ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17-85-51

Н.Ангелеску*, В.А.Загребнов

ОПИСАНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ СОСТОЯНИЙ m-ВЕКТОРНОЙ ФЕРРОМАГНИТНОЙ МОДЕЛИ КЮРИ-ВЕЙССА С ПОМОЩЬЮ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА КВАЗИСРЕДНИХ

Направлено в "Journal of Statistical Physics"

* Центральный институт физики, Бухарест

1985

I. Введение

Метод квазисредних Н.Н. Боголюбова[I] возник как средство для снятия вырождения (т.е. выделения чистых фаз) в моделях статистической механики, которые испытывают фазовые переходы, сопровождающиеся спонтанным нарушением симметрии. Метод заключается в том, что в гамильтониан системы вводятся члены с источниками (внешние поля), которые понижают его симметрию до такой, которая соответствует симметрии чистой фазы ниже точки фазового перехода; после перехода к термодинамическому пределу в корреляционных функциях источники выключаются. Этот подход позволил построить точное решение модели БКШ[2] и других моделей, соответствующих "среднему полю", см. например[3,4] . В настоящее время он является важнейшим инструментом для исследований моделей со спонтанным нарушением симметрии, см.[5-7] .

Описание равновесных состояний моделей классической статистической механики в пределе бесконечного объема основано сейчас на понятии предельного гиббсовского распределения, которое было впервые введено Минлосом[8] . В наиболее общей форме это понятие появилось затем в работах Добрушина[9] , Ланфорда и Рюэля[I0] ; там же, для систем с "достаточно хорошим" взаимодействием, было дано описание случайных гиббсовских полей при помощи условных вероятностей (уравнение ДЛР), см. также[II,I2] . Оказывается, что для таких систем множество всех предельных гиббсовских распределений совпадает с множеством всех слабых пределов для гиббсовских распределений в конечных объемах с различными фиксированными конфигурациями вне сосуда (граничные условия).

С другой стороны, для систем, соответствующих моделям "среднего поля", взаимодействие зависит от объема. Поэтому для них невозможно определить взаимодействие частиц в сосуде с бесконечной конфигурацией частиц вне сосуда, а следовательно, определить предельное гиббсовское распределение с помощью уравнения ДЛР. В этом случае множество равновесных состояний в бесконечном объеме (предельные состояния) должны определяться прямо, как слабые пределы гиббсовских состояний в конечных объемах[8] .

В настоящей работе эта программа реализована для n -векторной модели Кюри-Вейсса. Для этого в разделе 2 предложено обобщение метода квазисредних. Это обобщение сводится к следующему: I) в качестве нарушающего симметрию источника в гамильтониан модели включается пространственно неоднородное внешнее поле, в общем случае зависящее от объема; 2) поскольку мы интересуемся предельными состояниями в нулевом внешнем поле (многофазовой областью), то внешнее поле выключается одновременно с термодинамическим пределом. С помощью так обобщенного метода квазисредних можно построить не только чистые фазы, но и все остальные предельные состояния, включая смешанные и трансляционно-неинвариантные.

Хотя модель Кюри-Вейсса исследовалась с различных точек зрения [I3-I5] , нам неизвестны попытки дать полное описание ее предельных равновесных состояний (исключением является недавняя работа [I6] , где была рассмотрена модель Кюри-Вейсса-Изинга). В настоящей работе показано, что для n -векторной модели Кюри-Вейсса: а) все предельные состояния, полученные с помощью описанного выше метода, инвариантны (так же как и гамильтониан для нулевого внешнего поля) относительно группы перестановок спинов; б) все эти состояния являются выпуклыми комбинациями чистых фаз, которые строятся с помощью обычного метода квазисредних. Более точно, предельные состояния для этой модели в нулевом внешнем поле полностью определяются средней намагниченностью, и поэтому соответствуют точкам шара в пространстве $\mathbb{R}^n$, радиус которого совпадает со спонтанной намагниченностью: чистые фазы соответствуют точкам, лежащим на поверхности шара, а смешанные фазы соответствуют внутренним точкам этого шара.

Раздел 3 посвящен исследованию структуры предельных состояний для неоднородных внешних полей. Показано, что для почти всех (относительно стандартной вероятностной меры в прямом произведении пространств) конфигураций внешнего поля предельные состояния существуют и определяются некоторым "усредненным" уравнением самосогласования.

2. Предельные состояния в нулевом внешнем поле

Начнем с определений. Пусть заданы $\underset{\sim}{h}_N=(\vec{h}_1^{(N)},\dots,\vec{h}_N^{(N)})\in\mathbb{R}^{nN}$, $\beta>0$. В каждой точке $j = 1,2,\dots,N$ (геометрическая структура этого множества для дальнейшего несущественна) зададим спин $\vec{s}_j$, т.е. случайный вектор из пространства $\mathbb{R}^n$ с единичной длиной: $\vec{s}_j\in S^{n-1}$, а на единичной сфере S^{n-1} зададим инвариантную

относительно вращений вероятностную меру $d\vec{s}$. Совместное вероятностное распределение для величин ($\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_N$) $\equiv \underset{\sim}{s}_N$, соответствующее температуре β^{-1} и внешнему полю $\underset{\sim}{h}_N^{(N)}$, определяется в гиббсовской статистической механике плотностью (по отношению к свободной мере $d\underset{\sim}{s}_N=\prod_{1\le j\le N} d\vec{s}_j$), которая имеет вид

$$p_N(\underset{\sim}{s}_N;\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)})=\{Z_N(\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)})\}^{-1}\exp\left[-\beta\mathcal{H}_N(\underset{\sim}{s}_N;\underset{\sim}{h}_N^{(N)})\right], \tag{I}$$

где $Z_N(\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)})$ -статистическая сумма системы, а гамильтониан системы имеет вид

$$\mathcal{H}_N(\underset{\sim}{s}_N;\underset{\sim}{h}_N^{(N)})=-\frac{1}{2N}\Big(\sum_{j=1}^N\vec{s}_j\Big)^2-\sum_{j=1}^N\vec{h}_j^{(N)}\cdot\vec{s}_j\ . \tag{2}$$

Плотность (I) позволяет вычислить любую совместную функцию распределения для k спинов, например, для $\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_k$:

$$P_k^{(N)}(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)})=d\underset{\sim}{s}_k\int\prod_{j=k+1}^N d\vec{s}_j\, p_N(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_N;\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)})\ . \tag{3}$$

Допустим теперь, что поля $\underset{\sim}{h}^{(N)}$ выбраны так, что для каждого фиксированного k существуют пределы:

$$P_k(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\beta,\underset{\sim}{h})=\lim_{N\to\infty}P_k^{(N)}(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)})\ . \tag{4}$$

Из (3) следует тогда, что $\{P_k\}_{k=1}^\infty$ является согласованным семейством вероятностных мер на конфигурационном пространстве $\mathfrak{S}=(S^{n-1})^{\mathbb{N}}$, которое является компактом (с борелевской Σ -алгеброй) в топологии произведения. Тогда по теореме Колмогорова (см. например [I7]) на пространстве $\mathfrak{S}$ существует единственная вероятностная мера P, такая, что её конечномерные распределения (проекции) на $\prod_{1\le j\le k}S^{n-1}$ совпадают с P_k.

Вероятностную меру P на пространстве $\mathfrak{S}$, построенную описанным выше способом с помощью плотности (I), которая определяется гамильтонианом (2), мы будем называть (в соответствии с [8]) гиббсовским распределением (состоянием) n -векторной модели Кюри-Вейсса в бесконечном объёме, или просто предельным состоянием.

Предельное состояние P зависит от последовательности $\{\underset{\sim}{h}^{(N)}\}$. Поэтому в тех случаях, когда для всех $j\in\mathbb{N}$ существуют пределы

$\lim\limits_{N\to\infty} \vec{h}_j^{(N)} = \vec{h}_j$, мы будем считать, что P зависит от конфигурации внешнего поля $\{\vec{h}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Нас, в частности, будут интересовать предельные состояния, соответствующие нулевому внешнему полю ($\vec{h}_j = 0, j\in\mathbb{N}$), поскольку для $\underset{\sim}{h}_N^{(N)} = 0$ гамильтониан $\mathcal{H}_N$ инвариантен относительно перестановок спинов и относительно одновременного поворота всех спинов, в то время как предельные состояния могут не обладать этими симметриями.

Прежде чем приступить к формулировке результатов, напомним некоторые факты, связанные с моделью Кюри-Вейсса. Определим функцию $\varphi_n : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ соотношением

$$\varphi_n(y) = \beta^{-1} \ln \int_{S^{n-1}} d\vec{s}\, \exp(\beta\, \vec{s}\cdot\vec{y}) \ , \ y = |\vec{y}| \ . \qquad (5)$$

Эта функция является возрастающей и выпуклой вниз, в то время как функция φ_n' монотонно возрастает от нуля до единицы и выпукла вверх, а $\varphi_n''(0) = \beta/n$. Следовательно, функция $f_n : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^1$, определенная соотношением

$$f_n(y) = \frac{1}{2} y^2 - \varphi_n(y) , \qquad (6)$$

имеет лишь одну точку минимума $y_0(\beta) \in [0,+\infty)$, которая равна нулю, если $\beta \leq n$, и совпадает с ненулевым решением уравнения

$$y = \varphi_n'(y) , \qquad (7)$$

если $\beta > n$. Теперь, используя тождество

$$e^{\frac{\beta}{2N}\vec{S}\cdot\vec{S}} = \left(\frac{\beta N}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\; e^{-\frac{\beta N}{2} y^2}\, e^{-\beta \vec{S}\cdot\vec{y}} \qquad (8)$$

и определения (5) и (6), мы получаем для статистической суммы Z_N следующее выражение:

$$Z_N(\beta, 0) = \int_{(S^{n-1})^N} d\underset{\sim}{s}_N \ \exp\left\{\frac{\beta}{2N}\left(\sum_{j=1}^N \vec{s}_j\right)^2\right\} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\vec{y}}{(2\pi)^{n/2}}\, \frac{e^{-N\beta f_n(y)}}{(\beta N)^{-n/2}} \ . \qquad (9)$$

Переходя к сферическим координатам и интегрируя по угловым переменным, с помощью одномерного метода Лапласа получаем:

$$\sigma_n(\beta) = \lim_{N\to\infty} (\beta N)^{-1} \ln Z_N(\beta, 0) = -f_n(y_0(\beta)) \ . \qquad (10)$$

Следовательно, критическая температура для модели Кюри-Вейсса $\beta_c^{-1} = n$, а спонтанная намагниченность равна $y_0(\beta)$.

Заметим, что случай модели Кюри-Вейсса-Изинга соответствует $n = 1$, $S^0 = \{-1,+1\}$ и $\varphi_{n=1}(y) = \beta^{-1} \ln \operatorname{ch} \beta y$, см. например [16].

<u>Теорема I.</u> Пусть $\|\underset{\sim}{h}_N^{(N)}\|^2 = \sum_{j=1}^N (\vec{h}_j^{(N)})^2 \longrightarrow 0$ при $N\to\infty$. Обозначим $\vec{\rho}_N = \frac{\vec{H}_N}{|\vec{H}_N|}$, $\vec{H}_N = \sum_{j=1}^N \vec{h}_j^{(N)}$. Тогда:

(а) Если $|\vec{H}_N| \to \infty$ и $\vec{\rho}_N \to \vec{\rho}$ при $N\to\infty$, то пределы (4) существуют и имеют вид

$$P_k(d\vec{s}_1, \dots, d\vec{s}_k; \vec{\rho}) = \prod_{j=1}^N p(\vec{s}_j; \vec{\rho})\, d\vec{s}_j \ , \ k = 1,2,\dots \ ; \qquad (11)$$

$$p(\vec{s}; \vec{\rho}) = \exp\{\beta\, [y_0(\beta)\, \vec{s}\cdot\vec{\rho} - \varphi_n(y_0(\beta))]\} \ . \qquad (12)$$

(б) Если $\vec{H}_N \to \vec{H}$ при $N\to\infty$, то пределы (4) существуют и имеют вид

$$\mathcal{P}_k(d\vec{s}_1, \dots, d\vec{s}_k; \vec{H}) =$$

$$= \int_{S^{n-1}} d\vec{\rho}\, \exp\{-\beta [y_0(\beta) \vec{H}\cdot\vec{\rho} + \varphi_n(y_0(\beta)|\vec{H}|)]\} P_k(d\vec{s}_1, \dots, d\vec{s}_k; \vec{\rho}) \ . \qquad (13)$$

<u>Доказательство.</u> Мы рассмотрим вначале случай $\beta > \beta_c$, когда $y_0(\beta) > 0$ и докажем (б). Используя вновь тождество (8) и определение (6), плотность совместного распределения для k спинов в конечном объеме (см. (3)) можно представить в виде

$$P_k^{(N)}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k; \beta, \underset{\sim}{h}_N^{(N)}) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\, \exp\left\{-\beta\left[\frac{1}{2}Ny^2 + \vec{\sigma}_k\cdot\vec{y} - \sum_{j=1}^k \vec{s}_j\cdot\vec{h}_j^{(N)} - \sum_{j=k+1}^N \varphi_n(|\vec{y} - \vec{h}_j^{(N)}|)\right]\right\}}{\int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\, \exp\left\{-\beta\left[\frac{1}{2}Ny^2 - \sum_{j=1}^N \varphi_n(|\vec{y} - \vec{h}_j^{(N)}|)\right]\right\}} ,$$

где $\vec{\sigma}_k = \sum_{j=1} \vec{s}_j$. Разлагая функцию $\varphi_n(|\vec{y} - \vec{h}|)$ до второго порядка по $\vec{h}$: $\varphi_n(|\vec{y} - \vec{h}|) = \varphi_n(y) - \vec{h}\cdot\vec{y}\, \varphi_n'(y)\cdot y^{-1} + R(\vec{y}, \vec{h})$, получаем

$$P_k^{(N)}(\vec{s}_1, \dots, \vec{s}_k; \beta, \underset{\sim}{h}^{(N)}) =$$

$$= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\, \exp\{-\beta[N f_n(y) + \vec{H}_N\cdot\vec{y}\, \varphi_n'(y)\cdot y^{-1} + \vec{\sigma}_k\cdot\vec{y} + k\varphi_n(y)]\} \exp\{\beta[\sum_{j=1}^k \vec{s}_j\cdot\vec{h}_j^{(N)} + \sum_{j=k+1}^N R(\vec{y}, \vec{h}_j^{(N)})]\}}{\int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\, \exp\{-\beta[N f_n(y) + \varphi_n'(y) \vec{H}_N\cdot\vec{y}\, y^{-1}]\} \exp\{\beta \sum_{j=1}^N R(\vec{y}, \vec{h}_j^{(N)})\}} \qquad (14)$$

Теперь из предположения $\vec H_N \to \vec H$ (см. (б)) следует, что $\vec H_N\cdot\vec y\,\varphi_n'(y)y^{-1} \to \vec H\cdot\vec y\,\varphi_n'(y)y^{-1}$ при $N\to\infty$ равномерно по $\vec y$. А с другой стороны, используя выпуклость функции $\varphi_n'(y)$, получаем

$$0\le R(\vec y,\vec h)=h^2\varphi_n''(y_\theta)+\left[h^2-\left(\frac{\vec h\cdot\vec y_\theta}{y_\theta}\right)^2\right]\frac{\varphi_n'(y_\theta)}{y_\theta}\le 2h^2\varphi_n''(0)=\frac{2\beta}{n}h^2,$$

где $\vec y_\theta=\vec y-\theta\vec h$, для некоторого $\theta\in(0,1)$. Следовательно, условие $\|\underset{\sim}{h}{}_N^{(N)}\|\to 0$ приводит к тому, что последние экспоненты под интегралами в числителе и знаменателе выражения (14) равномерно по $\vec y$ стремятся к 1 при $N\to\infty$. Если определить усреднение с помощью формулы

$$\langle g\rangle_1^{(N)}=\frac{\int_{\mathbb R^n}d\vec y\, g(\vec y)\exp\{-\beta N f_n(y)\}}{\int_{\mathbb R^n}d\vec y\,\exp\{-\beta N f_n(y)\}},$$

тогда обычный метод Лапласа (для каждого фиксированного направления $\vec\rho$ и выделения интегрирования по угловым переменным) дает

$$\lim_{N\to\infty}\langle g\rangle_1^{(N)}=\int_{S^{n-1}}d\vec\rho\; g(y_0(\beta)\vec\rho).$$

Учитывая, что $|\langle g\rangle_1^{(N)}|\le\sup_{\vec y}|g(\vec y)|$ (так что $\langle g_N-g\rangle_1^{(N)}\to0$, если $g_N\to g$ равномерно по $\vec y$ при $N\to\infty$), мы получаем из (14) в пределе $N\to\infty$ следующее выражение:

$$\lim_{N\to\infty}P_k^{(N)}(\vec\sigma_1,\dots,\vec\sigma_k;\beta,\underset{\sim}{h}{}_N^{(N)})=\lim_{N\to\infty}\frac{\left\langle\exp\left\{-\beta\left[\frac{\vec H\cdot\vec y}{y}\varphi_n'(y)+\vec\sigma_k\cdot\vec y+k\varphi_n(y)\right]\right\}\right\rangle_1^{(N)}}{\left\langle\exp\left\{-\beta\frac{\vec H\cdot\vec y}{y}\varphi_n'(y)\right\}\right\rangle_1^{(N)}}= \quad (15)$$

$$=\frac{\int_{S^{n-1}}d\vec\rho\,\exp\{-\beta[\vec H\cdot\vec\rho\,\varphi_n'(y_0(\beta))+y_0(\beta)\vec\sigma_k\cdot\vec\rho+k\varphi_n(y_0(\beta))]\}}{\int_{S^{n-1}}d\vec\rho\,\exp\{-\beta\vec H\cdot\vec\rho\,\varphi_n'(y_0(\beta))\}}.$$

Оно совпадает с выражением (13), если вспомнить, что $y_0(\beta)$ является решением уравнения (7). Таким образом часть (б) теоремы 1 доказана.

Для доказательства части (а) необходимы дополнительные аргументы, потому что теперь зависящие от угловых переменных выражения в формуле (14) содержат еще и расходящийся фактор $|\vec H_N|=H_N$. Определим еще

одно вспомогательное усреднение $\langle-\rangle_2^{(N)}$ с помощью плотности (Q_N -нормирующий множитель):

$$Q_N^{-1}\exp\left\{-\beta N\left[f_n(y)+\frac1N\frac{\vec H_N\cdot\vec y}{y}\varphi_n'(y)\right]\right\}.$$

С его помощью мы можем (так же, как это было сделано выше) избавиться от последних экспонент под знаками интегралов в числителе и знаменателе выражения (14). Таким образом, нам остается только вычислить

$$\lim_{N\to\infty}\langle\exp\{-\beta[\vec\sigma_k\cdot\vec y+k\varphi_n(y)]\}\rangle_2^{(N)}=P_k.$$

Вычисляя (с учетом (5)) интеграл по угловым переменным, получаем

$$P_k=\lim_{N\to\infty}\frac{\int_0^\infty dy\,y^{n-1}\exp\{-\beta[Nf_n(y)-\varphi_n(\vec H_N\varphi_n'(y)+\vec\sigma_k y)+k\varphi_n(y)]\}}{\int_0^\infty dy\,y^{n-1}\exp\{-\beta[Nf_n(y)-\varphi_n(H_N\varphi_n'(y))]\}}. \quad (16)$$

Поскольку $N^{-1}H_N\to0$ при $N\to\infty$, а функция растет на бесконечности только линейно, то очевидно, что при вычислении предела в (16) вклад в интегралы дает лишь малый интервал $I\subset(0,\infty)$, содержащий минимум функции $f_n(y)$. Разложим функцию $\varphi_n(|\vec H_N\varphi_n'(y)+\vec\sigma_k y|)$ для $y\in I$ до второго порядка по $\vec\sigma_k y$:

$$\varphi_n(|\vec H_N\varphi_n'(y)+\vec\sigma_k y|)=\varphi_n(H_N\varphi_n'(y))+y\vec\rho_N\cdot\vec\sigma_k\varphi_n'(H_N\varphi_n'(y))+\Lambda. \quad (17)$$

Тогда для остатка Λ и $\theta_N(y)\in(0,1)$ равномерно по $y\in I$ получаем

$$|\Lambda|\le\frac12|\vec\sigma_k|^2\sup_{y\in I}\{y^2\varphi_n''(|\vec H_N\varphi_n'(y)+\theta_N(y)\vec\sigma_k y|)\}\xrightarrow[N\to\infty]{}0, \quad (18)$$

поскольку производная $\varphi_n'(y)$ на интервале I отлична от нуля. Так как $\varphi_n'(y)\to1$ при $y\to\infty$, то мы опять можем применить аргументы, основанные на равномерной сходимости, с помощью которых из выражений (16)-(18) получаем

$$P_k(\vec s_1,\dots,\vec s_k;\vec\rho)=\exp\{\beta[y_0(\beta)\vec\sigma_k\cdot\vec\rho-k\varphi_n(y_0(\beta))]\},$$

что и доказывает (11).

Для $\beta\le\beta_c$ величина $y_0(\beta)=0$. Поэтому в этом случае нет необходимости (да это и невозможно) при интегрировании в (14) по угловым переменным ограничиваться лишь некоторой малой областью в окрестности направления, которое определяется вектором $\vec{\beta}$ (I6), либо производить интегрирование с мерой, сосредоточенной в направлении $\vec{H}$ см.(I5). Нетрудно видеть, что при выполнении условий: $\varepsilon_N > 0$ и $\varepsilon_N \to 0$ при $N \to \infty$ так, что $\varepsilon_N > (H_N/N)^{1/3}$ только окрестность начала координат вида $|\vec{y}|^2 < \varepsilon_N$ (или $|\vec{y}|^4 < \varepsilon_N$ при $\beta = \beta_c$) будет давать вклад при вычислении предела выражения (I4) для $N \to \infty$. С другой стороны, в этой окрестности выражение $\exp\{-\beta[\vec{\sigma}_k \vec{y} + k\varphi_n(y)]\}$ сколь угодно близко (равномерно по угловым переменным) к I, откуда следуют выражения (II)-(I3) при $y_0(\beta) = 0$. $\square$

Следствие I. Меры $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ (и $\{\mathcal{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$) на $\mathfrak{S}$ удовлетворяют условию согласованности. Поэтому в силу теоремы Колмогорова на пространстве $\mathfrak{S}$ существуют, по крайней мере, два семейства вероятностных мер: $dP_{\vec{\beta}}(\underset{\sim}{S})$ и $d\mathcal{P}_{\vec{H}}(\underset{\sim}{S})$.

Картина общей структуры предельных состояний для нулевого внешнего поля, которая описывается теоремой и следствием, не является неожиданной. Действительно, если $\beta > \beta_c$, то случай (а) отвечает чистым состояниям (чистым фазам), которые соответствуют независимым одинаково распределенным спинам с неинвариантной (относительно вращений) вероятностной мерой в каждом узле, равной $P(d\vec{s};\vec{\beta})$. Иными словами, симметрия относительно вращений (но не относительно перестановок спинов) в этих состояниях нарушена. Независимость случайных величин (спинов) в разных узлах приводит к тому, что для любых g_1, $g_2 \in C(\mathfrak{S})$ и $\operatorname{supp} g_1 \cap \operatorname{supp} g_2 = \emptyset$ меры $dP_{\vec{\beta}}$ - обладают кластерным свойством:

$$\int g_1 g_2 \, dP_{\vec{\beta}} = \int g_1 \, dP_{\vec{\beta}} \int g_2 \, dP_{\vec{\beta}} \quad , \tag{I9}$$

которое в данном случае характеризует чистоту (эргодичность) состояний $dP_{\vec{\beta}}$. С другой стороны, случай (б) описывает смешанные состояния (смешанные фазы) $d\mathcal{P}_{\vec{H}}$. Мера $d\mathcal{P}_{\vec{H}}$, в соответствии с (I3), явным образом разлагается на эргодические компоненты $dP_{\vec{\beta}}$:

$$d\mathcal{P}_{\vec{H}} = \int_{S^{n-1}} \mu_{\vec{H}}(d\vec{\beta}) \, dP_{\vec{\beta}} \quad , \tag{20}$$

которые являются крайними точками выпуклого множества предельных состояний, т.е. состояниями неразложимыми. Как оказалось, вероятностная мера $\mu_{\vec{H}}(d\vec{\beta})$ на S^{n-1} , которая определяет смешанное состояние, зависит только от "полного магнитного поля" $\vec{H}$, см. (I3). Если $\beta \leqslant \beta_c$, то выражение (I2), как следует ожидать, превращается в равномерное распределение на сфере S^{n-1} , а распределения (II) и (I2) совпадают, что соответствует единственности предельного состояния выше критической температуры.

Замечание I. Если $\{\underset{\sim}{h}_N^{(N)}\}$ - некоторая последовательность внешних полей, удовлетворяющая условию $\|\underset{\sim}{h}_N^{(N)}\| \to 0$ при $N \to 0$ (см. теорему I), то из компактности следует существование подпоследовательности $\{N_i\}$, такой, что вектора $\{\vec{\rho}_{N_i}\}$ сходятся, а модули $\{H_{N_i}\}$ либо сходятся, либо расходятся при $N_i \to \infty$. В обоих вариантах мы находимся либо в рамках рассмотренного выше случая (б), либо случая (а). Следовательно, семейство $\{P_k^{(N_i)}(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\beta,\underset{\sim}{h}_{N_i}^{(N_i)})\}_{k=1}^{\infty}$ сходится при $N_i \to \infty$ к проекциям некоторой вероятностной меры на пространстве $\mathfrak{S}$, т.е. к некоторому предельному состоянию.

Замечание 2. Наши результаты демонстрируют, что в модели с гамильтонианом (2) в нулевом внешнем поле нет пространственно неоднородных предельных состояний, если, например $j \in \mathbb{Z}^d$. Чтобы получить пространственно неоднородные состояния, необходимо модифицировать взаимодействие таким образом, чтобы появилось несколько уравнений для самосогласованного поля (как это сделано, например, в модели Каца-Гельфанда[I8]), в этом случае действительно возникают интересные явления, связанные с неоднородностью[I9] .

Замечание 3. Здесь уместно сделать замечание о предположении $\|\underset{\sim}{h}_N^{(N)}\| \to 0$ при $N \to \infty$, которое содержится в теореме I. Технически это предположение о регулярности сходимости внешнего поля к нулю служит для упрощения доказательства теоремы I. Мы считаем, что основные результаты: (I) явное описание чистых состояний, так же как и (2) все остальные предельные состояния являются выпуклыми комбинациями этих последних, справедливы и при более слабом условии: $\max_{1 \leq j \leq N} |\vec{h}_j^{(N)}| \to 0$ при $N \to \infty$. Это легко проверить, например, для пространственно однородных внешних полей: $\vec{h}_j^{(N)} = \vec{h}^{(N)}$, $j = 1,2,\dots,N$, $|\vec{h}^{(N)}| = c \cdot N^{-\alpha}$. Нетрудно проверить, что утверждение теоремы, соответствующее случаю (а), справедливо для <u>всех</u> $0 < \alpha < 1$, в то время как $\|\underset{\sim}{h}_N^{(N)}\| = c \cdot N^{1-2\alpha} \to 0$ только для $\alpha > 1/2$; случай (б) соответствует $\alpha \geqslant 1$.

Как некоторый случай, представляющий определенный интерес, мы отметим способ построения предельных состояний с помощью задания "граничных условий". Если конфигурация последних $N - m_N$ спинов фиксирована: $\vec{s}_j = \vec{\sigma}_j$, $j = m_N+1, m_N+2,\dots,N$, то вероятностное распределение первых m_N спинов задается гамильтонианом

$$\mathcal{H}_N = -\frac{1}{2N}\Big(\sum_{j=1}^{m_N}\vec{S}_j\Big)^2 - \Big(\frac{1}{N}\sum_{j=m_N+1}^{N}\vec{\sigma}_j\Big)\cdot\sum_{j=1}^{m_N}\vec{S}_j \quad (21)$$

Таким образом, эта процедура эквивалентна включению однородного внешнего поля $\vec{h}_j^{(N)} = N^{-1}\sum_{m_N+1\le j\le N}\vec{\sigma}_j$ и перенормировке температуры: $N^{-1}(N-m_N)\beta$.

Замечание 4. Чтобы построить предельные состояния в соответствии с методом квазисредних Н.Н. Боголюбова, необходимо для конечномерных распределений вычислить следующие пределы (k=1,2,...):

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} P_k^{(N)}(d\vec{S}_1,\dots,d\vec{S}_k;\beta,\varepsilon\underset{\sim}{h}_N) = \tilde{P}_k(d\vec{S}_1,\dots,d\vec{S}_k;\vec{h}),$$

где $\underset{\sim}{h}$ – однородное внешнее поле: $(\underset{\sim}{h})_j=\vec{h},\ j\in\mathbb{N}$. Из уравнений (2)-(10) с помощью метода Лапласа для фиксированного направления $\vec{h}$ нетрудно получить, что проекции $\{\tilde{P}_k\}_{k=1}^{\infty}$ совпадают с мерами $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$, см.(11), для $\vec{\beta}=\vec{h}/|\vec{h}|$. Следовательно, метод квазисредних дает нам тот же результат (чистые фазы), что и обобщенный метод квазисредних в случае (а) (см. теорему 1) или в случае $0<\alpha<1$ (см. замечание 3). Формально обычный метод квазисредних соответствует $\alpha=0$.

Замечание 5. Здесь мы хотим подчеркнуть, что явная формула (13) для смешанных предельных состояний в общем случае не имеет места, если при $N\to\infty$ $\|\underset{\sim}{h}_N^{(N)}\|\not\to 0$. Действительно, выберем внешнее поле в виде:

$$\vec{h}_j^{(N)} = \begin{cases} N^{-1/6}\vec{\beta} & \text{для } 1\le j<2\sqrt{N} \\ -2N^{-1/6}\vec{\beta} & \text{для } 2\sqrt{N}\le j<3\sqrt{N} \\ 0 & \text{для } 3\sqrt{N}\le j\le N. \end{cases} \quad (22)$$

Тогда $\vec{H}_N = 0$, однако члены третьего порядка в разложении выражения (14) по степеням $\vec{h}_j^{(N)}$ будут снимать вырождение и дадут предельное состояние с ненулевой намагниченностью вдоль направления $\vec{\beta}$.

3. Предельные состояния для случайных внешних полей

Здесь мы покажем, что предельные состояния для модели (2) можно определить и явно описать и для большого числа конфигураций ненулевого внешнего поля.

Пусть $\underset{\sim}{h}=\{\vec{h}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – последовательность независимых $\mathbb{R}^n$-значных одинаково распределенных случайных величин, для которых плотность распределения в каждом узле задается мерой $d\nu(\vec{h})$. Тогда конфигурации $\{\underset{\sim}{h}\}$ случайного поля принадлежат вероятностному пространству $(\Omega,\Sigma,\hat{\lambda})$, где

$$\Omega=\prod_{j\in\mathbb{N}}(\mathbb{R}^n, d\nu(\vec{h}_j)),\quad d\lambda(\underset{\sim}{h})=\prod_{j\in\mathbb{N}} d\nu(\vec{h}_j). \quad (23)$$

Теорема 2. Пусть мера $d\nu$ такова, что $\int_{\mathbb{R}^n} d\nu(\vec{h})\,h<\infty$. Тогда для модели Кюри-Вейсса (2) с $\vec{h}_j^{(N)}=(\underset{\sim}{h}^{(N)})_j$, $j=1,\dots,N$, пределы в выражении (4) существуют для почти всех (по мере $d\lambda$) конфигураций внешнего поля и являются линейными выпуклыми комбинациями мер

$$\mathbb{P}_k(d\vec{S}_1,\dots,d\vec{S}_k;\vec{y}_0)=\prod_{j=1}^{k} d\vec{S}_j\exp\{\beta[\vec{S}_j(\vec{y}_0-\vec{h}_j)-\varphi_n(|\vec{y}_0-\vec{h}_j|)]\}, \quad (24)$$

где $\vec{y}_0(\beta)\in\mathfrak{M}(\beta,\nu)$. Здесь $\mathfrak{M}(\beta,\nu)$ – множество точек минимума функции

$$\mathcal{F}_n(\vec{y})=\frac{1}{2}y^2-\int_{\mathbb{R}^n} d\nu(\vec{h})\,\varphi_n(|\vec{y}-\vec{h}|). \quad (25)$$

Замечание 6. В частности, множество $\{\vec{y}_0(\beta)\}=\mathfrak{M}(\beta,\nu)$ принадлежит множеству решений уравнения самосогласования:

$$\vec{y}=\int_{\mathbb{R}^n} d\nu(\vec{h})\frac{(\vec{y}-\vec{h})}{|\vec{y}-\vec{h}|}\varphi_n'(|\vec{y}-\vec{h}|), \quad (26)$$

которое полезно сравнить с уравнениями (6) и (7).

Доказательство. Заметим, что сдвиги по узлам действуют в пространстве Ω как эргодическое преобразование. Поэтому для любого фиксированного $\vec{y}$ величина

$$\Phi_N(\vec{y})=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\varphi(|\vec{y}-\vec{h}_j|) \quad (27)$$

для почти каждой (по мере $d\lambda$) конфигурации $\underset{\sim}{h}\in\Omega$ сходится к $\Phi(\vec{y})$, причем:

$$\Phi(\vec{y})=\int_{\mathbb{R}^n} d\nu(\vec{h})\,\varphi_n(|\vec{y}-\vec{h}|) \quad (28)$$

в силу индивидуальной эргодической теоремы (теоремы Биркгофа-Хинчина) [20]. Используя выпуклость функции φ_n (см.(5)), получаем равномерную по $\vec{y}$ сходимость $\Phi_N(\vec{y})\to\Phi(\vec{y})$, при $N\to\infty$, на компактах в $\mathbb{R}^n$. Поскольку величина $N^{-1}\sum_{1\le j\le N}|\vec{h}_j|$ также для почти каждой (по мере $d\lambda$) конфигурации внешнего поля сходится к

$\int_{\mathbb{R}^n} d\nu(\vec{h})|\vec{h}|$, то асимптотика функции $\Phi_N(\vec{y})$ равномерно по N ограничена на бесконечности. Следовательно, для оценки асимптотики плотности распределения (4), которая имеет вид

$$P_k^{(N)}(\vec{s}_1,\dots,\vec{s}_k;\beta,\underset{\sim}{h}_N^{(N)}) = \int_{\mathbb{R}^n} \omega^{(N)}_{\beta,\underset{\sim}{h}}(d\vec{y}) \prod_{j=1}^{k} \exp\{\beta[\vec{s}_j(\vec{y}-\vec{h}_j) - \varphi_n(|\vec{y}-\vec{h}_j|)]\};$$

$$\omega^{(N)}_{\beta,\underset{\sim}{h}}(d\vec{y}) = \frac{\exp\{-N\beta(\frac{1}{2}y^2 - \Phi_N(\vec{y}))\}}{\int_{\mathbb{R}^n} d\vec{y}\, \exp\{-N\beta(\frac{1}{2}y^2 - \Phi_N(\vec{y}))\}}\, d\vec{y}\ , \tag{29}$$

достаточно ограничиться интегрированием по некоторому компактному множеству в $\mathbb{R}^n$. Используя на этом компакте равномерную сходимость $\Phi_N(\vec{y}) \to \Phi(\vec{y})$, получаем, что для почти всех (по мере $d\lambda$) конфигураций $\underset{\sim}{h}$ меры $\{\omega^{(N)}_{\beta,\underset{\sim}{h}}(d\vec{y})\}$ в (29) сходятся к вероятностной мере $\omega_\beta(d\vec{y})$, носитель которой сосредоточен на множестве $\mathfrak{M}(\beta,\nu)$. Таким образом, с вероятностью I имеет место следующее равенство:

$$\lim_{N\to\infty} P_k^{(N)}(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\beta,\underset{\sim}{h}_N) = \int_{\mathfrak{M}(\beta,\nu)} \omega_\beta(d\vec{y}_0)\,\mathbb{P}_k(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\vec{y}_0) \equiv \tag{30}$$

$$\equiv \mathcal{P}_k(d\vec{s}_1,\dots,d\vec{s}_k;\beta,\nu)\ ,$$

которое и доказывает теорему. □

Следствие 2. Для того чтобы установить связь с обобщенным методом квазисредних, заметим, что при выключении внешних полей, например с помощью параметра $t>0$: $d\nu_t(\vec{h}) \equiv d\nu(t^{-1}\vec{h})$, $t\to 0$, предельные состояния $d\mathcal{P}_t$ будут сходиться к предельному состоянию $d\mathcal{P}_0$, соответствующему нулевому внешнему полю. Более точно, согласно (30) предельное состояние $d\mathcal{P}_0$ будет суперпозицией чистых состояний $dP_{\vec{\rho}}$:

$$d\mathcal{P}_0 = \int_{\mathfrak{M}(\beta,\nu_0)} \omega_\beta(d\vec{y}_0)\, dP_{\vec{\rho}(\vec{y}_0)}\ . \tag{31}$$

Нетрудно проверить, что выражение (31) есть не что иное, как еще один вариант представления (20), где параметр $\vec{H}$ определяется неявно с помощью предела $\nu_t \to \nu_0$; случай, когда конфигурация внешнего поля однородна: $(\underset{\sim}{h})_j = \vec{h}$, $j\in N$, обсуждается в замечании 4.

Замечание 7. Мы не рассматриваем здесь вопрос о том, как устроено множество $\mathfrak{M}(\beta,\nu)$ (и предельное множество $\mathfrak{M}(\beta,\nu_0)$). Этот вопрос связан с описанием критического поведения упорядоченных

магнитных систем в случайных внешних полях. Интересное обсуждение структуры возможных решений уравнения (26) (в связи с состояниями, соответствующими спиновым стеклам) можно найти в [21] , см. также недавнюю работу [22], где рассматривается модель Изинга в случайном магнитном поле.

Один из нас (В.А.З.) благодарен Р.А. Минлосу и Ш. Шуяну за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе.

Литература

I. Боголюбов Н.Н. Квазисредние в задачах статистической механики. Избранные труды в трех томах, том 3."Наукова думка", Киев, I97I.

2. Боголюбов Н.Н.(мл). Метод исследования модельных гамильтонианов. "Наука", М. I974.

3. Боголюбов Н.Н.(мл), Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Курбатов А.М., Тончев Н.С. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. Издательство Болгарской академии наук, София, I98I.

4. Zagrebnov V.A. Z.für Physik B - Condensed Matter, 1984, 55, p. 75-85.

5. Ginibre J. Commun. Math. Phys., 1968, 8, p. 26-51.

6. Kunz H., Pfister C.E. Commun.Math.Phys., 1976, 46, p.245-251.

7. Саймон Б. Модель $P(\varphi)_2$ евклидовой квантовой теории поля. "Мир", М. I976.

8. Минлос Р.А. Функц. анализ и его прилож., I967, 2, с.60-73; 3, с. 40-53.

9. Добрушин Р.Л. Теория вероятности и ее приминение, I968, I3, с. I97-224; I970, I5, с. 458-486.

IO. Lanford O.E., Ruelle D. Commun. Math. Phys., 1969, 13, p.194-215.

11. Добрушин Р.Л. ТМФ, 1970, 4, с. 101-118.

12. Ruelle D. Commun. Math. Phys., 1970, 18, p. 127-159.

13. Ellis R.S., Newman C.M. J.Stat. Phys., 1978, 19, p. 149-161.

14. Riekers A. Physica, 1981, 108A, p. 107-134.

15. Brankov J.G., Zagrebnov V.A. J. Phys. A (Gen.Phys.), 1983,16, p. 2217-2224.

16. Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. Описание предельных гиббсовских состояний для модели Кюри-Вейсса-Изинга. ОИЯИ, Р17-84-864, Дубна, 1984.

17. Биллингслей П. Сходимость вероятностных мер. "Наука", М., 1977.

18. Kac M., Helfand E. J. Math.Phys., 1963, 4, p.1078-1088.

19. Angelescu N., Bundaru M., Costache G., Nenciu G. J. Stat.Phys. 1981, 24, p. 529-552.

20. Корнфельд И.П., Синай Я.Г., Фомин С.В. Эргодическая теория. "Наука", М., 1980.

21. Пастур Л.А., Фиготин А.Л. ТМФ, 1978, 35, с. 193 - 210.

22. Fisher D.S., Fröhlich J., Spencer T. J. Stat.Phys., 1984, 34, p. 863-870.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 января 1984 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб."Краткие сообщения ОИЯИ", N 2-84, Дубна,1984,с.3.

Ангелеску Н., Загребнов В.А. Р17-85-51
Описание предельных состояний n-векторной ферромагнитной модели Кюри-Вейсса с помощью обобщенного метода квазисредних

Множество всех предельных /гиббсовских/ состояний построено для ферромагнитной n-векторной модели Кюри-Вейсса с помощью обобщенного метода квазисредних.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Angelescu N., Zagrebnov V.A. P17-85-51
A Generalized Quasi-Average Approach to the Description of the Limit States of the n-Vector Curie-Weiss Ferromagnet

A set of all limit (Gibbs) states is constructed for the ferromagnetic n-vector Curie-Weiss model by means of a generalized quasi-average method.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985