

**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P17-85-565

В. Г. Маханьков, О. К. Пашаев

**НЕКОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ СИММЕТРИИ
В ТЕОРИИ СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА**

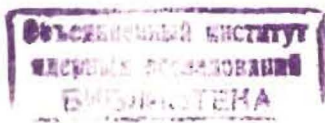
1985

Как известно, широкий круг физических проблем изучается в рамках модели слабонеидеального бозе-газа. При этом учет лишь парных взаимодействий между бозонами, являясь достаточно содержательным в физическом плане, допускает точное математическое решение в случае одного пространственного измерения, как в квантовом, так и в классическом случае.

Бозе-газ обладает рядом примечательных свойств, определенно свидетельствующих о наличии в системе некомпактной симметрии. Среди них - наличие конденсатного состояния из бесконечного числа частиц и боголюбовских возбуждений, связанных с гиперболическим каноническим преобразованием. Наконец, в одномерной системе существует "дырочная" /либовская/ мода возбуждений, соответствующая на классическом уровне /в методе самосогласованного поля/ солитону дырочного типа - кинку. Характерно, что амплитуда кинка зависит от скорости его движения и при достижении скорости звука обращается в нуль. Это свойство "аналогично" тому, как в специальной теории относительности размеры тела являются функцией его скорости, что связано с некомпактностью группы Лоренца. Кинки нелинейного уравнения Шредингера /НУШ/, описывающего слабонеидеальный бозе-газ с отталкиванием на квазиклассическом уровне, допускают интерпретацию как связанного состояния из конечного числа дырок¹, так и связанного состояния из бесконечного числа частиц². При этом известно, что связанные состояния из конечного числа частиц в системе неустойчивы и быстро распадаются. Эти свойства слабонеидеального бозе-газа указывают на наличие в системе некоторой некомпактной группы симметрии, т.к. все унитарные неприводимые представления последней бесконечномерны. Реализация унитарных представлений может быть осуществлена введением конденсата конечной плотности $\rho = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ V \rightarrow \infty}} N/V$

в квантовой системе и постановкой нетривиальных граничных условий на поля классической системы.

Цель настоящей работы - выявление некомпактной теоретико-групповой структуры моделей слабонеидеального бозе-газа, связанной с неабелевой динамической группой линеаризованных многомерных моделей и с интегрируемостью одномерных нелинейных моделей.



ДИНАМИЧЕСКАЯ ГРУППА СИММЕТРИИ
СЛАБОНЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

На классическом уровне слабонеидеальный бозе-газ описывается НУШ

$$i\Psi_t + \Delta\Psi - 2(|\Psi|^2 - \rho)\Psi = 0, \quad /1/$$

где $\Psi = \Psi(\vec{x}, t)$, ρ - плотность газа $/D = 3/$. Уравнение /1/ возникает из гамильтоновых уравнений движения для канонически сопряженных переменных Ψ, Ψ^* с функцией Гамильтона

$$H = \int [\vec{\nabla}\Psi^* \vec{\nabla}\Psi + (|\Psi|^2 - \rho)^2] d\vec{x}. \quad /2/$$

Линеаризуем уравнение /1/ вблизи конденсата $\Psi(\vec{x}, t) = \sqrt{\rho} + \epsilon a(\vec{x}, t)$, ($\epsilon \ll 1$). Для соответствующей функции Гамильтона в импульсном представлении получим

$$H = \int [(k^2 + 2\rho)a^*(\vec{k})a(\vec{k}) + \rho(a^*(\vec{k})a^*(-\vec{k}) + a(\vec{k})a(-\vec{k}))] d\vec{k}, \quad /3/$$

где $\{a(\vec{k}), a^*(\vec{k}')\} = i\delta(\vec{k} - \vec{k}')$. Введем новые функции

$$J_1(\vec{k}) = \frac{1}{2} [a^*(\vec{k})a^*(-\vec{k}) + a(\vec{k})a(-\vec{k})], \quad J_2(\vec{k}) = \frac{1}{2i} [a^*(\vec{k})a^*(-\vec{k}) - a(\vec{k})a(-\vec{k})], \quad /4/$$

$$J_3(\vec{k}) = \frac{1}{2} [a^*(\vec{k})a(\vec{k}) + a^*(-\vec{k})a(-\vec{k})].$$

образующие на скобках Пуассона алгебру $su(1,1)_{\vec{k}}$. Они удовлетворяют соотношению

$$(J_3(\vec{k}))^2 - (J_1(\vec{k}))^2 - (J_2(\vec{k}))^2 = \Delta^2(\vec{k}), \quad /5/$$

где $\Delta(\vec{k}) = 1/2 [a^*(\vec{k})a(\vec{k}) - a^*(-\vec{k})a(-\vec{k})]$, описываемому в координатах (J_1, J_2, J_3) двухполостной гиперboloид, а скобки Пуассона их с $\Delta^2(\vec{k})$ обращаются в нуль. Гамильтонова функция /3/ в терминах /4/ имеет вид

$$H = \int [(k^2 + 2\rho)J_3(\vec{k}) + 2\rho J_1(\vec{k})] d\vec{k}, \quad /6/$$

а уравнения движения

$$\dot{J}_1 = \{J_1, H\} = -(k^2 + 2\rho)J_2, \quad \dot{J}_2 = \{J_2, H\} = (k^2 + 2\rho)J_1 - 2\rho J_3,$$

$\dot{J}_3 = \{J_3, H\} = -2\rho J_2$ приводят к уравнению гармонического осциллятора для $J_2(\vec{k}, t)$,

$$\ddot{J}_2(\vec{k}) + \omega^2(\vec{k})J_2(\vec{k}) = 0,$$

где $\omega(\vec{k}) = |\vec{k}| \sqrt{k^2 + 4\rho}$ - Боголюбовская частота. Перейдем к новой

системе координат $(\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3)$, повернутой относительно исходной (J_1, J_2, J_3) на мнимый угол θ вокруг оси J_2 :

$$J_1(\vec{k}) = \text{ch } \theta(\vec{k}) \tilde{J}_1(\vec{k}) + \text{sh } \theta(\vec{k}) \tilde{J}_3(\vec{k}), \quad J_2(\vec{k}) = \tilde{J}_2(\vec{k}), \quad /7/$$

$$J_3(\vec{k}) = \text{sh } \theta(\vec{k}) \tilde{J}_1(\vec{k}) + \text{ch } \theta(\vec{k}) \tilde{J}_3(\vec{k}).$$

где $\text{th } \theta(\vec{k}) = 2\rho / (k^2 + 2\rho)$. Это преобразование сохраняет форму поверхности /5/. Уравнения движения $\dot{\tilde{J}}_1 = -\omega \tilde{J}_2$, $\dot{\tilde{J}}_2 = \omega \tilde{J}_1$, $\dot{\tilde{J}}_3 = 0$ приводят к системе двух несвязанных осцилляторов

$$\ddot{\tilde{J}}_1(\vec{k}) + \omega^2(\vec{k})\tilde{J}_1(\vec{k}) = 0, \quad \ddot{\tilde{J}}_2(\vec{k}) + \omega^2(\vec{k})\tilde{J}_2(\vec{k}) = 0, \quad \tilde{J}_3(\vec{k}, t) = \tilde{J}_3(\vec{k}, 0). \quad /8/$$

Таким образом, наша система описывает на поверхности гиперboloида /5/ окружность с Боголюбовской частотой $\omega(\vec{k})$ и с фиксированным значением $\tilde{J}_3(\vec{k}) \equiv n(\vec{k})$. Из /6/ получаем для энергии

$$H = \int \omega(\vec{k}) \tilde{J}_3(\vec{k}) d\vec{k} \equiv \int \omega(\vec{k}) n(\vec{k}) d\vec{k}, \quad /9/$$

что совпадает в одном измерении с гамильтоновой функцией НУШ в переменных "действие - угол", соответствующих непрерывному спектру вспомогательной линейной задачи. При этом проекция вектора $\tilde{J} = (\tilde{J}_1, \tilde{J}_2, \tilde{J}_3)$ на ось z является переменной "действия" $n(\vec{k})$, равной плотности числа частиц с импульсом \vec{k} , а "угловая" переменная описывает его положение на окружности в момент времени t :

$$\phi(\vec{k}, t) = \phi(\vec{k}, 0) + \omega(\vec{k})t. \quad /10/$$

Мы видим, что классическое движение, ассоциированное с динамической группой, является гармоническим движением на поверхности гиперboloида и соответствует движению точки в фазовом пространстве интегрируемой системы. При этом каноническое преобразование /7/ оказывается связанным с прямой задачей рассеяния при нетривиальных граничных условиях в бессолитонном секторе.

На квантовом уровне гамильтониан бозе-газа

$$H = \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} V_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{p}+\vec{k}}^+ a_{\vec{q}-\vec{k}}^+ a_{\vec{p}} a_{\vec{q}},$$

после выделения конденсата в приближении Боголюбова $a_0 \rightarrow a_0^+ \rightarrow -N_0^{1/2}$ приводится к виду

$$H = \frac{1}{2} N^2 V_0 + \sum_{\vec{k}} (\epsilon_{\vec{k}} + N V_{\vec{k}}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} N \sum_{\vec{k}} V_{\vec{k}} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}). \quad /11/$$

где $N = N_0 + \sum_{\vec{k} > 0} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}$. Выражая гамильтониан /11/ через операторы

$J_1(\vec{k}), J_2(\vec{k}), J_3(\vec{k})$, образующие алгебру $su(1,1)_k$, и используя групповое вращение, генерируемое $J_2(\vec{k})$ /теоретико-групповой аналог преобразования Боголюбова/, можно построить ограниченный снизу дискретный спектр энергии в неприводимом унитарном представлении дискретной серии $\Pi_k \otimes \mathcal{D}(\vec{i}_k)$. Динамической группой

рассматриваемой квантовой системы /11/ будет $\Pi_k \otimes SU(1,1)_k$.

По известной динамической группе можно построить соответствующие обобщенные когерентные состояния системы ^{5,6}, в которых переменные с импульсами $+\vec{k}$ и $-\vec{k}$ разделяются

$$|\tilde{\xi}\rangle = \Pi_k \otimes |\xi, i_k\rangle = \Pi_k \otimes e^{iJ_2(\vec{k})\theta_{\vec{k}}} |\xi, i_k\rangle.$$

Представляя пропагатор системы в виде континуального интеграла по этим состояниям, можно показать ⁶, что классическая динамика системы описывается гармоническим движением в плоскости Лобачевского с боголюбовской частотой $\omega_{\vec{k}} = \hbar^{-1} \sqrt{2\epsilon_{\vec{k}} NV_{\vec{k}}^2 + \epsilon_{\vec{k}}^2}$.

Возникает естественный вопрос, какая динамическая группа соответствует нашей системе в координатном пространстве? В импульсном пространстве она есть $\Pi_k \otimes SU(1,1)_k$ или $\Pi_k \otimes SU(2)_k$

для систем бесспиновых бозе- или ферми-частиц соответственно. При этом "алгебра, генерирующая спектр", есть "алгебра токов" в импульсном пространстве:

$$[J_a^{(\vec{k})}, J_b^{(\vec{k}')}] = iC_{a\beta\gamma} J_\gamma^{(\vec{k})} \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \quad /12/$$

$C_{a\beta\gamma}$ - структурные константы $su(1,1)$ - или $su(2)$ -алгебр. Используя обратное преобразование Фурье, получим в качестве алгебры динамической симметрии непрерывный аналог алгебры Каца-Муди:

$$[J_a(\vec{x}), J_b(\vec{y})] = iC_{a\beta\gamma} J_\gamma(\vec{x} + \vec{y}), \quad /13/$$

ДИНАМИЧЕСКАЯ ГРУППА И СПИНОВЫЕ ВОЛНЫ

Метод динамической группы может быть использован в теории спиновых волн в магнитных системах, описываемых обменным гамильтонианом Гейзенберга. Квантование спиновых волн приводит к представлению о бозе-газе магнонов, который может быть изучен по приведенной выше схеме. В качестве примера рассмотрим несколько моделей магнетиков.

1/ XXZ-антиферромагнетик с гамильтонианом

$$H = \sum_{ij} \left[\frac{1}{2} (S_i^+ S_j^- + \text{н.с.}) - \Delta S_i^z S_j^z \right]. \quad (\Delta \geq 1), \quad /14/$$

который после преобразования к двум подрешеткам A и B, отличающимся направлением спина, примет вид

$$H = \sum_{i \in A, j \in B} \left[\frac{1}{2} (S_i^+ S_j^+ + \text{н.с.}) - \Delta S_i^z S_j^z \right].$$

"Бозонизируя" этот гамильтониан в квадратичном приближении и переходя к импульсному пространству, получим

$$H_{\text{лин}} = -\frac{1}{2} Nzs^2 \Delta + \Lambda sz \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{s}{2} \sum_{\vec{k}, \vec{\delta}} \cos \vec{k}\vec{\delta} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{\delta}}^+ + a_{\vec{k}} a_{\vec{k}-\vec{\delta}}). \quad /15/$$

Введем операторы

$$J_1^{(\vec{k})} = -\frac{1}{2} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}), \quad J_2^{(\vec{k})} = \frac{i}{2} (a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ - a_{\vec{k}} a_{-\vec{k}}),$$

$$J_3^{(\vec{k})} = \frac{1}{2} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}} + 1),$$

образующие алгебру $su(1,1)_k$, и выразим через них гамильтониан

$$H_{\text{лин}} = -\frac{1}{2} Nzs^2 \Delta + s \sum_{\vec{k}} z \Lambda J_3^{(\vec{k})} - s \sum_{\vec{k}, \vec{\delta}} \cos \vec{k}\vec{\delta} J_1^{(\vec{k})} - \frac{1}{2} zs \Delta N. \quad /16/$$

Мы видим, что

$$H_{\text{лин}} = H_0 + \sum_{\vec{k}} \otimes H_{\vec{k}}, \quad \Pi_{\vec{k}} \in su(1,1)_k,$$

и динамической группой спиновых волн в анизотропном антиферромагнетике, как и в изотропном ⁷, будет $\Pi_k \otimes SU(1,1)_k$. Выполняя

поворот $R = \Pi_k \otimes R(\theta_{\vec{k}})$, $R(\theta_{\vec{k}}) = \exp(-iJ_2^{(\vec{k})}\theta_{\vec{k}})$, где $\text{th } \theta_{\vec{k}} =$

$$= \frac{1}{z\Lambda} \sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k}\vec{\delta},$$

$$\text{приходим к выражению}$$

$$H_{\text{лин}} = H_0 + s \sum_{\vec{k}} \sqrt{z^2 \Delta^2 - (\sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k}\vec{\delta})^2} J_3^{(\vec{k})}.$$

Используя неприводимое унитарное представление дискретной серии

$$\Pi_k \otimes \mathcal{D}(\vec{i}_k), \text{ получим спектр антиферромагнетика } E_k = s \sqrt{z^2 \Delta^2 - (\sum_{\vec{\delta}} \cos \vec{k}\vec{\delta})^2}.$$

Для линейной цепочки ($z=2$) спектр есть $E_k = 2s \sqrt{\Delta^2 - \cos^2 k\delta}$ со щелью $E(0) = 2s \sqrt{\Delta^2 - 1}$.

Построение когерентных состояний, континуального интеграла и классической динамики в искривленном фазовом пространстве аналогично описанному выше для бозе-газа.

2/ Ферромагнетик с анизотропией "легкая плоскость"

$$H = \sum_i [-i\vec{S}_i \vec{S}_{i+1} + D(S_i^x)^2 - g\mu_B H S_i^z] \quad /17/$$

Теория спиновых волн для этой модели дает качественное согласие с экспериментом на знаменитом $CsNiF_3$. Квадратичный гамильтониан в бозонных операторах

$$H = H_0 + s \sum_k [(I_0 + \tilde{D} + \tilde{H} - I_k) a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \tilde{D} (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k})]$$

где $I_k = 2I \cos ka$, обрабатывается по вышеприведенной схеме. Частота прецессии в плоскости Лобачевского есть

$$\omega_k = s \{ (I_0 - I_k)^2 + 2(\tilde{D} + \tilde{H})(I_0 - I_k) + 2\tilde{D}\tilde{H} + \tilde{H}^2 \}^{1/2}$$

3/ В качестве последнего примера приведем модель фононов в гармоническом приближении

$$H = \sum_{n=1}^N \left(\frac{p_n^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 u_n^2}{2} \right) - \frac{m\omega_0^2}{2} \sum_{n=1}^N u_n u_{n+1}$$

где $u_n = (1/2 m\omega_0)^{1/2} (a_n + a_n^+)$, $[a_n, a_m^+] = \delta_{nm}$. В импульсном представлении имеем

$$H = \frac{\omega_0}{4} \sum_k (2 - \cos ka) (a_k^+ a_k + a_{-k}^+ a_{-k} + 1) - \frac{\omega_0}{4} \sum_k \cos ka (a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k})$$

с частотой гармонических колебаний в плоскости Лобачевского

$$\omega_k = \omega_0 \sqrt{1 - \cos ka} = \omega_0 \sqrt{2} \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

Все изложенное выше справедливо для спиновых волн и в других магнитных системах /например, ферромагнетиках/, а также в ряде решеточных моделей. Важно отметить, что при использовании представления Холштейна - Примакова в бозонных переменных динамическая группа есть $\prod_k \otimes SU(1,1)_k$. Однако в магнитных системах

со спином $s=1/2$ в одном измерении имеется точное преобразование от спиновых к ферми-операторам. Соответствующая динамическая группа есть $\prod_k \otimes SU(2)_k$, а классическая динамика описывается

гармоническим движением на сфере S^2 .

Как и ранее, динамическая группа $\prod_k \otimes G_k$ описывается алгеброй

/12/, но после преобразования Фурье алгебра на решетке будет

алгеброй Каца-Мууди вида

$$[J_\alpha^n, J_\beta^m] = ic_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma^{n+m}, \quad (n, m = 0, 1, 2, \dots)$$

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МОДЕЛИ БОЗЕ-ГАЗА

Перейдем к описанию нелинейных моделей, сохраняющих свойство интегрируемости, присущее линейным системам, описанным выше. Такое сужение связано с тем, что последовательная теория пока существует лишь для интегрируемых систем в одном измерении.

Описание бозе-газа р-сортов притягивающегося типа и q-сортов отталкивающегося типа приводит к векторному обобщению НУШ /1/ на модель $U(p, q)$ НУШ^{1,12}. Интегрируемость НУШ связана с существованием для него вспомогательной линейной задачи

$$\partial_x \Phi^{(\lambda)} = U(x, t; \lambda) \Phi^{(\lambda)}, \quad \partial_t \Phi^{(\lambda)} = V(x, t; \lambda) \Phi^{(\lambda)} \quad /18/$$

которая позволяет, используя калибровочное преобразование, построить нелинейную σ -модель, калибровочно-эквивалентную НУШ, - классическую модель магнетика Гейзенберга

$$S_t = \frac{1}{2i} [S, S_{xx}], \quad S^2 = I \quad /19/$$

Модель изотропного магнетика, а соответственно и НУШ при $S \in sl(2, C)$ калибровочно эквивалентна также модели анизотропного магнетика⁹.

$$\tilde{S}_t = \frac{1}{2i} [\tilde{S}, \tilde{S}_{xx}] + \frac{\Delta}{8i} [\tilde{S}, \sigma_3] [\sigma_3, \tilde{S}], \quad \tilde{S}^2 = I \quad /20/$$

Алгебры симметрии для S и \tilde{S} в общем случае различны и зависят от знака анизотропии Δ . Для $S \in SL(2, C)/U(1) \times U(1)$ калибровочно-эквивалентное НУШ есть

$$iq_t + q_{xx} + 2(\eta q)q = 0, \quad -i\eta_t + \eta_{xx} + 2(\eta q)\eta = 0 \quad /21/$$

Эта система выделением эрмитовой и антиэрмитовой частей U, V -пары приводится к системе двух связанных НУШ¹⁰:

$$\begin{aligned} i\Psi_{1t} + \Psi_{1xx} + 2(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2)\Psi_1 + 2(\Psi_1^* \Psi_2 - \Psi_1 \Psi_2^*)\Psi_2 &= 0, \\ i\Psi_{2t} + \Psi_{2xx} + 2(|\Psi_1|^2 - |\Psi_2|^2)\Psi_2 + 2(\Psi_1^* \Psi_2 - \Psi_1 \Psi_2^*)\Psi_1 &= 0. \end{aligned} \quad /22/$$

Ее эрмитова редукция есть $U(1,1)$ НУШ¹¹. Другая /неэрмитова/ редукция, соответствующая анизотропному ферромагнетнику Гейзенберга типа "легкая плоскость", описывается модифицированным НУШ¹¹:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - 2(|\Psi|^2 - \rho)\Psi - \frac{|\Psi_x|^2 \Psi}{2(|\Psi|^2 - \rho)} - \frac{\Psi_x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \ln(\rho - |\Psi|^2) = 0,$$

$$\Psi \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\rho} \exp i\alpha_{\pm}, \quad \rho = \Delta/8.$$

Вещественные редукции многообразия $SL(2, \mathbb{C})/U(1) \times U(1)$:

а/ $S \in SU(2)/U(1)$ /сфера - пространство постоянной положительной кривизны/• НУШ притягивающегося типа;

б/ $S \in SU(1,1)/U(1)$ /псевдосфера - пространство постоянной отрицательной кривизны/• НУШ отталкивающегося типа;

В общем случае калибровочное соответствие имеет место для НУШ с изогруппой H и модели Гейзенберга на однородном пространстве $S \in G/H$, где G - калибровочная группа ^{13 14}. Для комплексного проективного пространства $G/H = \mathbb{C}P_n$, например, с постоянной кривизной R и формой $g_{\alpha\beta}$ соответствующее векторное НУШ имеет вид ¹⁴

$$i\Psi_t^\alpha = \Psi_{xx}^\alpha + R \left(\sum_{\beta, \gamma} g_{\beta, -\gamma} \Psi^\beta \Psi^{*\gamma} \right) \Psi^\alpha. \quad /23/$$

Отсюда видно, что константа связи НУШ является кривизной R поверхности G/H . Таким образом, обобщенный магнетик Гейзенберга позволяет геометризовать взаимодействие в слабонеидеальном бозегазе так же, как и в линейных моделях.

Интегрируемость модели Гейзенберга /19/ и НУШ /1/ / $\Delta = 1$ / приводит к еще одному важному свойству: существованию у них бесконечномерной неабелевой группы симметрии. Уравнение /19/ является условием совместности системы уравнений типа /18/. "Волновая функция" $\Phi^{(\lambda)}(x, t)$ принимает значение в $SU(1,1)$ ($SL(2, \mathbb{C})$) для действительных /комплексных/ значений спектрального параметра λ . Как и в $SU(2)$ случае ¹⁵, существует бесконечномерная алгебра Ли $SU(1,1) \otimes R[\lambda, \lambda^{-1}]$ с элементами - $su(1,1)$ -значными полиномами Лорана /действительная форма алгебры петель соответствующей алгебры Каца-Муди $A_1^{(1)}$ /. Представления алгебры $su(1,1) \otimes R[\lambda, \lambda^{-1}]$ действуют на пространстве волновых функций $\Phi^{(\lambda)}$, являющихся решением системы /18/. Пока не ясно, как эта бесконечномерная алгебра связана с обратной задачей, т.к. последняя очень чувствительна к граничным условиям на потенциалы, которые меняются при действии первой. Используя эту алгебру, можно было бы, по-видимому, описать спектр и состояния нелинейной системы, но в настоящее время этот вопрос остается открытым. В следующей части мы покажем, как, используя калибровочную группу, построить решения для магнетика Гейзенберга по известным решениям НУШ.

SU(1,1)-КЛАССИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАГНЕТИКА

Из калибровочной эквивалентности следует, что

$$S(x, t; \lambda) = \Phi^{(\lambda_0)^{-1}} \sigma \Phi^{(\lambda_0)},$$

где $S \in SU(1,1)/U(1)$, элемент калибровочной группы $\Phi^{(\lambda_0)}$ - решение линейной задачи /18/ для НУШ. Используя в качестве $\Phi^{(\lambda_0)}$ известные решения Йоста, мы можем построить соответствующий набор решений уравнений Гейзенберга /19/ ¹⁶.

Модель магнетика /19/ в бессолитонном секторе описывает прецессию вектора "намагниченности" $\vec{S} = (S_1, S_2, S_3)$ на поверхности гиперболоида с богوليубовской частотой, аналогично прецессии вектора \vec{J} в модели /10/. Такие конфигурации естественно назвать спиновыми волнами. Соответствующая им энергия бесконечнократно вырождена по k .

Спектр магнонов в этой модели:

- а/ при $k \gg \sqrt{\rho} \in (k) \sim k^2$, как у магнонов в ферромагнетике;
- б/ при $k \rightarrow 0 \in (k) \sim k$, как у магнонов в антиферромагнетике.

В состоянии с $k > 0$ намагниченности верхней и нижней полы гиперболоида компенсируют друг друга.

Кроме спиновых волн уравнение /19/ имеет решение в виде солитона, описывающее отклонение вектора намагниченности из плоскости прецессии. Связь между энергией, импульсом и намагниченностью на одном солитоне имеет вид

$$E \cdot M_z = 8 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\rho}{k^2}} \right) \sin^2 \frac{\Pi}{4}.$$

При $k \gg \sqrt{\rho}$ получен результат

$$E = \frac{16}{M_z} \sin^2 \frac{\Pi}{4},$$

совпадающий с точным результатом для $SU(2)$ ферромагнетика и результатом Бете для спинового комплекса. При малых импульсах $\Pi: E = \Pi^2/M_z$, а M_z характеризует внутреннее движение /эффективная масса свободной частицы/.

При $k \ll \sqrt{\rho}$ $M_z \rightarrow \infty$ /замедление прецессии вплоть до полной остановки/ и уже не является динамической переменной. Исключая M_z из соответствующих выражений для E и Π , получаем при $k \rightarrow 0$

$$E = 4\sqrt{\rho} \sin \frac{\Pi}{2}, \quad 0 \leq \frac{\Pi}{2} \leq \pi.$$

Этот спектр совпадает со спектром дырочного возбуждения в антиферромагнетике. При малых Π он переходит в линейный спектр одного магнона $E(\Pi) = 2\sqrt{\rho}\Pi$. Таким образом, аналогично тому, как богوليубовская дисперсия в двух предельных случаях описывает частицы с квадратичной и линейной дисперсией, наше солитонное

решение описывает спектр магнонов ферромагнетика и антиферромагнетика соответственно. Как известно, такого типа поведением на уровне линеаризованной теории обладают ферримангнетики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, 1982, 53, с.55.
2. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеевков С.А. В сб.: Труды III Международного симпозиума по статистической механике. Д17-84-850, том 2, Дубна, 1984, с.45.
3. Боголюбов Н.Н. Изв.АН СССР, сер.физ., 1947, т.11, № 1, с.77.
4. Solomon A.I. J.Math.Phys., 1971, 12, p.390.
5. Переломов А.М. Com.Math.Phys., 1972, 26, p.222.
6. Gerry S.C., Silverman S. J.Math.Phys., 1982, 23, p.1995.
7. Маханьков В.Г., Пашаев О.К., Сергеевков С.А. В сб.: Краткие сообщения ОИЯИ. № 10-85, Дубна, 1985, с.45.
8. Reiter G. Phys.Rev.Lett., 1981, 46, p.202.
9. Kundu A., Pashaev O.K. J.Phys.C, 1983, 18C, p.L585.
10. Пашаев О.К. ОИЯИ, 2-83-230, Дубна, 1983.
11. Kotlyarov V.P. J.Phys.C, 1984, 17C, p.L139.
12. Маханьков В.Г., Пашаев О.К. Теоретико-групповые методы в физике. "Наука", М., 1983, т.II, с.349.
13. Makhankov V.G., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1983, 95A, p.95.
14. Fordy A.P., Kulish P.P. Com.Math.Phys., 1983, 89, p.427.
15. Eichenherr H. Preprint CERN T.H. 3299, 1982.
16. Пашаев О.К., Сергеевков С.А. ОИЯИ, P2-85-481, Дубна, 1985.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 июля 1985 года

Внимание организаций и лиц, заинтересованных в получении публикаций Объединенного института ядерных исследований

Принимается подписка на препринты и сообщения Объединенного института ядерных исследований.

Установлена следующая стоимость подписки на 12 месяцев на издания ОИЯИ, включая пересылку, по отдельным тематическим категориям:

ИНДЕКС	ТЕМАТИКА	Цена подписки на год
1.	Экспериментальная физика высоких энергий	10 р. 80 коп.
2.	Теоретическая физика высоких энергий	17 р. 80 коп.
3.	Экспериментальная нейтронная физика	4 р. 80 коп.
4.	Теоретическая физика низких энергий	8 р. 80 коп.
5.	Математика	4 р. 80 коп.
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия	4 р. 80 коп.
7.	Физика тяжелых ионов	2 р. 85 коп.
8.	Криогеника	2 р. 85 коп.
9.	Ускорители	7 р. 80 коп.
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных	7 р. 80 коп.
11.	Вычислительная математика и техника	6 р. 80 коп.
12.	Химия	1 р. 70 коп.
13.	Техника физического эксперимента	8 р. 80 коп.
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами	1 р. 70 коп.
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях	1 р. 50 коп.
16.	Дозиметрия и физика защиты	1 р. 90 коп.
17.	Теория конденсированного состояния	6 р. 80 коп.
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники	2 р. 35 коп.
19.	Биофизика	1 р. 20 коп.

Подписка может быть оформлена с любого месяца текущего года.

По всем вопросам оформления подписки следует обращаться в издательский отдел ОИЯИ по адресу: 101000 Москва, Главпочтамт, я/я 79.