы задается с некоторой конечной мерой λ. Для простоты предположим, что $\Sigma = R^1$, и что мера $d\lambda$ удовлетворяет следующим условиям: а/ λ имеет компактный носитель; б/ $\lambda(R^1) < \infty$; в/ $d\lambda(-a) = d\lambda(a)$. В случае, когда V удовлетворяет соотношению

$$V(a, x; a', x') = -V(-a, x; a', x'), \qquad /1.1/$$
$$= -V(a, x; -a', x'),$$

а λ обладает свойством в/, систему назовем нейтральной. В этой работе рассматриваются только нейтральные системы частиц.

Дальнейшее упрощение состоит в том, что мы предполагаем следующий вид функций V:

$$V(a, x; a', x') = a \cdot a' \, V(x - x'), \qquad /1.2/$$

причем

$$0 \leq \hat{V}(k) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int e^{-ikx} V(x) \in L^1(R^d). \qquad /1.3/$$

Все эти упрощения несущественны для получаемых результатов и сделаны только для сокращения обозначений. Примем также стандартные обозначения:

$$\hat{x} = (a, x), \quad (\hat{x})_n = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) = ((a_1, x_1), \dots, (a_n, x_n))$$

$$d(\hat{x})_n = \prod_{i=1}^{n} dx_i \, d\lambda(a_i), \quad d(x)_n = \prod_{i=1}^{n} dx_i \qquad /1.4/$$

$$a_* = \sup\{ a \quad a \in \mathrm{supp}\, \lambda \}.$$

1.2. Конфигурационные пространства для большого канонического ансамбля

Обозначим через $\hat{\Omega} \subset (R^d \otimes \Sigma)^{\infty}/_{\infty}$ множество локально конечных конфигураций. Через $\hat{\omega}(\Lambda)$ обозначим сужение конфигурации $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}$ на множество $\Lambda \subset R^d$, а $|\hat{\omega}(\Lambda)|$ означает число частиц конфигурации $\hat{\omega}$, находящихся в Λ. Для ограниченного борелевского множества $\hat{\Lambda} \subset \Sigma \quad R^d$ обозначим через $\mathcal{F}(\Lambda)$ наименьшую σ-алгебру, порожденную множествами вида $\{\Omega_{\Lambda', k} = |\Lambda' \subset \Lambda$, Λ' - ограниченное и борелевское множество, $k \in N\}$, где $\hat{\Omega}_{\Lambda, k} = \{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} \mid |\hat{\omega}(\Lambda)| = k\}$. Тогда из работы /27/ легко следует, что на множестве $\hat{\Omega}$ можно определить польскую топологию, для которой борелевская σ-алгебра совпадает с σ-алгеброй $\mathcal{F}(R^d)$. Важное свойство введенных выше σ-алгебр состоит в том, что $\mathcal{F}(R^d \otimes \Sigma) = \mathcal{F}(\Lambda \otimes \Sigma) \otimes \mathcal{F}(\Lambda^c \otimes \Sigma)$. Для произвольного борелевского множества $\Lambda \subset R^d$. В этой работе будут часто использованы два борелевских подмножества для заданного парного потенциала /см. пункт 1.1/. Определим борелевское подмножество $\hat{\Omega}(V)$ пространства $\hat{\Omega}$: $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V) \Leftrightarrow$ для произвольного ограниченного $\Lambda \subset R^d$ существует конечная константа $G_\Lambda(\hat{\omega})$ такая, что

$$\sup_{\hat{x} \in \Sigma \otimes \Lambda} \Big| \sum_{y \in \hat{\omega}(\Lambda^c)} a_x a_y V(x-y) \Big| \leq G_\Lambda(\hat{\omega}). \qquad /1.5/$$

В дальнейшем используем следующее сокращение:

$$\mathcal{E}_{(\Lambda)}(\hat{\omega}_1 \mid \hat{\omega}_2) = \sum_{\hat{x} \in \hat{\omega}_1(\Lambda)} \sum_{\hat{y} \in \hat{\omega}_2(\Lambda)} a_x \cdot a_y V(x-y). \qquad /1.6/$$

Второе борелевское подмножество пространства $\hat{\Omega}$, которое часто будет появляться в работе, - это множество $\hat{\Omega}^f_\infty$ конфигураций с конечной плотностью частиц на бесконечности. Напомним это определение. Для произвольного натурального числа $d \geq 0$ определим $\hat{\Omega}^d_\infty$ условием: $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}^d_\infty \Leftrightarrow$ существует ограниченное множество $\Lambda(\omega) \subset R^d$ такое, что для произвольного единичного куба $\Delta \subset \Lambda^c(\hat{\omega})$ имеем $|\hat{\omega}(\Delta)| \leq d$. Тогда множество $\hat{\Omega}^f_\infty$ определяется как $\hat{\Omega}^f_\infty = \bigcup_{d \geq 0}^{\infty} \hat{\Omega}^d_\infty$.

1.3. Равновесные меры Гиббса большого канонического ансамбля

На измеримом пространстве $\{\hat{\Omega}, \mathcal{F}(\Sigma \otimes R^d)\}$ существует единственная мера π_0 такая, что для произвольных множеств $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n; \Lambda_i \dots \Lambda_j =$ случайные величины $(\hat{\omega}(\Lambda_1), \dots, |\hat{\omega}(\Lambda_n)|)$ независимы и имеют математические ожидания, равные $z \cdot |\hat{\omega}(\Lambda_1)|; |\hat{\omega}(\Lambda_n)|$ соответственно, где через z обозначим активность. Мера π_0 - это известное поле Пуассона /28/ на $\{\hat{\Omega}, \mathcal{F}(R^d)\}$. Условная мера Гиббса большого канонического ансамбля системы в ограниченном, регулярном множестве $\Lambda \subset R^d$ - это вероятностная мера $\nu_\Lambda(d\hat{\eta}|\hat{\omega})$, заданная на $\{\hat{\Omega}, \mathfrak{F}(R^d \otimes \Sigma)\}$ и определенная полностью через свою производную Радона - Никодима относительно меры $\pi_0 / \mathfrak{F}(\Lambda)$

$$\frac{d\nu_\Lambda(d\hat{\eta}|\Omega\hat{\omega})}{d\pi_0|\mathfrak{F}(\Lambda)} = Z_\Lambda^{-1}(z,\omega)\exp(\mathcal{E}(\hat{\eta}(\Lambda)|\hat{\omega}(\Lambda^c))), \tag{1.7}$$

$$Z_\Lambda(z,\hat{\omega}) = \int_{\hat{\Omega}} \pi_0|_{\mathfrak{F}(\Lambda)}(d\hat{\eta})\exp(\mathcal{E}(\hat{\eta}|\hat{\omega}(\Lambda^c))).$$

Мерой Гиббса большого канонического ансамбля частиц при заданных $\{z, V, d\lambda\}$ будем называть всякую вероятностную меру $\nu_\infty(d\eta)$ на пространстве $\{\hat{\Omega}, \mathfrak{F}(R^d)\}$, такую, что: а/ ν_∞ имеет носитель на множестве $\hat{\Omega}(V)$; б/ условные вероятности меры ν_∞ относительно локальной σ-алгебры $\mathfrak{F}(\Lambda^c)$ задаются формулами /1.7/. Обозначим через $\mathcal{G}(z)$ множество всех мер Гиббса при заданных z, V и λ. Принципиальный вопрос равновесной статистической механики - это вопрос о детальном описании множества $\mathcal{G}(z)$.

Лемма 1.1 [19]

Пусть $z \geq 0$, и предположим, что $\hat{V} \in L^1(R^d)$. Тогда $\mathcal{G}(z)$ есть непустое множество.

Доказательство

Из корреляционных неравенств, доказанных в работе [19], верных при пустых граничных условиях, следует существование поточечных пределов корреляционных функций. Применяя технику, описанную в параграфе 3.1 работы [33], можем повысить эту сходимость до одномерной сходимости на компактах. Тогда из теоремы Рюеля [12] следует, что меры Гиббса $\nu_\Lambda(d\eta|\phi)$ сходятся в смысле слабой сходимости к некоторой предельной мере $\nu_\infty^0(z|d\hat{\eta})$.

Следующий результат дает некоторую информацию о носителе меры $\nu_\infty^0(z|d\hat{\eta})$. Определим функцию $J: \hat{\Omega} \to R_+$ на множестве $\hat{\Omega}$:

$$J(\hat{\omega}) = \max\{1, \sup_x \sup_{r > f(x)} \frac{|\hat{\omega}(B(x,r))|}{r}\},$$

где $f(x) = \max\{\operatorname{Ln}|x|, 1\}$, а $B(x,r)$ - шар радиуса r с центром в точке $x \in R^d$.

Предложение 1.2

Пусть $z \geq 0$, $\hat{V} \in L_1(R^d)$ будет парным потенциалом. Тогда предельная мера Гиббса сосредоточена на множестве: $\Omega^* = \{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} | J(\hat{\omega}) < \infty\}$.

Доказательство

В работе [19] получена оценка на корреляционные функции $\rho_\infty^n(z|(\hat{x})_n)$ предельной меры $\nu_\infty^0(z|d\eta)$ типа

$$0 \leq \rho_\infty^n(z|(\hat{x})_n) \leq c^n, \tag{1.8}$$

где c - некоторая константа, зависящая от z, α и $V(0)$. Возьмем теперь произвольное ограниченное множество $\Xi \subset {}^*R^d$. Тогда из оценки /1.8/ получим:

$$\nu_\Lambda((z,\phi)\{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} \mid |\hat{\omega}(\Xi)| = n\}) \leq \frac{c^n}{n!}|\Xi|^n, \tag{1.9}$$

откуда легко следует оценка:

$$\int_{\hat{\Omega}} \nu_\Lambda(z,\phi|d\hat{\eta})\exp(|\hat{\omega}(\Xi)|) \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}e^n|\Xi|^n = e^{3c|\Xi|}, \tag{1.10}$$

равномерная по Λ.

Применяя неравенство Чебышева, получим:

$$\forall_{a \in R_+} \nu_\infty^0(z)\{\hat{\omega} \mid |\hat{\omega}(B(x,r))| > ar\} \leq \exp(r(3rc - a)). \tag{1.11}$$

Поэтому

$$\nu_\infty^0(z)\{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} \mid J(\omega) \geq a\}$$

$$\leq \nu_\infty^0(z)(\bigcup_{x \in Z^d} \bigcup_{\substack{n \in N \\ n > f(x)}} \{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} \mid |\hat{\omega}(B(x,n))| > an\}) \tag{1.12}$$

$$\leq \sum_{x \in Z^d}\sum_{n \geq f(x)} \exp(n(3nc - a)).$$

Тогда из неравенства /1.9/ следует, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \nu_\infty^0(z)\{\hat{\omega} \in \hat{\Omega} \mid J(\omega) > an\} < \infty. \tag{1.13}$$

Поэтому, применив лемму Бореля - Кантелли, получим $\nu_\infty^0(z)\{\Omega^*\} = 1$.

1.4. Основной результат работы

Все гиббсовские меры, находящиеся в множестве $\mathcal{G}(z)$, можно получить, взяв выпуклые оболочки пределов $\lim_{\Lambda \uparrow R^d} \nu_\Lambda(z,\hat{\omega}|d\hat{\eta})$, когда $\hat{\omega}$ пробегает объединение носителей мер из множества $\mathcal{G}(z)$.

Исследование термодинамических пределов условных мер Гиббса $\nu_\Lambda(z,\hat\omega \,|\, d\hat\eta)$ эквивалентно исследованию термодинамических пределов корреляционных функций. Методом корреляционных неравенств задача о зависимости предельных корреляционных функций будет сведена к задаче о зависимости одночастичной корреляционной функции от граничных условий. Сформулируем теперь основной результат. Обозначим через Σ^* следующую комплексификацию пространства Σ внутренних состояний нашей системы. $\Sigma^* = \{\zeta \cdot \Sigma = |\zeta \cdot \alpha|\}$, где ζ пробегает некоторое открытое множество Q в комплексной плоскости. Предположим, что множество Q подобрано таким образом, что имеют смысл аналитические продолжения условных корреляционных функций $\rho^n_\Lambda(z,\omega \,|\, (\hat x)_n)$ /см. определение в § 3.1/ точки $\{\hat{x}_L = (\zeta \alpha_L, x_L)\}$. Эти продолжения обозначим через $p^0_\infty(z)$
Через $p^0_\infty(z)$ обозначим термодинамический предел свободной энергии при наличии нулевых граничных условий. Определим также

$$p^{(\hat\omega)}_\infty(z;\zeta) = -\lim_{\Lambda \uparrow R^d} \frac{1}{|\Lambda|} \operatorname{Ln} Z_\Lambda(z,\hat\omega,\zeta)$$

$$= \lim_{\Lambda \uparrow R^d} \frac{1}{|\Lambda|} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_\Lambda d(\hat x)_n \; e^{\mathcal{E}((\hat x)_n | (\hat x)_n)} \; e^{-i\zeta \mathcal{E}((\hat x)_n | \hat\omega(\Lambda^c))}$$

Предполагая, что граница в правой части существует, основной результат настоящей работы сформулируем в следующей теореме.

Теорема 1

Пусть $\operatorname{card}\Sigma = 2$.

Предположим, что парный положительно определенный потенциал V такой: $V \in L^1(R^d)$ и $\hat V \in L^1(R^d)$. Пусть $\hat\omega \in \hat\Omega(V)$, $z_0 > 0$ такие, что: $1/p^0_\infty(z)$ дифференцируема в точке $z = z_0$; 2/ $\rho^{(\hat\omega)}_\infty(z_0,\zeta) = p^0_\infty(z_0)$ для $\zeta \in [(-1+\epsilon)i, (1+\epsilon)i]$ и для некоторого $\epsilon > 0$; 3/ одночастичная корреляционная функция $\rho^1_\infty(z_0, \hat\omega \,|\, (\hat x)_1)$ существует и трансляционно-инвариантна; 4/ существует связная окрестность $O(0,i)$ в комплексной плоскости $\mathbf{C}^1$, содержащая точки $\zeta = 0$ и $\zeta = i$, в которую продолжаются все условные корреляционные функции $\{\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,\zeta)\}_{n=1}^\infty$ и в которой мы имеем одномерные по ζ и объему Λ оценки типа:

$$\sup_{\substack{(\hat x)_n \in (\Lambda\times\Sigma)^n \\ \zeta \in O(0)\, i)}} |\rho^n_\Lambda(z,\hat\omega,\zeta \,|\, (\hat x)_n| \le \zeta_n , \qquad /1.15/$$

где ζ_n - некоторые абсолютные константы. Тогда термодинамический предел в смысле слабой сходимости условной гиббсовской меры $\nu_\Lambda(z,\hat\omega,d\hat\eta)$ существует и равен $\nu^0_\infty(z \,|\, d\eta)$. Детальную дискуссию всех предположений этой теоремы читатель найдет в /33/. Находим также детальное доказательство теоремы, основанное на корреляционных неравенствах, доказанных в этой работе.

2. БОЛЬШОЙ КАНОНИЧЕСКИЙ АНСАМБЛЬ В ТЕРМИНАХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ /ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИНУС-ГОРДОНА/

Предположим, что

$$V(f,g) = \int dx\,dy\, f(x)\, V(x-y)\, g(y) \qquad /2.1/$$

определяет билинейную, непрерывную, положительно определенную формулу на ядерном пространстве Шварца $S(R^d)$. Тогда из теоремы Минлоса следует, что существует единственная мера Гаусса $\mu^0_V(d\phi)$ на дуальном пространстве обобщенных функций умеренного роста $S'(R^d)$, характеристический функционал Γ^0_V которой определяется формулой:

$$\Gamma^0_V(f) = \int_{S'(R^d)} \mu^0_V(d\phi)\, e^{i\phi(f)} = \exp - \frac{1}{2} V(f,f). \qquad /2.2/$$

При наличии регулярного граничного условия $\hat\omega \in \hat\Omega(V)$ большая статистическая сумма

$$Z_\Lambda(z,\hat\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Lambda^n} d(\hat x)_n \exp(\mathcal{E}((\hat x)_n \,|\, (\hat x)_n)) \qquad /2.3/$$
$$\exp(\mathcal{E}(\hat x)_n \,|\, \hat\omega(\Lambda^c)))$$

может быть выражена через следующий функциональный интеграл:

$$Z_\Lambda(z,\omega) = \frac{\int_{S'(R^d)} \mu^0_V(d\phi) \exp\left(z \int_\Lambda d(\hat x)\, c(\phi)(\hat x)\right) \prod_{y \in \omega(\Lambda^c)} :e^{i\alpha_y \phi(y)}:}{\int_{S'(R^d)} \mu^0_V(d\phi) \prod_{\hat y \in \hat\omega(\Lambda^c)} :e^{i\alpha_y \phi(y)}:} . \qquad /2.4/$$

В формуле /2.4/ мы использовали свойство нейтральности /1.2/ и следующие сокращения:

$$c(\phi)(x) = :\cos\alpha\phi(x): = e^{\frac{\alpha^2}{2} V(0)} \cos\alpha\phi(x)$$

$$:e^{i\alpha\phi(x)}: = e^{\frac{\alpha^2}{2} V(0)}\, e^{i\alpha\phi(x)} . \qquad /2.5/$$

Подынтегральные выражения в формуле /2.4/ содержат бесконечные произведения типа $\prod_y :e^{i\alpha_y \phi(y)}:$, поэтому нужна некоторая аппроксимационная процедура, чтобы строго обосновать формулу /2.4/. Это можно сделать следующим образом. В случае произвольного ограниченного и регулярного $\Lambda \subset R^d$ возьмем некоторую последовательность $\tilde\Lambda_n \subset R^d$, о которой сделаем предположение, что $\tilde\Lambda_n \subset \Lambda^c$ для всех n и $\tilde\Lambda_n \uparrow \Lambda^c$ в смысле монотонной сходимости. Определим также $\hat\omega_{\tilde\Lambda_n}(\Lambda^c) = \hat\omega(\tilde\Lambda_n - \Lambda)\cap\hat\omega(\Lambda^c)$. Тогда правую сторону равенства /2.4/ определим как:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int\mu_V^0(d\phi)\exp(z\int d(x)\,c(\phi)(\hat x))\prod\limits_{y\in\hat\omega_{\tilde\Lambda_n}(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:}{\int\mu_V^0(d\phi)\prod\limits_{y\in\hat\omega_{\tilde\Lambda_n}(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:}\qquad /2.6/$$

Везде, где мы будем иметь дело с бесконечным произведением $\prod_y :e^{i\alpha_y\phi(y)}$, подразумевается определенная выше аппроксимационная процедура. n-частичные корреляционные функции большого канонического ансамбля системы, замкнутой в ограниченном множестве Λ, при наличии внешней конфигурации $\hat\omega\in\Omega(V)$:

$$\rho_\Lambda^n(z,\hat\omega\,|\,(\hat x)_n) = Z_\Lambda^{-1}(z,\omega)\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{m+n}}{m!}\int d(\hat y)_m =$$

$$\times\exp(\mathcal{E}((\hat x)_n\cup(\hat y)_m\,|\,(\hat x)_n\cup(\hat y)_m))\qquad /2.7/$$

$$\times\exp(\mathcal{E}((\hat x)_n\cup(\hat y)_m\,|\,\hat\omega(\Lambda^c)))$$

можно переписать с использованием функциональных интегралов следующим образом:

$$\rho_\Lambda^n(z,\omega\,|\,(\hat x)_n) = \frac{z^n\int\mu_V^0(d\phi)\exp(z\int_\Lambda d(\hat x)\,c(\phi)(\hat x))\prod\limits_{i=1}^{n}:e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:\prod\limits_{y\in\omega(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:}{\int\mu_V^0(d\phi)\exp(z\int_\Lambda d(\hat x)\,c(\phi)(\hat x))\prod\limits_{\hat y\in\hat\omega(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:}\qquad /2.8/$$

$$=\hat Z_\Lambda^{-1}(z,\omega)\,z^n\int\mu_V^0(d\phi)\prod_{i=1}^{n}:e^{i\alpha_i\phi(x_i)}\,:e^{z\int_\Lambda c(\phi)(\hat x)\,d(\hat x)}$$

$$\cdot\prod_{y\in\omega(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:\,.$$

Здесь, по определению,

$$\hat Z_\Lambda(z,\hat\omega) = \int\mu_V^0(d\phi)\exp(z\int_\Lambda d(\hat x)\,c(\phi)(\hat x))\prod_{y\in\hat\omega(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:\qquad /2.9/$$

Следующую формулу интегрирования по частям экспоненты для всякого $F\in L_1(\mu_V^0)$:

$$\int F(\phi)\,e^{i\phi(f)}\,\mu_V^0(d\phi) = \exp(-\tfrac{1}{2}\|f\|_V^2)\int F(\phi+if*V)\,\mu_V^0(d\phi)\qquad /2.10/$$

можно просто доказать, используя свойство квазиинвариантности гауссовой меры $\mu_V^0(d\phi)$, где, по определению, через * обозначена свертка и $\|f\|_V^2 = V(f,f)$. Применяя последовательно формулу /2.10/, получим возможность проинтегрировать по частям все экспоненты из произведения $\prod_{y\in\omega(\Lambda^c)}:e^{i\alpha_y\phi(y)}:$ в формулах /2.3/ и /2.9/. Таким путем мы получаем:

$$Z_\Lambda(z,\hat\omega) = \int\mu_V^0(d\phi)\exp(z\int_\Lambda d(\hat x):\cos(\alpha\phi(x)+i\mathcal{E}((\hat x)\,|\,\hat\omega(\Lambda^c)):),$$

$$\rho_\Lambda^n(Z,\hat\omega\,|\,(\hat x)_n) = z^n\,e^{-\mathcal{E}((\hat x)_n|\hat\omega(\Lambda^c))}\times\qquad /2.11/$$

$$\times\int\mu_V(d\phi\,|\,z,\hat\omega)\prod_{i=1}^{n}:e^{i\alpha_i\phi(x_i)}:$$

Здесь для сокращения введем обозначение $\mu_\Lambda(d\phi\,|\,z,\hat\omega)$ для следующей вероятностной меры на $S'(R^d)$:

$$\mu_\Lambda(d\phi\,|\,z,\hat\omega) = Z_\Lambda^{-1}(z,\hat\omega)\exp(z\int_\Lambda d(\hat x)\cos(\alpha\phi(x)+i\mathcal{E}(\hat x\,|\,\hat\omega(\lambda^c))):.\qquad /2.12/$$

В дальнейшем будем использовать следующие сходные с /2.11/ и /2.12/ выражения

$$Z_\Lambda(z,\hat\omega,\zeta) = \int\mu_V^0(d\phi)\exp(z\int_\Lambda d(\hat x):\cos(\alpha\phi(x)+\zeta\mathcal{E}(\hat x\,|\,\hat\omega(\Lambda^c))):),\qquad /2.13/$$

где ζ обозначает комплексную переменную. В случае $\hat\omega\in\hat\Omega(V)$ несложно доказать, что формула /2.13/ определяет некоторую целую функцию переменной ζ. Для нас, однако, наиболее существенным является вопрос о размещении нулей этой функции. Беря $\zeta = t\in R^1$ и применяя неравенство Иенсена, получаем оценку:

$$Z_\Lambda(z,\hat\omega,t)\ge\exp z\int_\Lambda d(\hat x)\cos t\,\mathcal{E}(\hat x\,|\,\hat\omega(\Lambda^c))$$

$$\ge\exp -z\int_\Lambda d(\hat x).\qquad /2.14/$$

откуда следует, что существует некоторая окрестность $O_r(z,\hat\omega)$

вещественной оси $\mathrm{Re}\,\zeta$ зависящая, вообще говоря, от $z, \hat{\omega}$ и Λ, где функция $Z_\Lambda(z,\hat{\omega},t)$ не имеет нулей.

Возьмем теперь $\zeta = it$. Тогда, используя формулу /2.3/, получаем оценку при $z \geq 0$:

$$Z_\Lambda(z,\hat{\omega},it) \geq 1 + z \int d(\hat{x}) \exp(-\mathcal{E}(\hat{x} | \hat{\omega}(\Lambda^x)) + O(z^2) \geq 1. \qquad /2.15/$$

Из оценки /2.15/ следует существование окрестности $o_J(z,\hat{\omega},\Lambda)$ мнимой оси $\mathrm{Im}\,\zeta$, в которой отсутствуют нули статистической суммы $Z_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta)$. Поэтому для $\zeta \in o_r(z,\hat{\omega},t) \cup o_J(z,\hat{\omega},\Lambda)$ можно определить аналитическое продолжение меры $\mu_\Lambda(d\phi|z,\hat{\omega})$:

$$\mu_\Lambda(d\phi | z,\hat{\omega},\zeta) = \frac{1}{Z_\Lambda(z,\hat{\omega},\zeta)} \exp(z \int_\Lambda d(\hat{x}) : \cos(\alpha\phi(x) + \zeta\, \mathcal{E}(\hat{x})\, \hat{\omega}(\Lambda^c))) :) \qquad /2.16/$$

$$\times\, \mu^0_V(d\phi).$$

Как увидим в дальнейшем, методом корреляционных неравенств можно исследовать термодинамические пределы на вещественной оси $\mathrm{Jm}\,\zeta = 0$. Сужения мер /2.16/ на $\mathrm{Jm}\,\zeta = 0$ обозначим через: $\mu_\Lambda(d\phi | z,\hat{\omega},t)$.

3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА НЕРАВЕНСТВ ЖИНИБРА

Определим следующие моменты меры:

$$c^n_\Lambda(z,\hat{\omega},t) | (\hat{x})_n) = \int \hat{\mu}_\Lambda(d\phi | z,\hat{\omega},t) \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i)$$

$$c^{n,m}(z,\hat{\omega},t | (\hat{x})_n, (\hat{y})_m) \equiv$$

$$= \int \hat{\mu}_\Lambda(d\phi | z,\hat{\omega},t) \cdot \prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i) \prod_{j=1}^m s(\phi)(y_j) \qquad /3.1/$$

$$\rho^n_\Lambda(z,\hat{\omega},t) \quad |(\hat{x})_n) = \int \hat{\mu}_\Lambda(d\phi | z,\hat{\omega},t) \prod_{i=1}^n : e^{i\alpha_i \phi} : (x_i) \qquad /3.2/$$

$$\hat{c}^n_\Lambda(z,\hat{\omega},t) | (\hat{x})_n) =$$

$$= \frac{\int \mu^0_V(d\phi) \exp(z \int_\Lambda d(\hat{x})\, d(\phi)(\hat{x})) \prod_y e : e^{-i\alpha_y \phi(y)} : \prod_{i=1}^n : e^{i\alpha_i \phi(x_i)} :}{\int \mu^0_V(d\phi) \exp(z \int_\Lambda d(\hat{x})\, c(\phi)(\hat{x}) \prod_y : e^{-i\alpha_y \phi(y)} :} \qquad /3.4/$$

$$= \exp(it\, \mathcal{E}(\hat{x})_n | \hat{\omega}(\Lambda^c))\, c^n_\Lambda(z,\omega,t | (\hat{x})_n).$$

Через $\langle - \rangle^{(\hat{\omega})}(z,t)$ обозначим математические ожидания по мере $\hat{\mu}_\Lambda(d\phi | z,\omega,t)$, а через $\langle - \rangle^{(\phi,\hat{\omega})}(z,t)$ – математические ожидания по тензорному произведению мер $\mu_\Lambda(d\phi | z, \Phi)$ $\hat{\mu}_\Lambda(d\phi | , z,\hat{\omega},t)$, где через Φ обозначена пустая внешняя конфигурация.

<u>Предложение 3.1</u>

Пусть $z \geq 0$, $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$, а функция $f(x,\alpha) \in L^1_\lambda(R^d \otimes \Sigma)$ является неотрицательной почти везде по мере $dx \otimes d\lambda$ на $R^d \otimes \Sigma$. Тогда имеют место следующие корреляционные неравенства:

$$0 \leqq \langle (\prod_{i=1}^n c(\phi)(\hat{x}_i) - \prod_{i=1}^n c(\phi')(\hat{x}_i)) \qquad /3.5/$$

$$\delta \in R^1 \qquad \exp(\pm\delta \int_\Lambda d(\hat{x})\, c(\phi)(\hat{x})\, f(\hat{x})\, c(\phi')(\hat{x})) \rangle^{(\Phi,\hat{\omega})}(z,t).$$

<u>Доказательство</u>

Применим аргументы, первоначально использованные Жинибром [31]. В пространстве полей $\{\phi,\phi'\}$ определим ортогональное преобразование

$$\{\phi,\phi'\} \to \{\Psi_+, \Psi_-\} = \{\frac{\phi+\phi'}{\sqrt{2}}, \frac{-\phi+\phi'}{\sqrt{2}}\}. \qquad /3.6/$$

Тогда имеем:

$$\mu^0_V(d\phi) \otimes \mu^0_V(d\phi') = \mu^0_V(d\Psi_+) \otimes \mu^0_V(d\Psi_-). \qquad /3.7/$$

Используя элементарные тригонометрические формулы, получаем:

$$\exp(z \int_\Lambda d(\hat{x}) (c(\phi)(\hat{x}) + : \cos(\alpha\phi(x) + t\,\mathcal{E}(\hat{x} | \hat{\omega}(\Lambda^c)) :)$$

$$= \exp(2z \int_\Lambda d(\hat{x}) : \cos(\alpha\Psi_+(x) + t\,\mathcal{E}(\hat{x} | \hat{\omega}(\Lambda^c))/2) : \qquad /3.8/$$

$$: \cos(\alpha\Psi_-(x) + t\,\mathcal{E}(\hat{x} | \hat{\omega}(\Lambda^c))/2) :).$$

После разложения этой экспоненты в ряд по степеням z получим факторизуемость этого выражения. Подобными рассуждениями мы доказываем свойство факторизуемости остальных членов правой части неравенства /3.5/.

Другое простое, но важное для нас корреляционное неравенство можно получить, используя аргументы, подобные тем, которые мы применяли в предыдущем доказательстве.

Предложение 3.2

Пусть $z \geq 0$ и $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$. Возьмем любую последовательность чисел $\theta_i \in [0, 2\pi)$. Тогда имеет место следующее корреляционное неравенство:

$$< \prod_{i=1}^{n} c(\phi)(\hat{x}_i) >_{\Lambda}^{(\Phi)}(z) \geq \pm < \prod_{i=1}^{n} : \cos(a\,\phi(x_i) + \theta_i) : >_{\Lambda}^{(\hat{\omega})}(z,t) \qquad /3.9/$$

Доказательство

Используем соотношение

$$< \prod_{i=1}^{n} c(\phi)(\hat{x}_i) >_{\Lambda}^{(\Phi)}(z)\,t) - < \prod_{i=1}^{n} : \cos(a_i\,\phi(x_i) + \theta_i) : >_{\Lambda}^{(\hat{\omega})}(z,t)$$

$$= < (\prod_{i=1}^{n} c(\phi)(x_i) - \prod_{i=1}^{n} : \cos(a_i\,\phi(x_i) + \theta_i) : >_{\Lambda}^{(\Phi,\hat{\omega})}(z,t) \qquad /3.10/$$

и применим аргументы доказательства Предложения 3.1. Предыдущее корреляционное неравенство можно доказать также для моментов типа $\hat{c}^n_{\Lambda}$.

Предложение 3.2'

Пусть $z \geq 0$, $\hat{\omega} \in \hat{\Omega}(V)$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда имеет место следующее корреляционное неравенство:

$$\hat{c}^n_{\Lambda}(z \mid (\hat{x})_n) \geq \pm \hat{c}^n_{\Lambda}(z, \hat{\omega}, t)\ (\hat{x})_n) \qquad /3.11/$$

Доказательство

Воспользуемся определением /3.4/. Используя /3.6/, /3.10/ и четность гауссовой меры μ^0_V, получим

$$\hat{c}^n_{\Lambda}(z \mid (\hat{x})_n) - \hat{c}^n_{\Lambda}(z, \hat{\omega}, t \mid (\hat{x})_n, (\theta)_n) = (Z_{\Lambda,\bar{X}}(z,\omega,t))^{-1} (Z_{\Lambda}(z))^{-1}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{\{\epsilon_j = \pm 1\}} \int_{\Lambda} d(\hat{x})_n \prod_{i=1}^{n} e^{-\frac{a_i^2}{2} V(0)}$$

$$(\int \mu^0_V(d\Psi_+) \cdot \sin(\sum_j a_j \cdot \epsilon_j (\Psi_+(x_j) + \frac{\theta_j}{2}) \prod_{i=1}^{1} c(\phi)(\hat{x}_i) \qquad /3.12/$$

$$\prod_{y \in \omega_{\bar{X}}(\Lambda^c)} : e^{-t a_y \Psi_+(y)} :)^2 \geq 0.$$

На последнем шаге мы снимаем вспомогательную объемную $\tilde{\Lambda}$ регуляризацию.

ЗАМЕЧАНИЯ

Неравенство типа неравенства /3.5/ было замечено уже в 1977 г. Пфистером при анализе спиновой модели X – Y. В последнее время это неравенство нашло различные применения в области решеточных спиновых систем, а также евклидовой квантовой теории поля. По поводу теории поля отметим здесь работы автора /24,35/. В работе /24б/ доказана единственность регулярных гиббсовских состояний для двумерной модели типа синус-Гордона. Некоторые результаты относительно уравнений Д-Л-Р в случае бозонной версии двумерной скалярной модели Окавы получены в работе /32/. Применению этих корреляционных неравенств в доказательстве основной теоремы посвящена работа /33/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mayer J.E. J.Chem.Phys., 1942, 10, p.629.
2. Рюэль А. Статистическая механика. Строгие результаты. "Мир", М., 1971.
3. Klein W. Journ.of Math.Phys., 1975, 16, p.1482.
4. Пастур Л.А. ТМФ, 1974, 18, с.233.
5. Загребнов В.А., Пастур Л.А. ТМФ, 1978, 36, с.352.
6. Zagrebnov V.A. Journ.of Stat.Phys., 1982, 27(3), p.577.
7. Morall H. Physica, 1975, 1A, p.469; Physica, 1977, 87A, p.331.
8. Georgii H.O. Canonical Gibbs Measures Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1979, p.760.
9. Preston J. Gibbs Fields Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1976, p.534.
10. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. Строгие результаты. "Наука", М., 1980.
11. Ruelle D. Ann. of Phys., 1963, 25, p.109.
12. Ruelle D. Comm.Math.Phys., 1979, 18, p.127.
13. Добрушин Р.Л. Функциональный анализ и его приложения. ТМФ, 1968, 2, с.44.
14. Dobrushin R.L., Pecherski E.A. In: 4th USSR-Japan Symp. Proc. 1982, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, N.Y., 1983, 1021, p.97.
15. Klein O. Comm.Math.Phys., 1982, 86, p.227; Comm.Math.Phys., 1984, 92, p.295.
16. Боголюбов Н.Н., Хацет Б.В. ДАН СССР, 1949, 66, с.321; Боголюбов Н.Н. Избранные труды в трех томах. "Наукова думка", Киев, 1970, т.2, с.494; Боголюбов Н.Н., Петрина А.Г., Хацет Б.В. ТМФ, 1969, 1, с.251.

17. Siegert A.J.F. Physica, 1960, 26, p.30.
18. Fröhlich J. Comm.Math.Phys., 1976, 47, p.33.
19. Fröhlich J., Park Y.M. Comm.Math.Phys., 1978, 57, p.235.
20. Brydges D. Comm.Math.Phys., 1978, 58, p.313; Brydges D., Federbush P. Comm.Math.Phys., 1980, 73, p.197; Park Y.M. Comm.Math.Phys., 1979, 70, p.161; Jmbrie J. Comm.Math. Phys., 1983, 87, p.515.
21. Fröhlich J., Spencer T. Journ.of Stat.Phys., 1981, 24, p.527; Fröhlich J., Spencer T. Comm.Math.Phys., 1981, 81, p.313.
22. Fontaine J.R., Martin Ph.A. Journ.of Stat.Phys., 1984, 36, p.163.
23. Aizenmann M., Martin Ph.A. Comm.Math.Phys., 1980, 78, p.99; Aizenmann M., Fröhlich J. Journ.of Stat.Phys., 1984, 36, p.163.
24. a) Albeverio S., Hoegh-Kröhn R. Comm.Math.Phys., 1979, 68, p.95; б) Gielerak R., Zegarlinski B. Fortschr.der Phys., 1984, 1, p.1; в) Gielerak R. Onte DLR Equations for the Two-Dimensional Sine-Gordon Model. Направлено в "Ann.Inst. d' H.Poincare".
25. Lebowitz J.L., Martin-Löf A. Comm.Math.Phys., 1976, 25, p.276; Lebowits J.L. Ruttgers University Preprint, 1925; Bricmont J., Fontaine J.R., Landau L.J. Comm.Math.Phys., 1977, 56, p.281; Messager A., Miracle S., Pfister Ch.-E. Comm.Math.Phys., 1978, 58, p.19.
26. Pfister Ch.-E. Comm.Math.Phys., 1982, 86, p.375; Fröhlich J., Pfister Ch.-E. Comm.Math.Phys., 1983, 89, p.303.
27. Hguen X.X., Zessin H. Math.Nachr., 1979, 88, p.105.
28. Керстан Й., Маттес К., Мекке Й. Безгранично делимые точечные процессы. "Наука", М., 1982.
29. Добрушин Р.Л.Теория вероятности и прим., 1968, 12/2/, с.201.
30. Gielerak R. Fortschr.d.Phys., 1981, 29(1), p.19.
31. Ginibre J. Comm.Math.Phys., 1970, 16, p.310.
32. Gielerak R. Fortschr.der Phys., 1986, 6 (in print).
33. Гелерак Р. ОИЯИ, Р17-85-771, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1985 года.