объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-85-574

Э.И.Алискендеров[1], Фам Ле Киен[2], А.С.Шумовский

ТОЧНО РЕШАЕМАЯ ТРЕХУРОВНЕВАЯ ДВУХМОДОВАЯ МОДЕЛЬ С МНОГОФОТОННЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Направлено в журнал "Journal of Physics"

[1] НПО КИ АН АзербССР

[2] Московский государственный университет

1985

Модель Джейнса – Каммингса [I], описывающая двухуровневый атом, взаимодействующий с одномодовым квантовым полем излучения, сейчас находится на пересечении многих проблем квантовой оптики, ЯМР и квантовой электроники. Значение модели состоит в том, что, как ожидается, она будет простейшей точно решаемой моделью, описывающей существенные черты взаимодействия материи и поля. Последние исследования этой модели [2,3] выявили квантовые затухания и восстановления импульсов, что ясно говорит о квантовом характере когерентных и флуктуационных свойств систем материя – поле. В серии работ [4-6] предложены три точно решаемых варианта модели Джейнса – Каммингса. В одной из них рассматривалось взаимодействие, зависящее от интенсивности излучения, в другой – многофотонное взаимодействие между полем и атомом, и, наконец, в третьей рассматривалась многоуровневая структура атома. Обобщенная модель, описывающая двухмодовый процесс в трехуровневом атоме с однофотонными переходами, исследовалась в работах [7-9]. На возможность многофотонного перехода из промежуточных состояний впервые было указано Майером [I0]. Различные многофотонные переходы изучались как теоретически, так и экспериментально. Рассматривались случаи двухфотонных и многофотонных лазеров [II-I7], двухфотонные распады [I8,I9], многофотонное поглощение и испускание в двухуровневых атомах [20,2I], а также процессы комбинационного рассеяния света [22,23].

Целью данной работы является построение строго квантово-механического решения модели типа Джейнса – Каммингса, описывающей многофотонные двухмодовые процессы в трехуровневом атоме.

Рассматриваемая модель трехуровневого атома показана на рисунке (для случая $m_1 = 2$, $m_2 = I$). Верхний уровень 3 взаимодействует с уровнем I (уровнем 2), благодаря взаимодействию с полем в моде I (моде 2) через m_1 – фотонный (m_2 – фотонный) переход. Модельный гамильтониан рассматриваемой системы есть

$$H = H_A + H_F + H_{AF}. \qquad \text{(I)}$$

Здесь H_A и H_F описывают соответственно свободный атом и свободное поле, а H_{AF} описывает взаимодействие атом-поле в приближении вращающейся волны,

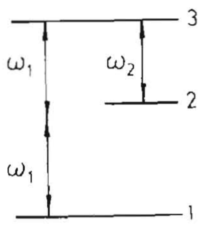

Рис.1

$$H_A = \sum_{j=1}^{3} \hbar \Omega_j \hat R_{jj}, \quad H_F = \sum_{\alpha=1}^{2} \hbar \omega_\alpha \hat a_\alpha^{+} \hat a_\alpha ,$$
$$H_{AF} = \sum_{\alpha=1}^{2} \hbar g_\alpha \left(\hat R_{3\alpha} \hat a_\alpha^{m_\alpha} + \hat R_{\alpha 3} \hat a_\alpha^{+m_\alpha} \right). \tag{2}$$

Оператор $\hat R_{jj} \equiv |j\rangle\langle j|$ описывает населенность уровня j. Оператор $\hat R_{ij} \equiv |i\rangle\langle j|$ описывает атомные переходы с уровня j на уровень i $(i \neq j)$. Операторы $\hat R_{ij} = |i\rangle\langle j|, (i,j = 1,2,3)$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\hat R_{ij} \hat R_{kl} = \hat R_{il} \delta_{kj}, \quad [\hat R_{ij}, \hat R_{kl}] = \hat R_{il}\delta_{kj} - \hat R_{kj}\delta_{il},$$
$$\sum_{i=1}^{3} \hat R_{ii} = 1 . \tag{3}$$

Фотонные операторы $\hat a_\alpha$, $\hat a_\alpha^{+}$ описывают две моды поля излучения с резонансными частотами

$$m_\alpha \omega_\alpha = \Omega_3 - \Omega_\alpha , \tag{4}$$

и g_α есть константа взаимодействия атома с соответствующей модой поля.

Заметим, что случай $m_1 = m_2 = 1$ рассмотрен в работе[8,9]. В специальном случае, когда вторая мода исключена, т.е. , когда $g_2 = 0$, мы получаем гамильтониан, исследованный в работах[6,24,25].

Исходя из гамильтониана (I) мы можем получить уравнения Гейзенберга для операторов обычным путем, т.е. $\dot{\hat O} = (i/\hbar)[H, \hat O]$. Прежде всего мы находим для удобства вспомогательные операторы

$$\hat A_\alpha \equiv i \left(\hat R_{3\alpha} \hat a_\alpha^{m_\alpha} - \hat R_{\alpha 3} \hat a_\alpha^{+m_\alpha} \right). \tag{5}$$

Тогда уравнения Гейзенберга для операторов населенностей уровней $\hat R_{\alpha\alpha}$ и для операторов чисел фотонов $\hat N_\alpha = \hat a_\alpha^{+} \hat a_\alpha , (\alpha = 1,2)$ будет

$$\dot{\hat R}_{\alpha\alpha}(t) = g_\alpha \hat A_\alpha(t) , \tag{6а}$$
$$\dot{\hat N}_\alpha(t) = m_\alpha g_\alpha \hat A_\alpha(t) . \tag{6в}$$

Из этих уравнений следует, что

$$\hat N_\alpha(t) - m_\alpha \hat R_{\alpha\alpha}(t) = const \equiv \hat M_\alpha , \tag{7}$$

где $\hat M_\alpha$ есть интегралы движения. Применяя соотношение (3), найдем для $\hat A_\alpha$ уравнение движения

$$g_\alpha \dot{\hat A}_\alpha(t) = 2 g_\alpha^2 \frac{(\hat M_\alpha + m_\alpha)!}{\hat M_\alpha !} \left[1 - \hat R_{11}(t) - \hat R_{22}(t) - \hat R_{\alpha\alpha}(t) \right] - g_1 g_2 \hat B(t), \tag{8}$$

где

$$\hat B \equiv \hat R_{21} \hat a_1^{m_1} \hat a_2^{+m_2} + \hat R_{12} \hat a_1^{+m_1} \hat a_2^{m_2} . \tag{9}$$

Оператор $\hat B$ удовлетворяет следующему уравнению

$$\dot{\hat B}(t) = g_1 \frac{(\hat M_1 + m_1)!}{\hat M_1 !} \hat A_2(t) + g_2 \frac{(\hat M_2 + m_2)!}{\hat M_2 !} \hat A_1(t) . \tag{I0}$$

Уравнения (6а), (8) и (I0) составляют замкнутую систему линейных уравнений, которые имеют следующий интеграл движения

$$g_1 g_2 \hat B(t) - \hat\lambda_1^2 \hat R_{22}(t) - \hat\lambda_2^2 \hat R_{11}(t) = const \equiv \hat K . \tag{II}$$

Здесь мы обозначили

$$\hat\lambda_\alpha^2 \equiv g_\alpha^2 \frac{(\hat M_\alpha + m_\alpha)!}{\hat M_\alpha !} . \tag{I2}$$

Теперь еще раз продифференцируем каждое из уравнений (6а) по времени. Учитывая (8) и (II), получаем

$$\ddot{\hat R}_{11}(t) + (4\hat\lambda_1^2 + \hat\lambda_2^2) \hat R_{11}(t) + 3\hat\lambda_1^2 \hat R_{22}(t) = 2\hat\lambda_1^2 - \hat K ,$$
$$\ddot{\hat R}_{22}(t) + (4\hat\lambda_2^2 + \hat\lambda_1^2) \hat R_{22}(t) + 3\hat\lambda_2^2 \hat R_{11}(t) = 2\hat\lambda_2^2 - \hat K . \tag{I3}$$

Эти уравнения второго порядка можно рассматривать как систему уравнений для ограниченных квантовых осцилляторов, генерируемых /26/ нелинейными нутациями населенностей уровней и чисел фотонов в данной модели.

Решение системы (I3) можно легко получить в виде /8/

$$\hat{R}_{11}(t)=\hat{\mu}(\cos\hat{\lambda}t-1)+\hat{\beta}\sin\hat{\lambda}t+\hat{\lambda}_1^2\{\hat{u}(\cos 2\hat{\lambda}t-1)+\hat{v}\sin 2\hat{\lambda}t\}+\hat{R}_{11}(0),$$
$$\hat{R}_{22}(t)=-\hat{\mu}(\cos\hat{\lambda}t-1)-\hat{\beta}\sin\hat{\lambda}t+\hat{\lambda}_2^2\{\hat{u}(\cos 2\hat{\lambda}t-1)+\hat{v}\sin 2\hat{\lambda}t\}+R_{22}(0),$$

где оператор (I4)

$$\hat{\lambda}\equiv(\hat{\lambda}_1^2+\hat{\lambda}_2^2)^{1/2} \tag{I5}$$

описывает частоты нутаций. "Амплитудные операторы" $\hat{\mu}$, $\hat{\beta}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$ при учете начальных условий определяются как следующие:

$$\hat{\mu}=\{\hat{\lambda}^2[\hat{\lambda}_2^2 R_{11}(0)-\hat{\lambda}_1^2 \hat{R}_{22}(0)]+(\hat{\lambda}_2^2-\hat{\lambda}_1^2)\hat{K}\}/\hat{\lambda}^4,$$
$$\hat{u}=\{\hat{\lambda}^2[1-2\hat{R}_{33}(0)]+\hat{K}\}/(2\hat{\lambda}^4),$$
$$\hat{\beta}=\{\hat{\lambda}_2^2 g_1\hat{A}_1(0)-\hat{\lambda}_1^2 g_2\hat{A}_2(0)\}/\hat{\lambda}^3, \tag{I6}$$
$$\hat{v}=\{g_1\hat{A}_1(0)+g_2\hat{A}_2(0)\}/(2\hat{\lambda}^3).$$

Используя законы сохранения (3) и (7) вместе с уравнением (I4), мы можем получить

$$\hat{R}_{33}(t)=-\hat{\lambda}^2[\hat{u}(\cos 2\hat{\lambda}t-1)+\hat{v}\sin 2\hat{\lambda}t]+\hat{R}_{33}(0),$$
$$\hat{N}_1(t)=m_1[\hat{\mu}(\cos\hat{\lambda}t-1)+\hat{\beta}\sin\hat{\lambda}t+\hat{\lambda}_1^2[\hat{u}(\cos 2\hat{\lambda}t-1)+$$
$$+\hat{v}\sin 2\hat{\lambda}t]\}+\hat{N}_1(0),$$
$$\hat{N}_2(t)=m_2[-\hat{\mu}(\cos\hat{\lambda}t-1)-\hat{\beta}\sin\hat{\lambda}t+\hat{\lambda}_2^2[\hat{u}(\cos 2\hat{\lambda}t-1)+$$
$$+\hat{v}\sin 2\hat{\lambda}t]\}+\hat{N}_2(0). \tag{I7}$$

Таким образом, мы нашли решения уравнений движения для населенностей уровней и чисел заполнений фотонов в гейзенберговском представлении. Поскольку операторы $\hat{M}_\alpha$, $\hat{\lambda}_\alpha$ и $\hat{\lambda}$ диагональны в пространстве

базисных состояний, мы можем использовать решения (I4) и (I7) для нахождения временной зависимости населенностей уровней и чисел заполнений фотонов. Используя эти решения, можно найти статистические характеристики фотонов в системе (см. /27/, а также последующий текст данной работы).

Введем оператор характеристической функции распределения фотонов

$$\hat{X}(\xi_1,\xi_2)=\exp[i\xi_1\hat{N}_1(t)+i\xi_2\hat{N}_2(t)]. \tag{I8}$$

Используя законы сохранения (7), находим

$$\hat{X}(\xi_1,\xi_2)=\exp(i\xi_1\hat{M}_1+i\xi_2\hat{M}_2)\{[\exp(i\xi_1 m_1)-1]\hat{R}_{11}(t)+$$
$$+[\exp(i\xi_2 m_2)-1]\hat{R}_{22}(t)+1\}. \tag{I9}$$

Обозначим $\hat{\rho}(0)$ матрицу плотности, описывающую начальное состояние системы атом-поле. Тогда характеристическая функция $\langle X(\xi_1,\xi_2)\rangle$ определяется как

$$\langle\hat{X}(\xi_1,\xi_2)\rangle=Tr\,\hat{X}(\xi_1,\xi_2)\hat{\rho}(0). \tag{20}$$

Она связана с функцией распределения фотонов $P(n_1,n_2;t)$ соотношением

$$X(\xi_1,\xi_2)=\sum_{n_1,n_2}\exp(i\xi_1 n_1+i\xi_2 n_2)\,P(n_1,n_2;t). \tag{21}$$

Так как характеристическая функция распределения фотонов известна, легко найти статистические моменты чисел заполнения фотонов $\langle\hat{N}_\alpha^m(t)\rangle$ и корреляции между модами $\langle\hat{N}_1^k(t),\hat{N}_2^\ell(t)\rangle$, используя соотношения

$$\langle\hat{N}_\alpha^m(t)\rangle=\sum_{n_1,n_2}n_\alpha^m P(n_1,n_2;t)=\frac{\partial^m}{\partial(i\xi_\alpha)^m}\langle\hat{X}(\xi_1=0,\xi_2=0)\rangle,$$
$$\langle\hat{N}_1^k(t),\hat{N}_2^\ell(t)\rangle=\sum_{n_1,n_2}n_1^k n_2^\ell P(n_1,n_2;t)=\frac{\partial^{k+\ell}}{\partial(i\xi_1)^k\partial(i\xi_2)^\ell}\langle\hat{X}(\xi_1=0,\xi_2=0)\rangle. \tag{22}$$

Уравнения (I9)-(22) вместе с уравнением (I4) дает возможность прояснить статистику фотонов для данного начального состояния системы. Сначала предположим, что атом в начальном состоянии находится на уровне i, т.е.

$$\hat{\rho}(0)=|i\rangle\langle i|\otimes\hat{\rho}_F, \tag{23}$$

где матрица плотности $\hat{\rho}_F$ описывает начальное состояние поля.

Тогда , используя уравнения (I9), (I4) и (23), находим, что характеристическая функция (20) имеет вид

$$\langle \hat{X}(\xi_1, \xi_2) \rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2) \exp[i\xi_1(n_1 - m_1\delta_{1i}) + i\xi_2(n_2 - m_2\delta_{2i})] \times$$
$$\times \{[\exp(i\xi_1 m_1) - 1] R_1(i, n_1, n_2; t) + [\exp(i\xi_2 m_2) - 1] R_2(i, n_1, n_2; t) + 1\}. \qquad (24)$$

Здесь $P(n_1, n_2)$ - начальное распределение чисел заполнения фотонов,

$$P(n_1, n_2) = \langle n_2, n_1 | \hat{\rho}_F | n_1, n_2 \rangle . \qquad (25)$$

Функция $R_\alpha(i, n_1, n_2; t)$ в уравнении (24) определяется как

$$R_1(i, n_1, n_2; t) = -2\mu(i, n_1, n_2) \sin^2 \frac{\lambda(i, n_1, n_2)t}{2} -$$
$$-2\lambda_1^2(i, n_1, n_2)\, U(i, n_1, n_2) \sin^2 \lambda(i, n_1, n_2)t + \delta_{1i} ,$$

$$R_2(i, n_1, n_2; t) = 2\mu(i, n_1, n_2) \sin^2 \frac{\lambda(i, n_1, n_2)t}{2} - \qquad (26)$$
$$-2\lambda_2^2(i, n_1, n_2)\, U(i, n_1, n_2) \sin^2 \lambda(i, n_1, n_2)t + \delta_{2i} ,$$

где

$$\lambda_\alpha(i, n_1, n_2) = g_\alpha \sqrt{\frac{(n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i} + m_\alpha)!}{(n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i})!}} ,$$
$$\lambda(i, n_1, n_2) = \sqrt{\lambda_1^2(i, n_1, n_2) + \lambda_2^2(i, n_1, n_2)} ,$$
$$\mu(i, n_1, n_2) = 2\lambda_1^2(i, n_1, n_2)\,\lambda_2^2(i, n_1, n_2)\{\delta_{1i} - \delta_{2i}\} / \lambda^4(i, n_1, n_2) ,$$
$$U(i, n_1, n_2) = \{\lambda_1^2(i, n_1, n_2)\,\delta_{1i} + \lambda_2^2(i, n_1, n_2)\,\delta_{2i} - \qquad (27)$$
$$- \lambda^2(i, n_1, n_2)\,\delta_{3i}\} / [2\lambda^4(i, n_1, n_2)]$$

Сравнивая (24) и (2I), получаем

$$P(n_1, n_2; t) = P(n_1 + m_1\delta_{1i} - m_1, n_2 + m_2\delta_{2i}) \times$$
$$\times R_1(i, n_1 + m_1\delta_{1i} - m_1, n_2 + m_2\delta_{2i}; t) +$$

$$+ P(n_1 + m_1\delta_{1i}, n_2 + m_2\delta_{2i} - m_2) R_2(i, n_1 + m_1\delta_{1i}, n_2 + m_2\delta_{2i} - m_2; t) + \qquad (28)$$
$$+ P(n_1 + m_1\delta_{1i}, n_2 + m_2\delta_{2i}) R_3(i, n_1 + m_1\delta_{1i}, n_2 + m_2\delta_{2i}; t) ,$$

где

$$R_3(i, n_1, n_2; t) = 2\lambda^2(i, n_1, n_2)\, U(i, n_1, n_2) \sin^2 \lambda(i, n_1, n_2)t + \delta_{3i} . \qquad (29)$$

Статистические моменты чисел заполнения фотонов и корреляции между модами находим из уравнений (22) и (24):

$$\langle \hat{N}_\alpha^m(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2) \{(n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i})^m +$$
$$+ [(n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i} + m_\alpha)^m - (n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i})^m] R_\alpha(i, n_1, n_2; t)\} ,$$
$$\langle \hat{N}_1^k(t), \hat{N}_2^\ell(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2) \{(n_1 - m_1\delta_{1i})^k (n_2 - m_2\delta_{2i})^\ell +$$
$$+ (n_1 - m_1\delta_{1i})^k [(n_2 - m_2\delta_{2i} + m_2)^\ell - (n_2 - m_2\delta_{2i})^\ell] R_2(i, n_1, n_2; t) +$$
$$+ (n_2 - m_2\delta_{2i})^\ell [(n_1 - m_1\delta_{1i} + m_1)^k - (n_1 - m_1\delta_{1i})^k] R_1(i, n_1, n_2; t)\}$$

В частности, найдем

$$\langle \hat{N}_\alpha(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2) \{n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i} + m_\alpha R_\alpha(i, n_1, n_2; t)\} ,$$
$$\langle \hat{N}_\alpha^2(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2) \{(n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i})^2 + [2m_\alpha(n_\alpha - m_\alpha\delta_{\alpha i}) + m_\alpha^2] R_\alpha(i, n_1, n_2; t)\} ,$$
$$\langle \hat{N}_1(t), \hat{N}_2(t) \rangle = \sum_{n_1, n_2} P(n_1, n_2) \{(n_1 - m_1\delta_{1i})(n_2 - m_2\delta_{2i}) +$$
$$+ (n_1 - m_1\delta_{1i}) m_2 R_2(i, n_1, n_2; t) + (n_2 - m_2\delta_{2i}) m_1 R_1(i, n_1, n_2; t)\} . \qquad (3I)$$

Заметим, что для случая $i = 1$, $m_1 = m_2 = 1$ уравнения (3I) определены /27/. Уравнения (28) для функций распределения чисел фотонов могут быть легко найдены посредством использования как операторов временной эволюции в шредингеровском представлении, так и формализма одетых состояний для вычисления вероятностей переходов в атоме.

Таким образом, мы нашли точное решение уравнений движения для населенностей уровней и чисел заполнения фотонов. Также найдены характеристическая функция и функция распределения фотонов , статистические моменты чисел заполнения фотонов и корреляции между модами.

Литература

1. Jaynes E.T. and Cummings F.W. 1963, Proc. IEEE 51, 89.
2. Eberly J.H., Narozhny N.B. and Sanchez - Mondragon J.J. Phys. Rev., 1981, A23, 236.
3. Knight P.L. and Radmore P.M. Phys. Lett., 1982, A90, 342.
4. Buck B. and Sukumar C.V. Phys. Lett., 1981, A81, 132.
5. Buck B. and Sukumar C.V. J. Phys. A. Math. Gen, 1984, 17, 877.
6. Singh S., Phys. Rev., 1982, A25, 3206.
7. Li X. and Bei N., Phys. Lett., 1984, A 101, 169.
8. Bogolubov N.N. (Jr.), Fam Le Kien and Shumovsky A.S. Phys. Lett., 1984, A101, 201.
9. Bogolubov (Yr.), Fam Le Kien and Shumovsky A.S. Phys. Lett., 1985, A107, 173.
10. Maria Goeppert - Mayer. Ann. Phys. (Leipzig) 1931, 9, 273.
11. McNeil K.J. and Walls D.F. J. Phys. A. Math. Gen. 1975, 8, 104.
12. ScZaniecky L., Opt. Acta, 1980, 27, 251.
13. Gibson A.F. and Key M.H. Rep. Prog. Phys., 1980, 43, 3.
14. Sharma M.P. and Brescansin L.M., Phys. Rev., 1981, A23, 1893.
15. Reid M., McNeil K.J. and Walls D.F. Phys. Rev., 1981, A24, 2029.
16. Zubairy M.S. Phys. Lett., 1982, A87, 162.
17. Wang Z.C. and Haken H. Z. Phys., 1984, B55, 361, ibid 56, 77.
18. Tung J.H., Ye X.M., Salamo G. J. and Chan F.T. Phys. Rev., 1984, A30, 1175.
19. Florescu V., Phys. Rev., 1984, A30, 2441.
20. Shen Y.R. Phys. Rev., 1967, 155, 921.
21. Zubairy M.S. and Yeh J.J. Phys. Rev., 1980, A21, 1624.
22. Simaan H.D. J. Phys. A. Math Gen, 1976, 11, 1799.
23. Sainz de Los Terreros L., Santos M. and Gonzabz - Diaz P.F. Phys. Rev., 1985, A31, 1598.
24. Buck B. and Sukumar C.V. Phys. Lett., 1981, A83, 211.
25. Buck B. and Sukumar C.V. J.Phys. A Math. Gen, 1984, 17, 885.
26. Elgin J.N. Phys. Lett., 1980, A80, 140.
27. Bogolubov N.N. (Jr.), Fam Le Kien and Shumovsky A.S. Phys. Lett., 1985, A107, 456.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 июля 1985 года.

Алискендеров Э.И., Фам Ле Киен, Шумовский А.С.

P17-85-574

Точно решаемая трехуровневая двухмодовая модель с многофотонными переходами

Получено решение уравнений движения для населенностей уровней и операторов числа заполнения фотонов. Найдены характеристические функции и функция распределения фотонов, статистические моменты чисел заполнения и корреляции мод.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Aliskenderov E.I., Fam Le Kien, Shumovsky A.S.

P17-85-574

Exactly Solvable Three-Level Two-Mode Model with Multiphoton Transitions

The solutions of the equations of motion for the level population and photon number operators are obtained. The characteristic and photon distribution functions, the statistical moments of photon numbers and the correlations of modes are found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985