объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-85-509

В.А.Загребнов, Вл.В.Папоян*

О КОНДЕНСАЦИИ ОДНОМЕРНОГО НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

* Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, Москва

1985

I. В последние годы большое внимание уделяется исследованию, на строгом математическом уровне, различных моделей бозе-систем (см., например, [I-7]). Устойчивый интерес к такого рода системам связан с проблемой, которая до сих пор не решена для достаточно общей ситуации, она сводится к вопросу: при каких условиях в системе бозонов возможна бозе-конденсация (БК), и является ли она устойчивой относительно включения различных взаимодействий между частицами?

Как стало ясно, тщательный анализ этой проблемы требует изучения особенностей поведения идеального бозе-газа, таких, как: зависимость его поведения от выбора граничных условий [8,9], обобщенная бозе-конденсация [3,10-12], нарушение эквивалентности канонического (КА) и большого канонического (БКА) ансамблей [7,13] и др. Более того, в недавней работе [5] было продемонстрировано, насколько чувствительно явление БК по отношению к включению взаимодействия между частицами: БК разрушается даже таким слабым взаимодействием, которое не влияет на особенности в термодинамических функциях.

В настоящей работе рассматривается модель, которая также обладает рядом замечательных особенностей:

(а) это модель одномерного бозе-газа, в котором, однако, имеет место БК;

(б) это неидеальная система, но взаимодействие, восстанавливая сильную эквивалентность КА и БКА (единственность предельного гиббсовского состояния), в то же время не разрушает БК.

2. Рассмотрим одномерный идеальный бозе-газ в сосуде $\Lambda=[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]\subset\mathbb{R}^1$ (с непритягивающими стенками [8,9], например, условиями Дирихле) в поле внешнего притягивающего потенциала, локализованного в окрестности начала координат и имеющего (для простоты) лишь одно связанное состояние $\varepsilon_-(L)$ с волновой функцией $\psi_L^-(x)$.

<u>Предложение I.</u> Описанная выше модель обладает следующими свойствами:

(i) для плотности $\rho>\rho_c(\beta)$ происходит БК в основном состоянии, т.е.

$$\rho_-(\mu)=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^1}\left\langle\frac{n_-}{L}\right\rangle_\Lambda(\beta,\mu)=\begin{cases}0\,, & \mu\leqslant\varepsilon_-\ (\rho\leqslant\rho_c)\\ \rho-\rho_c\,, & \mu=\varepsilon_-\ (\rho>\rho_c)\end{cases};\qquad(1)$$

$$\bar\rho(\beta,\mu)=\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\mathbb{R}^1}dp\{\exp[\beta(\varepsilon_p-\mu)]-1\}^{-1}\,,\quad\varepsilon_p=\frac{p^2}{2m}\ ;$$

$$\rho_c(\beta)=\bar\rho(\beta,\mu=\varepsilon_-),$$

где n_- - числа заполнения одночастичного уровня $\varepsilon_-=\lim_{L\to\infty}\varepsilon_-(L)<0$, а $\langle-\rangle_\Lambda(\beta,\mu)$ состояние в конечном сосуде в БКА;

(ii) КА и БКА для этой модели эквивалентны в слабом смысле, их сильная эквивалентность нарушается для $\mu=\varepsilon_-$ $(\rho>\rho_c)$;

(iii) предельное состояние единственно для $\mu<\varepsilon_-$, а для $\mu=\varepsilon_-$ имеем континуум предельных состояний, которые индексируются плотностью $\rho\geqslant\rho_c$.

<u>Доказательство.</u> (i) Существование БК и БКА следует, как обычно, из уравнения

$$\rho=\frac{1}{L}\{\exp[\beta(\varepsilon_-(L)-\bar\mu_\Lambda)]-1\}^{-1}+\frac{1}{L}\sum_p\{\exp[\beta(\varepsilon_p(L)-\bar\mu_\Lambda)]-1\}^{-1}\equiv\bar\rho_\Lambda(\beta,\bar\mu_\Lambda(\rho)).\qquad(2)$$

Решающим здесь является следующее замечание: для неотрицательных энергий плотность одночастичных состояний в термодинамическом пределе (t-$\lim$) совпадает с той, которая имеет место для обычного идеального бозе-газа, а для отрицательных энергий в спектре состояний имеется лишь одна точка, соответствующая связанному состоянию $\varepsilon_-<0$. Пространственное распределение $P(x)$ для БК определяется волновой функцией связанного состояния $\psi^-(x)$: $P(x)=(\psi^-(x))^2$.

(ii) Прямое обобщение аргументов, которые используются при доказательстве соответствующего утверждения для обычного идеального бозе-газа [7], показывает, что свободная энергия $f_-(\beta,\rho)$ в КА и давление $p_-(\beta,\mu)$ в БКА связаны друг с другом преобразованием Лежандра (<u>слабая эквивалентность</u>). Обычные вычисления, см., например, [7], показывают, что из-за БК в БКА плотность Каца $K_{\beta,\mu}(\xi|\rho)$ не является δ-функцией для $\mu=\varepsilon_-$ $(\rho>\rho_c)$:

$$K_{\beta,\mu}(\xi|\rho)=\begin{cases}\delta(\xi-\rho) & ,\mu\leqslant\varepsilon_-\ (\rho=\bar\rho(\beta,\mu)\leqslant\rho_c)\\ \dfrac{\theta(\xi-\rho_c)}{\rho-\rho_c}\exp\left\{-\dfrac{\xi-\rho_c}{\rho-\rho_c}\right\} & ,\mu=\varepsilon_-\ (\rho>\rho_c)\end{cases}\qquad(3)$$

Тогда последнее утверждение в (ii) и утверждение (iii) являются почти прямым следствием (3), поскольку предельные состояния в КА и БКА связаны соотношением

$$\langle-\rangle(\beta,\mu|\rho)=\int_0^\infty d\xi\,K_{\beta,\mu}(\xi|\rho)\langle-\rangle(\beta,\xi)\,,$$

и поскольку предельные состояния $\langle-\rangle(\beta,\xi)$ в КА являются чистыми для $\xi\leqslant\rho_c$. □

3. Включим теперь между частицами отталкивающее взаимодействие, которое охватывает только бозоны, находящиеся в основном состоянии $\varepsilon_-(L)$:

$$H_{int}(g)=\frac{1}{2L}g n_-^2 . \qquad (4)$$

Предложение 2. Одномерный неидеальный бозе-газ со взаимодействием (4), $g>0$, находящийся в поле внешнего потенциала, который имеет только одно связанное состояние $\varepsilon_-<0$, обладает следующими свойствами:

(i) в БКА для химического потенциала $\mu>\mu_c$ имеет место БК в основном состоянии, т.е.,

$$\rho_-(\mu)=t\text{-}\lim\left\langle\frac{n_-}{L}\right\rangle_\Lambda(\beta,\mu)=\begin{cases}0 & ,\ \mu\leq\mu_c=\varepsilon_-\\ \dfrac{\mu-\varepsilon_-}{g} & ,\ \mu_c<\mu<0\end{cases}; \qquad (5)$$

(ii) КА и БКА эквивалентны и в слабом, и в сильном смыслах для всех допустимых значений термодинамических параметров, т.е. $\mu<0$ $(0\leq\rho<\infty)$, $\beta>0$;

(iii) для всех допустимых значений термодинамических параметров предельное состояние единственно, несмотря на то, что для $\mu>\mu_c$ $(\rho>\rho_c)$ имеет место БК.

Доказательство. (i) Состояние в конечном объеме $\langle-\rangle_\Lambda(\beta,\mu;g)$ определяется произведением мер, которые заданы на бесконечных последовательностях чисел заполнения $\{n_-,n_p\}_p$. Таким образом, средняя плотность в БКА имеет вид:

$$\bar{\rho}_\Lambda(\beta,\mu)=\frac{1}{L}\sum_{n_-=0}^{\infty}n_-Pr^{(\Lambda)}_{\beta,\mu}(n_-)+\frac{1}{L}\sum_p\left\{\exp\left[\beta\left(\varepsilon_p(L)-\mu\right)\right]-1\right\}^{-1};$$

$$Pr^{(\Lambda)}_{\beta,\mu}(n_-)=\frac{\exp\left\{-\beta\left[(\varepsilon_-(L)-\mu)n_-+\frac{1}{2L}gn_-^2\right]\right\}}{\sum\limits_{n_-=0}^{\infty}\exp\left\{-\beta\left[(\varepsilon_-(L)-\mu)n_-+\frac{1}{2L}gn_-^2\right]\right\}} . \qquad (6)$$

Тогда (5) является прямым следствием (6), а пространственное распределение БК по-прежнему определяется волновой функцией связанного состояния: $P(x)=(\psi^-(x))^2$.

(ii) Слабая эквивалентность ансамблей следует из прямых оценок статистической суммы (КА) и большой статистической суммы (БКА), которые дают для свободной энергии и давления следующие выражения:

$$f_-(\beta,\rho;g)=\inf_{\rho_-\leq\rho}\left[\varepsilon_-\rho_-+\frac{1}{2}g\rho_-^2+f_0(\beta,\rho-\rho_-)\right];$$

$$p_-(\beta,\mu;g)=\sup_{\rho_-\geq0}\left[p_0(\beta,\mu)-(\varepsilon_--\mu)\rho_--\frac{1}{2}g\rho_-^2\right]. \qquad (7)$$

Здесь $f_0(\beta,\rho)$ и $p_0(\beta,\mu)$ - свободная энергия и давление для идеального бозе-газа без внешнего поля, т.е. $\varepsilon_-=0$. Сильная эквивалентность ансамблей и утверждение (iii) следуют из того, что в $t\text{-}\lim$ вероятностное распределение $Pr^{(\Lambda)}_{\beta,\mu}(n_-)$ сходится (в слабом смысле) к вероятностному распределению, сосредоточенному в точке $\rho_-(\beta,\mu)$ (5). Тогда плотность Каца $K_{\beta,\mu}(\xi|\rho)=\delta(\xi-\rho)$ для всех допустимых значений параметров $\beta\geq0$ и $\mu<0$. □

Замечание 1. Восстановление сильной эквивалентности ансамблей в модели (4) для $g>0$ не является очевидным. Заметим, что это не так для стандартной модели бозе-газа ($\varepsilon_-=0$) с отталкивающим взаимодействием (4) в основном состоянии: $H_{int}=gn^2_{p=0}/2V$, $V=L^\nu$ для размерностей $\nu\geq3$, см. /7/.

Замечание 2. На возможность появления БК в одно- и двумерном идеальном бозе-газе за счет выбора граничных условий, соответствующих "притягивающим стенкам", было впервые указано в работах /8,9/. Мы продемонстрировали, что аналогичное явление возникает, если идеальный бозе-газ поместить в поле внешнего потенциала, для которого энергия основного состояния ограничена снизу. Однако, в противоположность нашей модели, макроскопическое заполнение основного состояния для граничных условий, соответствующих "притягивающим стенкам", является очень тонким явлением: величина БК в этом случае зависит, например, от формы сосудов, которые расширяются до $\mathbb{R}^\nu$ в $t\text{-}\lim$ /10-12/. В наших моделях (идеальной и неидеальной) БК в основном состоянии нечувствителен к таким тонкостям; на это указывает, например, экспоненциальное убывание плотности БК, которое определяется $P(x)$, при удалении от начала координат.

В заключение отметим, что предложенные в настоящей заметке модели бозе-газа оправдывают, до некоторой степени, исследование бозе-систем со щелью в одночастичном спектре, которое было предпринято недавно в работе /4/, где природа появления щели не обсуждалась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Davies E.B. Commun.Math.Phys., 1972, 28, p.69-86.
2. Critchley R.H., Lewis J.T. Commun.Math.Phys., 1975, 44, p.107-124.

3. Van den Berg M., Lewis J.T. Commun.Math.Phys., 1981, 81, p.475-494.
4. Buffet E., de Smedt Ph., Pulé J.V. J.Phys.A: Math.Gen., 1983, 16, p.4307-4324.
5. Buffet E., Pulé J.V. A Hard Core Bose Gas. Preprint DIAS-STP-84-45, Dublin, 1984.
6. Van den Berg M., Lewis J.T., de Smedt Ph. J.Stat.Phys., 1984, 37, p.697-707.
7. Загребнов В.А., Папоян Вл.В. О проблеме эквивалентности ансамблей для бозе-систем (идеальный бозе-газ). ОИЯИ, Р17-85-403, Дубна, 1985.

Загребнов В.А., Папоян Вл.В. О проблеме эквивалентности ансамблей для бозе-систем (неидеальный бозе-газ). ОИЯИ,Р17-85-508 Дубна, 1985.
8. Robinson D.W. Commun.Math.Phys., 1976, 50, p.53-59.
9. Landau L.J., Wilde I.F. Comm.Math.Phys., 1979, 70, p.43-51.
10. Van den Berg M., Lewis J.T. Physica, 1982, 110A, p.550-564.
11. Van den Berg M. J.Math.Phys., 1982, 23, p.1159-1161.
12. Van den Berg M. J.Stat.Phys., 1983, 31, p.623-637.
13. Загребнов В.А., Папоян Вл.В. Идеальный бозе-газ: флуктуации и неэквивалентность ансамблей. Ш Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1984), том I, с.301-309, ОИЯИ, Д17-84-850, Дубна, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1985 года

Загребнов В.А.,Вл.В.Папоян Р17-85-509
О конденсации одномерного неидеального бозе-газа

Рассматривается одномерная модель, в которой имеет место бозе-конденсация. Исследована проблема эквивалентности ансамблей для этой модели. Показано, что сильная эквивалентность ансамблей связана со свойством единственности предельных гиббсовских состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Papoyan Vl.V., Zagrebnov V.A. P17-85-509
On Condensation of One-Dimensional Nonideal Boson Gas

We report the properties of a one-dimensional model which exhibits Bose-Einstein condensation. The problem of canonical and grand canonical ensemble equivalence is considered. A strong equivalence is shown to be connected with uniqueness of the limiting Gibbs states.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Phisics.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985