объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-85-508

В.А.Загребнов, Вл.В.Папоян*

О ПРОБЛЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ АНСАМБЛЕЙ ДЛЯ БОЗЕ-СИСТЕМ (НЕИДЕАЛЬНЫЙ БОЗЕ-ГАЗ)

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

---

* Математический институт им. В.А.Стеклова АН СССР, Москва

1985

I. Введение

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\nu}$ – сосуд в ν -мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\nu}$, имеющий гладкую границу $\partial\Lambda$. Самосопряженному расширению $T_{\Lambda,\sigma}$ одночастичного оператора $T_{\Lambda} = -\hbar^2\Delta/2m, \mathcal{D}(T_{\Lambda}) = C_0^{\infty}(\Lambda)$, где Δ – оператор Лапласа, m – масса частицы, соответствует дискретный спектр $\{\varepsilon_k^{(\sigma)}(\Lambda)\}_{k=0}^{\infty}$. Пусть индекс $k = 0, 1, 2, \ldots$ нумерует точки спектра в порядке их неубывания (с учетом кратности). Ниже мы будем рассматривать только такие расширения, для которых $\varepsilon_0^{(\sigma)}(\Lambda) > 0$ ($\varepsilon_0^{(\sigma)}(\Lambda) \searrow 0$ для $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^{\nu}$), и индекс (σ) опускать. Обсуждение этого вопроса см. в работах /I,2/. Тогда идеальному бозе-газу в сосуде Λ отвечает гамильтониан

$$T_{\Lambda} = \sum_{k=0} \varepsilon_k(\Lambda) n_k \ , \quad n_k \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} \ , \tag{I.1}$$

а соответствующие статистические суммы в каноническом ансамбле (КА) и большом каноническом ансамбле (БКА) имеют вид $(\mu < \varepsilon_0(\Lambda))$:

$$Z_{\Lambda}(\beta, N) = \sum_{\{n_k : \sum_{k\geq 0} n_k = N\}} \exp\{-\beta \sum_{k\geq 0} \varepsilon_k(\Lambda) n_k\} \ ;$$

$$\Xi_{\Lambda}(\beta,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \exp(\beta\mu N) Z_{\Lambda}(\beta, N) = \prod_{k\geq 0} \{1 - \exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda) - \mu)]\}^{-1} . \tag{I.2}$$

Стандартным образом определяются в сосуде Λ, $\operatorname{mes}\Lambda = V$, соответствующие этим ансамблям плотности термодинамических потенциалов (плотность свободной энергии и давление):

$$f_{\Lambda}(\beta, \tfrac{N}{V}) = (-\beta V)^{-1} \ln Z_{\Lambda}(\beta, N) \ ;$$

$$p_{\Lambda}(\beta,\mu) = (\beta V)^{-1} \ln \Xi_{\Lambda}(\beta,\mu) \ , \ \mu < \varepsilon_0(\Lambda) . \tag{I.3}$$

Интерес к идеальному бозе-газу связан обычно со следующими его свойствами:

<u>Предложение I.I.</u> /I,2/ Для идеального бозе-газа в термодинамическом пределе $(t\text{-}\lim)$, когда $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^{\nu}$, $\nu \geq 3$, и $N/V \to \rho$, имеем:

а) Фазовый переход, который в обоих ансамблях сопровождается образованием бозе-конденсата в основном состоянии $(t\text{-}\lim \varepsilon_0(\Lambda) = 0)$:

$$t\text{-}\lim \langle \tfrac{n_0}{V} \rangle_{\Lambda,0}(\beta,\rho) = t\text{-}\lim \langle \tfrac{n_0}{V} \rangle_{\Lambda,0}(\beta, \bar{\mu}_{\Lambda}(\rho)) =$$

$$= \begin{cases} 0 \ , & \rho < \rho_{c,0} \ (\mu = t\text{-}\lim \bar{\mu}_{\Lambda}(\rho) < 0) \\ \rho_0(\beta) = \rho - \rho_{c,0}(\beta) \ , & \rho \geq \rho_{c,0} \ (\mu = t\text{-}\lim \bar{\mu}_{\Lambda}(\rho) = 0) . \end{cases} \tag{I.4}$$

б) Эквивалентность КА и БКА в термодинамическом (слабом) смысле:

$$f_0(\beta,\rho) = \sup_{\mu \leq 0} \{\rho\mu - p_0(\beta,\mu)\} = t\text{-}\lim f_{\Lambda,0}(\beta, \tfrac{N}{V}) \ ;$$

$$p_0(\beta,\mu) = \sup_{\rho \geq 0} \{\rho\mu - f_0(\beta,\rho)\} = t\text{-}\lim p_{\Lambda,0}(\beta,\mu) . \tag{I.5}$$

в) Нарушение статистической (сильной) эквивалентности ансамблей (в той области фазовой диаграммы, которая соответствует ненулевому бозе-конденсату $\rho_0(\beta)$), выражающееся в том, что в БКА, в отличие от КА, возникают аномальные флуктуации плотности числа частиц в основном состоянии /I/. Это эквивалентно тому, что плотность вероятностного распределения для плотности числа частиц в БКА (плотность Каца /3/ не является δ – функцией во всей области изменения термодинамических переменных для $\nu \geq 3$ (см. /I/):

$$K^0_{\beta,\mu}(x|\rho) = \begin{cases} \delta(x - \rho) \ , & \mu \leq 0 \ \ (\rho = \bar{\rho}(\beta,\mu) < \rho_{c,0}) \\ \dfrac{\theta(x - \rho_{c,0})}{\rho - \rho_{c,0}} \exp\left\{-\dfrac{x - \rho_{c,0}}{\rho - \rho_{c,0}}\right\} \ , & \mu = 0 \ \ (\rho > \rho_{c,0}) \end{cases} ; \tag{I.6}$$

$$\bar{\rho}(\beta,\mu) = t\text{-}\lim \langle \tfrac{N}{V} \rangle_{\Lambda,0}(\beta,\mu) \ , \ \rho_{c,0}(\beta) = \bar{\rho}(\beta, \mu = 0) .$$

Цель настоящей работы (первая ее часть /2/ носит технический характер и посвящена идеальному бозе-газу) – исследовать, как результаты, сформулированные в Предложении I.I., меняются при включении взаимодействия между бозонами [*]. Основное внимание при этом уделено проблеме эквивалентности КА и БКА. Для выяснения природы статистической неэквивалентности ансамблей, которая имеет место для идеального бозе-газа, ниже рассмотрено несколько вариантов включения взаимодействия, которые приводят к точно решаемым моделям.

---

[*]) Основные результаты работы были доложены на III Международном симпозиуме по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 22-26 августа 1984 года) /I/.

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

Основной результат работы сводится к тому, что наиболее простое взаимодействие, включение которого приводит к восстановлению статистической эквивалентности КА и БКА) и в то же время не разрушает бозе-конденсат) – это отталкивающий парный потенциал типа взаимодействия "всех со всеми" /4,5/.

В разделе 2 рассматривается модель неидеального бозе-газа, термодинамические свойства которого совпадают со свойствами идеального бозе-газа, хотя механизм бозе-конденсации существенно отличается. Еще одной особенностью этой модели является нарушение слабой эквивалентности ансамблей при смене знака взаимодействия. В разделе 3 рассмотрена другая точно решаемая модель неидеального бозе-газа, которая (в отличие от модели из раздела 2) не является термодинамически эквивалентной идеальному бозе-газу, хотя и обладает теми же свойствами а)-в) (см. Предложение I.I), что и идеальный бозе-газ. Наконец, в разделе 4 предложена модель, имитирующая взаимодействие Леннарда-Джонса, для которой имеет место основной результат настоящей работы.

2. Неидеальный бозе-газ I: взаимодействие в основном состоянии

В настоящем разделе рассмотрена модель неидеального бозе-газа (модель I), гамильтониан которой имеет вид:

$$H_{\Lambda,I} = T_\Lambda + \frac{g}{2V} n_0^2. \tag{2.I}$$

Теорема 2.I. Для модели I при $g > 0$ и $\nu \geq 1$ имеем:

(а) $t\text{-}\lim p_{\Lambda,I}(\beta,\mu) = p_0(\beta,\mu)$, $\mu \leq 0$;

(б) $t\text{-}\lim f_{\Lambda,I}(\beta,\rho) = f_0(\beta,\rho)$, $\rho \geq 0$.

Доказательство. (а) Из явного вида гамильтониана (2.I) следует, что

$$p_{\Lambda,I}(\beta,\mu) = \tilde{p}_{\Lambda,0}(\beta,\mu)\left\{\frac{1}{\beta V}\ln\sum_{n_0=0}^{\infty}\exp\left[\beta n_0\left(\mu-\varepsilon_0(\Lambda)-\frac{g}{2V}n_0\right)\right]\right\};$$
$$\tilde{p}_{\Lambda,0}(\beta,\mu) = \frac{1}{\beta V}\sum_{k>0}^{\infty}\ln\left\{1-\exp\left[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu)\right]\right\}^{-1}. \tag{2.2}$$

Поскольку для $\mu \leq 0$ и произвольных граничных условий, которые определяют поведение $\varepsilon_0(\Lambda)$ (см. /2/), сумма

$$\sum_{n_0=0}^{\infty}\exp\left[\beta n_0\left(\mu-\varepsilon_0(\Lambda)-\frac{g}{2V}n_0\right)\right] < c\left(\frac{V}{\beta g}\right)^{1/2},$$

то доказательство (а) сводится к проверке равенства

$$t\text{-}\lim \tilde{p}_{\Lambda,0}(\beta,\mu) = p_0(\beta,\mu). \tag{2.3}$$

Давление $\tilde{p}_{\Lambda,0}(\beta,\mu)$ соответствует идеальному бозе-газу, у которого в одночастичном спектре отсутствует точка $\varepsilon_{k=0}(\Lambda)$. Для обычного класса граничных условий (стенки $\partial\Lambda$ без "притяжения" /2/) $\varepsilon_0(\Lambda)>0$ и $\varepsilon_0(\Lambda)\simeq V^{-\alpha_0}$ при $V\to\infty$, откуда (2.3) следует для всех $\mu\leq 0$. Для периодических граничных условий опять получаем (2.3), поскольку для этого достаточно заметить лишь, что $\varepsilon_1(\Lambda)\simeq V^{-\alpha_1}$ при $V\to\infty$.

(б) Для $f_{\Lambda,I}(\beta, N/V)$ имеем оценку $\left(\xi=\frac{n_0}{N}, \rho=\frac{N}{V}\right)$:

$$\inf_{\xi\geq 0}\left[\frac{1}{2}g\xi^2\rho^2+\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\rho(1-\xi))\right] \geq f_{\Lambda,I}(\beta,\rho) \geq$$
$$\geq \inf_{\xi\geq 0}\left[\frac{1}{2}g\xi^2\rho^2+\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\rho(1-\xi))\right]-\frac{1}{\beta V}\ln(N+1), \tag{2.4}$$

где $\tilde{f}_{\Lambda,0}$ – плотность свободной энергии идеального бозе-газа в сосуде Λ , в одночастичном спектре которого отсутствует точка $\varepsilon_0(\Lambda)$. Заметим теперь, что из (2.3) и аргументов, использованных при доказательстве теоремы 2.I /2/, следует:

$$t\text{-}\lim \tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\rho(1-\xi)) = f_0(\beta,\rho(1-\xi)). \tag{2.5}$$

Поэтому из (2.4) и (2.5) получаем:

$$t\text{-}\lim f_{\Lambda,I}(\beta,\rho) = \inf_{\xi\geq 0}\left[\frac{1}{2}g\xi^2\rho^2+f_0(\beta,\rho(1-\xi))\right] =$$
$$= f_0(\beta,\rho). \tag{2.6}$$

Последнее равенство в (2.6) следует из условия $g>0$ и того, что $f_0(\beta,\rho)$, как известно /2/, невозрастающая функция ρ . □

Следствие 2.I. Для неидеального бозе-газа (2.I) КА и БКА термодинамически (слабо) эквивалентны при условии $g\geq 0$.

Следствие 2.2. Если $g<0$, то термодинамическая (слабая) эквивалентность ансамблей нарушается. Действительно, в этом случае в БКА давление $p_{\Lambda,I}(\beta,\mu)=+\infty$ (см. (2.2), в то же время в КА термодинамический предел для плотности свободной энергии существует и равен (ср. (2.4)):

$$f_I(\beta,\rho) = \inf_{\xi\geq 0}\left[\frac{1}{2}g\xi^2\rho^2+f_0(\beta,\rho(1-\xi))\right]. \tag{2.7}$$

Более того, из поведения функции $f_0(\beta,\rho)$ следует, что для $\nu \geq 3$ выражение (2.7) принимает вид:

$$f_I(\beta,\rho) = \tfrac{1}{2} g \bar{\xi}^2 \rho^2 + f_0(\beta, \rho(1-\bar{\xi})) \; ;$$

$$\bar{\xi}(\rho) = \begin{cases} 0 & , \rho \leq \rho_{c,0} \\ >0 & , \rho > \rho_{c,0} \end{cases} ; \quad \lim_{\rho\to\infty} \bar{\xi}(\rho) = 1 . \qquad (2.8)$$

Заметим, что для $g < 0$ функция (2,8), в отличие от (2.6), является невыпуклой по переменной ρ .

Замечание 2.I. Термодинамические свойства модели (2.I) для $g < 0$ представляют самостоятельный интерес. О спиновых моделях, в которых нарушена слабая эквивалентность ансамблей, см /6/. В частности, из (2.8) следует, что в этой модели в КА для $\rho \geq \rho_{c,0}$ происходит фазовый переход с образованием бозе-конденсата $\bar{\xi}(\rho) = t\text{-}\lim n_0/N$ в основном состоянии, в то время как в БКА модель просто не существует (коллапс).

Вернемся теперь к модели (2.I) для $g > 0$, чтобы выяснить вопрос о сильной (статистической) эквивалентности ансамблей и особенностях фазового перехода. Для этого, как известно /I,2/, необходимо вычислить функцию плотности Каца $K^I_{\beta,\mu}(x|\rho)$, которая связана с характеристической функцией случайной величины (плотности) N/V в БКА соотношением

$$\left\langle \exp\left(it\frac{N}{V}\right)\right\rangle_{\Lambda,I} = \int_0^\infty dx\, K^I_{\beta,\mu}(x|\rho)\exp(itx) = \qquad (2.9)$$

$$= \Xi_{\Lambda,I}\left(\beta,\mu+\frac{it}{\beta V}\right) \Big/ \Xi_{\Lambda,I}(\beta,\mu)$$

Однако вначале докажем утверждение, проясняющее механизм фазового перехода, который, согласно теореме 2.I, должен происходить в модели (2.I) при $\mu = 0$ ($\rho \geq \rho_{c,0}$), а также выявляющее особенности бозе-конденсации в этой модели.

Теорема 2.2. Для модели (2.I) при $g > 0$ имеем:

$$(а)\; t\text{-}\lim\left\langle\frac{n_0}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu) = t\text{-}\lim\left\langle\frac{n_0}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\rho) = 0 \quad , \nu \geq 1 \; ;$$

$$(б)\; t\text{-}\lim\left\langle\frac{n_1}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu) = t\text{-}\lim\left\langle\frac{n_1}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\rho) = \begin{cases} 0, \mu<0 \; (\rho<\rho_{c,0}) \\ \rho-\rho_{c,0}, \mu=0 \; (\rho\geq\rho_{c,0}) \end{cases} \qquad (2.I0)$$

Доказательство. (а) Рассмотрим вероятностное распределение чисел заполнения основного состояния (см. (2.I)):

$$\Pr_\Lambda(n_0|\mu) = \frac{\exp\left[\beta n_0\left(\mu - \frac{g}{2V}n_0\right)\right]}{\sum_{n_0=0}^{\infty}\exp\left[\beta n_0\left(\mu - \frac{g}{2V}n_0\right)\right]} \; , \mu \leq 0. \qquad (2.II)$$

Пусть $\mu < 0$, тогда для $V > 1$ имеем оценку :

$$\left\langle\frac{n_0}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu) = \frac{1}{V}\sum_{n_0=0}^{\infty} n_0 \Pr_\Lambda(n_0|\mu) \leq \frac{1}{V}\,\frac{\sum_{n_0=0}^{\infty} n_0 \exp(\beta\mu n_0)}{\sum_{n_0=0}^{\infty}\exp\left[\beta n_0\left(\mu - \frac{g}{2V}n_0\right)\right]} \; ,$$

откуда при $V \to \infty$ получаем (2.I0) (а) для БКА. Пусть теперь $\mu = 0$, тогда существует такое число c , что

$$\left\langle\frac{n_0}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu=0) = \frac{1}{V}\sum_{n_0=0}^{\infty} n_0 \Pr_\Lambda(n_0|\mu=0) \leq \frac{c}{V}\,\frac{\int_0^\infty dx\, x\exp\left(-\frac{\beta g}{2V}x^2\right)}{\int_0^\infty dx\,\exp\left(-\frac{\beta g}{2V}x^2\right)} \; ,$$

откуда при $V \to \infty$ опять получаем (2.I0)(а) для БКА. Доказательство первого из равенств (2.I0) (а) (равенство средних для чисел заполнения в БКА и КА) см /2/.

(б) Из (2.I0) (а) следует, что для нахождения асимптотики последовательности $\{\bar{\mu}_\Lambda(\rho)\}_{\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu}$, которая удовлетворяет уравнению

$$\rho = \left\langle\frac{n_0}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\bar{\mu}_\Lambda(\rho)) + \sum_{k\geq 1}^{\infty}\left\langle\frac{n_k}{V}\right\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\bar{\mu}_\Lambda(\rho)) \equiv \bar{\rho}_{\Lambda,I}(\beta,\bar{\mu}_\Lambda(\rho)) , \qquad (2.I2)$$

необходимо в сумме (2.I2) выделить член, соответствующий $k = 1$. Поскольку в модели (2.I) средняя плотность числа частиц для $k \geq 1$ в БКА совпадает с соответствующим средним (для $k \geq 1$ в БКА) для идеального бозе-газа, то в термодинамическом пределе имеем:

$$t\text{-}\lim \frac{1}{V}\sum_{k\geq 2}^{\infty}\langle n_k\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu) = \bar{\rho}\,(\beta,\mu) = \bar{\rho}_I(\beta,\mu) \; ,$$

$$\bar{\rho}(\beta,\mu) = \int_0^\infty d\mathcal{N}(\varepsilon)\left\{\exp[\beta(\varepsilon-\mu)]-1\right\}^{-1}, \; \rho_{c,I} = \bar{\rho}_I(\beta,0) = \rho_{c,0} . \qquad (2.I3)$$

Поэтому асимптотика последовательности $\{\bar{\mu}_\Lambda(\rho)\}_{\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu}$ имеет вид

$$\bar{\mu}_\Lambda(\rho)\Big|_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^\nu} \simeq \begin{cases} \bar{\mu}(\rho) + O(V^{-1}) & , \rho \leq \rho_{c,0} \; ; \\ \varepsilon_1(\Lambda) - [\beta V(\rho-\rho_{c,0})]^{-1} - O(V^{-1}) , & \rho > \rho_{c,0} \; ; \end{cases} \qquad (2.I4)$$

что соответствует макроскопическому заполнению энергетического уровня $\varepsilon_{k=1}(\Lambda)$ для $\mu = 0$ $(\rho > \rho_{c,0})$, см. (2.I0) (б). Доказательство первого из равенств (2.I0) (б) проводится так же, как и для идеального газа /2/. □

Фазовый переход в модели (2.I) в существенном совпадает с тем, который имеет место в идеальном бозе-газе, ср. (I.4) и (2.I3).

Замечание 2.2. Включение отталкивающего взаимодействия в основном состоянии $\varepsilon_0(\Lambda)$ приводит к тому, что бозе-конденсация "вытесняется" на следующий ближайший уровень одночастичного спектра $\varepsilon_1(\Lambda)$ -"обобщенная" бозе-конденсация (2.I0). С другой стороны, поскольку фазовый переход (как и макроскопическое заполнение одного уровня) проявляется лишь в пределе $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^\nu$, когда $\varepsilon_{k=1}(\Lambda)\searrow 0$, то "обобщенная" бозе-конденсация в модели (2.I), так же как и в идеальном газе, происходит для частиц с нулевой энергией, $\varepsilon=0$.

Теорема 2.3. Для модели (2.I) при $g>0$ сильная эквивалентность ансамблей нарушается для $\nu\geqslant 3$, поскольку функция плотности Каца

$$K^{I}_{\beta,\mu}(x|\rho)=K^{0}_{\beta,\mu}(x|\rho), \tag{2.I5}$$

ср. (I.6).

Доказательство. Характеристическая функция (2.9) в конечном сосуде отличается от соответствующей функции для идеального бозе-газа только первым множителем ($k=0$):

$$\langle\exp(it\tfrac{N}{V})\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu)=$$

$$=\sum_{n_0=0}^{\infty}\Pr_\Lambda(n_0|\mu)\exp\left(it\frac{n_0}{V}\right)\prod_{k\geqslant1}\frac{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu)]\}}{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu-\frac{it}{\beta V})]\}}. \tag{2.I6}$$

С помощью элементарных неравенств получаем оценку:

$$\left|\sum_{n_0=0}^{\infty}\Pr_\Lambda(n_0|\mu)\exp\left(it\frac{n_0}{V}\right)\right|\leqslant 1+\sum_{n_0=0}^{\infty}2t\frac{n_0}{V}\Pr_\Lambda(n_0|\mu).$$

Из этой оценки и (2.I0) (а) следует, что

$$t\text{-}\lim\langle\exp(it\tfrac{N}{V})\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\mu)=t\text{-}\lim\prod_{k\geqslant1}\frac{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu)]\}}{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu-\frac{it}{\beta V})]\}}. \tag{2.I7}$$

Вычисление предела в правой части (2.I7) повторяет соответствующие рассуждения для идеального газа /I/. Для $\mu<0$ $(\rho<\rho_{c,0})$ сразу же получаем:

$$t\text{-}\lim\prod_{k\geqslant1}\frac{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu)]\}}{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\mu-\frac{it}{\beta V})]\}}=\exp(it\bar\rho_I(\beta,\mu)). \tag{2.I8}$$

Особенности возникают для $\rho>\rho_{c,0}$. Выделяя в (2.I7) первый сомножитель, соответствующий $k=1$, и используя найденную для этого случая асимптотику (2.I4), получаем

$$t\text{-}\lim\frac{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_1(\Lambda)-\bar\mu_\Lambda)]\}}{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_1(\Lambda)-\bar\mu_\Lambda-\frac{it}{\beta V})]\}}=[1-it(\rho-\rho_{c,0})]^{-1};$$

$$t\text{-}\lim\prod_{k\geqslant2}\frac{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\bar\mu_\Lambda)]\}}{\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_k(\Lambda)-\bar\mu_\Lambda-\frac{it}{\beta V})]\}}=\exp(it\bar\rho_I(\beta,0)). \tag{2.I9}$$

С учетом (2.I7), (2.I9) окончательно имеем:

$$t\text{-}\lim\langle\exp(it\tfrac{N}{V})\rangle_{\Lambda,I}(\beta,\bar\mu_\Lambda)=\int_{\rho_{c,0}}^{\infty}dx\,\exp(itx)\frac{\exp\left[-\frac{x-\rho_{c,0}}{\rho-\rho_{c,0}}\right]}{\rho-\rho_{c,0}}. \tag{2.20}$$

Соотношения (2.I8)-(2.20) (ср. (I.6) и доказывают (2.I5). □

Замечание 2.3. Несмотря на нарушение сильной эквивалентности ансамблей, для модели (2.I), так же как и для идеального газа, имеет место равенство средних чисел заполнения (или их плотности) в КА и БКА, см. (2.I0). Доказательство этого факта такое же, как в случае идеального газа /2/, и основано на лемме Гриффитса (см., например, /7/ гл.I, § 2).

Замечание 2.4. Из теорем 2.I - 2.3 следует, что модель (2.I) при $g>0$ с точностью до замечания, которое сделано после доказательства теоремы 2.2, эквивалентна идеальному бозе-газу. Наоборот, для $g<0$ модель (2.I) по своим свойствам очень далека от идеального газа, см. замечание 2.I.

3. Неидеальный бозе-газ II: взаимодействие вне основного состояния

Рассмотрим теперь модель неидеального бозе-газа (модель II), гамильтониан которой имеет вид:

$$H_{\Lambda,II}=T_\Lambda+\frac{g}{2V}\Big(\sum_{k\geqslant1}n_k\Big)^2. \tag{3.I}$$

Теорема 3.I. Для модели (3.I) при $g>0$ имеем

(а) $f_{II}(\beta,\rho)=\inf\limits_{\eta\leqslant\rho}\left[\frac12 g\eta^2+f_0(\beta,\eta)\right]$;

(б) $P_{II}(\beta,\mu)=\sup\limits_{\rho\geqslant0}\left[\mu\rho-f_{II}(\beta,\rho)\right]$.

Доказательство. (а) Представим статистическую сумму в КА в виде:

$$Z_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,N)=\sum_{n_0=0}^{N}\Big\{\sum_{\{n_k:\,\sum_{k\geq 1}n_k=N-n_0\}}\exp\Big[-\beta\Big(T_\Lambda+\frac{g}{2V}(N-n_0)^2\Big)\Big]\Big\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big[-\beta\Big(\varepsilon_0(\Lambda)(N-m)+\frac{g}{2V}m^2\Big)\Big]\,\tilde{Z}_{\Lambda,0}(\beta,m)\,, \qquad (3.2)$$

где $\tilde{Z}_{\Lambda,0}$ – статистическая сумма идеального бозе-газа, у которого в одночастичном спектре отсутствует точка $\varepsilon_{k=0}(\Lambda)$. Тогда

$$\inf_{\eta\leq\rho}\Big[\frac{1}{2}g\eta^2+\varepsilon_0(\Lambda)(\rho-\eta)+\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\eta)\Big]\geq f_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\rho)\geq$$
$$\inf_{\eta\leq\rho}\Big[\frac{1}{2}g\eta^2+\varepsilon_0(\Lambda)(\rho-\eta)+\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\eta)\Big]-\frac{1}{\beta V}\ln(N+1)\,, \qquad (3.3)$$

где

$$\tilde{f}_{\Lambda,0}\Big(\beta,\eta=\frac{m}{V}\Big)=-\frac{1}{\beta V}\ln\tilde{Z}_{\Lambda,0}(\beta,m).$$

Учитывая, что предел $t\text{-}\lim\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\eta)$ существует и равен $f_0(\beta,\eta)$ (см /2/, а $t\text{-}\lim\varepsilon_0(\Lambda)=0$, из (3.3) получаем утверждение (а).

(б) статистическую сумму для БКА при $\mu<0$ представим в виде:

$$\Xi_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu)=\sum_{N=0}^{\infty}\exp(\beta\mu N)\sum_{m=0}^{N}\exp\Big[-\beta\Big(\varepsilon_0(\Lambda)(N-m)+\frac{g}{2V}m^2\Big)\Big]\times$$
$$\times\tilde{Z}_{\Lambda,0}(\beta,m)=\sum_{n_0=0}^{\infty}\exp\big[-\beta n_0(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu)\big]\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big[\beta m\Big(\mu-\frac{g}{2V}m\Big)\Big]\tilde{Z}_{\Lambda,0}(\beta,m)=$$
$$=\big\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu)]\big\}^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}\exp\Big[\beta V h_\Lambda\Big(\frac{m}{V}\Big)\Big]\,, \qquad (3.4)$$

где $h_\Lambda(\rho)\equiv\mu\rho-\frac{1}{2}g\rho^2-\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\rho)$. Тогда для давления $p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu)$ получаем следующую оценку снизу:

$$p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu)\geq\frac{1}{\beta V}\ln\big\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu)]\big\}^{-1}+\sup_{\rho\geq 0}h_\Lambda(\rho). \qquad (3.5)$$

Воспользуемся теперь тем, что $\{\tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,\rho)\}_\Lambda$ – последовательность выпуклых (по $\rho\geq 0$) функций, сходящихся к $f_0(\beta,\rho)$ см. (2.5) и /2/. Тогда для каждого $\bar{\rho}_\Lambda$, соответствующего $\sup h_\Lambda(\rho)$, найдется такое достаточно большое $\rho^*>\bar{\rho}_\Lambda$ и a : $0<a<g/2$, что $h_\Lambda(\rho)<-a\rho^2$ для $\rho>\rho^*$. Это означает, что для $p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu)$ имеется следующая оценка сверху:

$$p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu)\leq\frac{1}{\beta V}\ln\big\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu)]\big\}^{-1}+$$
$$+\frac{1}{\beta V}\sum_{0\leq m<\rho^*V}\exp\Big(\beta V h_\Lambda\Big(\frac{m}{V}\Big)\Big)+ \qquad (3.6)$$
$$+\frac{1}{\beta V}\sum_{m\geq\rho^*V}\exp\Big[-\beta Va\Big(\frac{m}{V}\Big)^2\Big]\leq\frac{1}{\beta V}\ln\big\{1-\exp[-\beta(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu)]\big\}^{-1}+$$
$$+\sup_{\rho\geq 0}h_\Lambda(\rho)+\frac{1}{\beta V}\ln\rho^*V+\frac{1}{\beta V}\ln\sum_{m\geq\rho^*V}\exp\Big[-\beta Va\Big(\frac{m}{V}\Big)^2\Big].$$

С учетом асимптотики $\varepsilon_0(\Lambda)$, при $\Lambda\nearrow\mathbb{R}^\nu$, и того, что $\{h_\Lambda(\rho)\}_\Lambda$ – строго выпуклые функции, в оценках (3.5) и (3.6) можно теперь перейти к $t\text{-}\lim$. Тогда для $\mu\leq 0$ получим:

$$p_{\mathrm{II}}(\beta,\mu)=t\text{-}\lim p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu)=\sup_{\rho\geq 0}\Big\{\mu\rho-\frac{1}{2}g\rho^2-f_0(\beta,\rho)\Big\}. \qquad (3.7)$$

Чтобы завершить доказательство, заметим, что функция

$$h^*(\eta)=-\frac{1}{2}g\eta^2-f_0(\beta,\eta) \qquad (3.8)$$

является строго выпуклой и достигает своего максимума в точке $\bar{\eta}>0$. Поэтому для функции $\tilde{h}(\rho)\equiv -f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)$ получаем (см. (а)):

$$\tilde{h}(\rho)=\sup_{\eta\leq\rho}h^*(\eta)=\begin{cases}h^*(\rho)\,, & \rho<\bar{\eta}\\ h^*(\bar{\eta})\,, & \rho\geq\bar{\eta}\end{cases}. \qquad (3.9)$$

Из (3.7)-(3.9) следует, что для $\mu<0$ супремум в правой части (3.7) достигается для $\bar{\rho}<\bar{\eta}$. Тогда из (3.7) и (3.9) с учетом (а), вытекает:

$$p_{\mathrm{II}}(\beta,\mu)=\sup_{\rho\geq 0}\{\mu\rho+h^*(\rho)\}=\sup_{\rho\geq 0}\{\mu\rho+$$
$$+\sup_{\eta\leq\rho}h^*(\eta)\}=\sup_{\rho\geq 0}\{\mu\rho-f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)\}. \qquad (3.I0)$$

Для $\mu=0$ доказательство (3.I0) следует непосредственно из (3.7) и определения $f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)$ см. (а). □

Следствие 3.I. Поскольку $f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)$ – выпуклая функция плотности, то в силу свойства преобразования Лежандра имеем:

$$f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)=\sup_{\mu\leq 0}\{\mu\rho-p_{\mathrm{II}}(\beta,\mu)\}\,,$$

т.е. для модели (3.I) КА и БКА термодинамически (слабо) эквивалентны.

Следствие 3.2. Из явного вида плотности свободной энергии (давления) нетрудно установить, что неидеальный бозе-газ (3.I), $g>0$, испытывает фазовый переход:

$$\mu(\rho)=\partial_\rho f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)=\begin{cases}g\rho+\partial_\rho f_0(\beta,\rho)\,, & \rho<\rho_{c,\mathrm{II}}\\ 0\,, & \rho\geq\rho_{c,\mathrm{II}}\end{cases}. \qquad (3.II)$$

Здесь критическое значение плотности $\rho_{c,\mathrm{II}}$ определяется из уравне-

ния:
$$\rho g + \partial_\rho f_0(\beta,\rho) = 0 \,. \tag{3.12}$$
Из (3.12) следует, в частности, что для $g \geq 0$ плотность $\rho_{c,\mathrm{II}} \leq \rho_{c,0} = \rho_{c,\mathrm{I}}$, где $\rho_{c,0}$ критическое значение плотности для идеального бозе-газа, которое, как установлено выше, совпадает с критическим значением плотности для неидеального газа I, см. раздел 2.

<u>Следствие 3.3</u> (бозе-конденсация). Из явного вида статистической суммы для модели (3.1) в БКА следует, что
$$\bar{\rho}_\Lambda = \left\langle \frac{n_0}{V} \right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) + \left\langle \frac{N-n_0}{V} \right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) = \partial_\mu p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) \,; \tag{3.13}$$
$$\rho_0 \equiv \left\langle \frac{n_0}{V} \right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) = \frac{1}{V}\left\{\exp\left[\beta\left(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu\right)\right]-1\right\}^{-1} .$$
Воспользуемся теперь тем, что давление-выпуклая функция для $\mu \leq 0$, предел $t\text{-}\lim p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) = p_{\mathrm{II}}$ существует и является дифференцируемой функцией для $\mu < 0$ (теорема 3.1). Тогда в силу леммы Гриффитса (см.[7], гл. I, § 2):
$$t\text{-}\lim \partial_\mu p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) = \partial_\mu p_{\mathrm{II}}(\beta,\mu) \,, \quad \mu < 0 \,. \tag{3.14}$$
Из (3.13) и (3.14) следует, что для $\mu < 0$
$$\begin{aligned} \partial_\mu p_{\mathrm{II}}(\beta,\mu) &= t\text{-}\lim \left\langle \frac{N-n_0}{V} \right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) = \\ &= t\text{-}\lim \left\langle \frac{N}{V} \right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) \,. \end{aligned} \tag{3.15}$$
Правую часть (3.15) можно представить в виде: $\partial_\mu p_{\mathrm{II}}(\beta,\mu) = \bar{\rho}_{\mathrm{II}}$, где $\bar{\rho}_{\mathrm{II}}(\beta,\mu)$ $(< \rho_{c,\mathrm{II}})$ соответствует супремуму в (3.10). Более того, из явного вида $f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho)$ следует, что $\lim\limits_{\mu\to -0} \bar{\rho}_{\mathrm{II}} = \rho_{c,\mathrm{II}}$. Поэтому (см. (3.13)) для $\rho_\Lambda \to \rho > \rho_{c,\mathrm{II}}$ мы сталкиваемся с уже известной ситуацией: существует последовательность $\{\bar{\mu}_\Lambda(\rho)\}_\Lambda$ такая, что
$$\bar{\mu}_\Lambda(\rho)\Big|_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu} \simeq \varepsilon_0(\Lambda) - \left[\beta V(\rho-\rho_{c,\mathrm{II}})\right]^{-1} + o(V^{-1}) \,. \tag{3.16}$$
При этом в основном состоянии скапливается макроскопическое число частиц (см. (3.13)):
$$\rho_0 = t\text{-}\lim \left\langle \frac{n_0}{V} \right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\bar{\mu}_\Lambda(\rho)) = \rho - \rho_{c,\mathrm{II}} \,. \tag{3.17}$$
<u>Замечание 3.1.</u> Так же, как и модель I, модель II существует при $g < 0$ в КА, но не в БКА ($p_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) = +\infty$, см. (3.4)):
$$f_{\mathrm{II}}(\beta,\rho) = \inf_{\eta \leq \rho} \left[\tfrac{1}{2} g \eta^2 + f_0(\beta,\eta)\right] = \tfrac{1}{2} g \rho^2 + f_0(\beta,\rho) \,. \tag{3.18}$$

Таким образом, для модели II (3.1) также нарушается термодинамическая (слабая) эквивалентность ансамблей (ср. следствие 2.2 и замечание 2.1), причем функция (3.18) для $g < 0$ опять является невыпуклой по плотности ρ .

Перейдем теперь к обсуждению вопроса о сильной эквивалентности КА и БКА для модели (3.1) при $g > 0$. Как и выше, для этого необходимо вычислить $t\text{-}\lim$ для функции плотности Каца.

<u>Теорема 3.2.</u> Для модели (3.1) при $g > 0$ и $\nu \geq 3$ сильная эквивалентность КА и БКА нарушается, поскольку функция плотности Каца имеет вид:
$$K^{\mathrm{II}}_{\beta,\mu}(x|\rho) = \begin{cases} \delta\left(x - \bar{\rho}_{\mathrm{II}}(\beta,\mu)\right), & \mu \leq 0 \ \left(\rho = \bar{\rho}_{\mathrm{II}}(\beta,\mu) \leq \rho_{c,\mathrm{II}}\right) \\ \dfrac{\theta(x-\rho_{c,\mathrm{II}})}{\rho - \rho_{c,\mathrm{II}}} \exp\left[-\dfrac{x-\rho_{c,\mathrm{II}}}{\rho-\rho_{c,\mathrm{II}}}\right], & \mu = 0 \ (\rho > \rho_{c,\mathrm{II}}) . \end{cases} \tag{3.19}$$
<u>Доказательство.</u> Из явного вида статистической суммы в БКА (3.4) следует, что характеристическая функция для случайной величины N/V имеет вид:
$$\begin{aligned} \left\langle \exp\left(it\frac{N}{V}\right)\right\rangle_{\Lambda,\mathrm{II}}(\beta,\mu) &\equiv \int_0^\infty dx\, K^{\mathrm{II}}_{\beta,\mu,\Lambda}(x|\rho) \exp(itx) = \\ &= \frac{\left\{1-\exp\left[-\beta\left(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu\right)\right]\right\}}{\left\{1-\exp\left[-\beta\left(\varepsilon_0(\Lambda)-\mu-\frac{it}{\beta V}\right)\right]\right\}} \sum_{m=0}^\infty \exp\left(it\frac{m}{V}\right) \mathrm{Pr}_\Lambda\left(\frac{m}{V}\right) . \end{aligned} \tag{3.20}$$
Здесь семейство вероятностей $\{\mathrm{Pr}_\Lambda(x)\}_\Lambda$ определяется для $x \geq 0$ и $\mu \leq 0$ функциями $\{h_\Lambda(x)\}_\Lambda$, которые уже встречались выше, см. (3.4):
$$\begin{aligned} &\mathrm{Pr}_\Lambda(x) = Q_\Lambda^{-1} \exp\left[\beta V h_\Lambda(x)\right] , \\ &h_\Lambda(x) = \mu x - \tfrac{1}{2} g x^2 - \tilde{f}_{\Lambda,0}(\beta,x) \,, \quad Q_\Lambda = \sum_{m=0}^\infty \exp\left[\beta V h_\Lambda\left(\frac{m}{V}\right)\right] . \end{aligned} \tag{3.21}$$
В силу (2.5) последовательность строго выпуклых функций $\{h_\Lambda(x)\}_\Lambda, g>0$, сходится при $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu$ к строго выпуклой функции
$$h(x) = \mu x - \tfrac{1}{2} g x^2 - f_0(\beta,x) \,; \quad x \geq 0, \mu \leq 0 \,. \tag{3.22}$$
Поэтому последовательность точек $\{\bar{x}_\Lambda\}_\Lambda$, соответствующих $\sup h_\Lambda(x) = h_\Lambda(\bar{x}_\Lambda)$, сходится к точке $\bar{x}$, которая соответствует равенству
$$\sup_{x \geq 0} h(x) = h(\bar{x}) \,. \tag{3.23}$$
Из этого сразу же следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует Λ_ε такое, что для $\Lambda (\supset \Lambda_\varepsilon) \nearrow \mathbb{R}^\nu$ вероятность
$$\sum_{\bar{x}_\Lambda - \varepsilon < \frac{m}{V} < \bar{x}_\Lambda + \varepsilon} \mathrm{Pr}_\Lambda\left(\frac{m}{V}\right)\Big|_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu} \longrightarrow 1 \,.$$

Иными словами, последовательность $\{\mathbb{P}r_\Lambda(x)\}_\Lambda$ слабо сходится к распределению, сосредоточенному в точке $\bar{x} = \bar{\rho}_{\text{II}}(\mu)$ (см. (3.7)), (3.I5)), или

$$t\text{-}\lim \sum_{m=0}^{\infty} \exp\left(it\frac{m}{V}\right) \mathbb{P}r_\Lambda\left(\frac{m}{V}\right) = \exp\left(it\bar{\rho}_{\text{II}}(\beta,\mu)\right), \tag{3.24}$$

$$\mu \leqslant 0\ ,\ \bar{\rho}_{\text{II}}(\beta,\mu=0) = \rho_{c,\text{II}}(\beta).$$

Если $\mu < 0$ (что соответствует $\rho < \rho_{c,\text{II}}$, см. (3.I3)-(3.I5)), то соотношение (3.I9) следует из (3.20),(3.24) и того, что $t\text{-}\lim \varepsilon_0(\Lambda)=0$. Для сходящейся к нулю последовательности $\{\bar{\mu}_\Lambda(\rho)\}_\Lambda$, соответствующей $\rho > \rho_{c,\text{II}}$ (см, (3.I6)), картина будет иной: из вида асимптотики (3.I6) и выражений (3.20), (3.24) получаем (3.I9) для $\mu=0\ (\rho>\rho_{c,\text{II}})$. □

Замечание 3.2. Плотности $K^{\text{I}}_{\beta,\mu}$, $K^{\text{II}}_{\beta,\mu}$ для моделей (2.I) и (3.I) различаются только выражениями для функций $\bar{\rho}_{\text{I}}(\beta,\mu)$ и $\bar{\rho}_{\text{II}}(\beta,\mu)$ (соответственно $\rho_{c,\text{I}}$, $\rho_{c,\text{II}}$). Причем, если для модели (2.I) $K^{\text{I}}_{\beta,\mu} = K^{0}_{\beta,\mu}$, где индекс (0) соответствует идеальному бозе-газу, то для модели (3.I) $\bar{\rho}_{\text{II}}(\beta,\mu) < \bar{\rho}_{\text{I}}$, см. (3.7), $\lim_{g\to+0} \bar{\rho}_{\text{II}} = \bar{\rho}_0$. Однако механизмы нарушения сильной эквивалентности КА и БКА для моделей I и П совпадают: отличие плотностей $K^{\text{I},\text{II}}_{\beta,\mu}$ от δ - функции возникает из-за вклада в выражение для плотности Каца одного множителя (см. 2.I6) и (3.20)), соответствующего энергетическому уровню (в одночастичном спектре), на котором происходит бозе-конденсация.

В этом смысле нарушение сильной эквивалентности ансамблей в моделях I и П происходит по тем же причинам, что и в идеальном бозе-газе, см. /I,2/. При этом $K^{\text{I}}_{\beta,\mu} = K^{0}_{\beta,\mu}$, хотя конденсация в модели I начинается на уровне $\varepsilon_1(\Lambda)$, а не на $\varepsilon_0(\Lambda)$, как для идеального газа, а $K^{\text{II}}_{\beta,\mu} \neq K^{0}_{\beta,\mu}$, хотя конденсация для обеих моделей происходит в основном состоянии.

4. Неидеальный бозе-газ Ш: потенциал плотности для взаимодействия Ленарда - Джонса

Из доказательств теорем 2.3 и 3.2 и замечания 3.2 следует, каким образом нужно включить взаимодействие между бозонами, чтобы восстановить статистическую (сильную) эквивалентность ансамблей: отталкивание должны испытывать частицы на всех энергетических уровнях одночастичного спектра. Открытым остается лишь вопрос о том, сохранится ли при этом явление бозе-конденсации и как оно будет протекать? Одна из моделей такого типа рассмотрена ниже.

Как известно, для существования термодинамического предела одним из возможных требований к взаимодействию является условие устойчивости: $U(x_1,\dots,x_N) \geqslant -BN$, где $U(x_1,\dots,x_N)$-энергия взаимодействия N частиц, $B \geqslant 0$ /8/. Для частиц, помещенных в сосуд $\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu$ и взаимодействующих с помощью парного потенциала Ленарда - Джонса, $\Phi(x) = a|x|^{-\lambda} - b|x|^{-\gamma}$; $a>0$, $b \geqslant 0$; $\lambda > \gamma > \nu$, имеет место более сильная оценка (сверхустойчивость, см /8/) :

$$U(x_1,\dots,x_N) \geqslant -BN + CN\left(\frac{N}{V}\right)^{\lambda/\nu} \equiv V u\left(\frac{N}{V}\right);\ B\geqslant 0\ ,\ C>0. \tag{4.I}$$

В настоящем разделе мы рассмотрим неидеальный бозе-газ (модель Ш), для которого потенциал взаимодействия определяется плотностью числа частиц:

$$U(x_1,\dots,x_N) = V w\left(\frac{N}{V}\right),\quad w \in C(\mathbb{R}^1_+). \tag{4.2}$$

Замечание 4.I. Взаимодействие $Vu\left(\frac{N}{V}\right)$ (4.I) является частным случаем взаимодействия общего вида (4.2). Если взаимодействие в бозе-газе определяется потенциалом, зависящим только от плотности числа частиц $\rho = N/V$, то в КА соответствующий термодинамический потенциал (плотность свободной энергии) легко вычислить:

$$f(\beta,\rho) = f_0(\beta,\rho) + w(\rho). \tag{4.3}$$

Ясно также, что для произвольной непрерывной функции $w(\rho)$ соответствующая плотность термодинамического потенциала в БКА может не существовать ($p(\beta,\mu) = +\infty$), а если $f(\beta,\rho)$ не является выпуклой функцией ρ, то нарушается термодинамическая эквивалентность ансамблей.

Теорема 4.I. Для неидеального бозе-газа со взаимодействием $U(x_1,\dots,x_N) = Vu\left(\frac{N}{V}\right)$ (4.I) КА и БКА термодинамически (слабо) эквиваленты для всех допустимых значений параметров $\beta \geqslant 0$, $\mu \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Поскольку плотность свободной энергии для взаимодействия $Vu(\rho)$ является выпуклой функцией плотности:

$$f_{\text{III}}(\beta,\rho) = f_0(\beta,\rho) - B\rho + C\rho^\alpha,\quad \alpha = 1 + \frac{\lambda}{\nu}, \tag{4.4}$$

и $\lim_{\rho\to 0,\infty} \partial_\rho f_{\text{III}} = \mp\infty$, то $\mu \in \mathbb{R}^1$ (сравни разделы I-3), и достаточно убедиться, что давление $t\text{-}\lim p_{\Lambda,\text{III}} = p_{\text{III}}$, для $\mu \in \mathbb{R}^1$, существует и является преобразованием Лежандра функций (4.4). Для этого заметим, что функции $\{F_\Lambda(\beta,\rho|\mu) = \mu\rho - u(\rho) - f_{\Lambda,0}(\beta,\rho)\}_\Lambda$, для $\mu \in \mathbb{R}^1$, являются строго выпуклыми по ρ и сходятся (см. (I.5)) к строго выпуклой функции

$$t\text{-}\lim F_\Lambda(\beta,\rho|\mu) = F(\beta,\rho|\mu) = \mu\rho - u(\rho) - f_0(\beta,\rho) . \qquad (4.5)$$

Так как эта сходимость равномерна по ρ на любом компакте $K \subset \mathbb{R}^1_+$, то

$$t\text{-}\lim F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu) = F(\beta,\bar\rho|\mu) , \qquad (4.6)$$

где $\{\bar\rho_\Lambda\}_\Lambda$ – последовательность точек, в которых функции $\{F_\Lambda(\beta,\rho|\mu)\}_\Lambda$ достигают максимума, а $\bar\rho$ – соответствующая точка для функции $F(\beta,\rho|\mu)$. Поскольку $\partial_\rho f_{\Lambda,0}(\beta,\rho) \le 0$ и $t\text{-}\lim \partial_\rho f_{\Lambda,0} = 0$ для $\rho \ge \rho_{c,0}$ (см. раздел I и /I,2/), то для любого μ существует такое $\delta > 0$ и $\rho^* > \rho_{c,0}$, что для $\rho > \rho^*$ и всех $V > V_\delta$ имеем:

$$F_\Lambda(\beta,\rho|\mu) - F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu) < (\rho-\rho^*)(\mu - u'(\rho^*) + \delta) ,$$

причем ρ^* выбирается из условия $(\mu - u'(\rho^*) + \delta) \equiv d < 0$ – это всегда возможно, поскольку $\alpha > 1$ (4.4). Тогда для статистической суммы в БКА получаем оценку:

$$\begin{aligned} \Xi_{\Lambda,III}(\beta,\mu) &= \exp[\beta V F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu)] \sum_{N=0}^{\infty} \exp[\beta V F_\Lambda(\beta,\tfrac{N}{V}|\mu) - \\ &- F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu)] \le \exp[\beta V F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu)] \{ \rho^* V + \sum_{N > \rho^* V} \exp[\beta(N - \\ &- \rho^* V)(\mu - u'(\rho^*) + \delta)] \} . \end{aligned} \qquad (4.7)$$

С помощью оценки (4.7) получаем для давления $p_\Lambda(\beta,\mu)$ следующие неравенства:

$$F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu) \le p_{\Lambda,III}(\beta,\mu) \le F_\Lambda(\beta,\bar\rho_\Lambda|\mu) + \frac{1}{\beta V} \ln[\rho^* V + \{1 - \exp(-\beta d)\}^{-1}] . \qquad (4.8)$$

Тогда из (4.5), (4.6) и (4.8) следует, что $t\text{-}\lim p(\beta,\mu)$ существует и равен:

$$p_{III}(\beta,\mu) = \sup_{\rho \ge 0} \{\mu\rho - f_{III}(\beta,\rho)\} , \qquad (4.9)$$

где $f_{III}(\beta,\rho)$ – плотность свободной энергии в КА (4.4). □

Следствие 4.I. Решающим обстоятельством при доказательстве теоремы является не конкретный вид потенциала взаимодействия, (4.I), а лишь строгая выпуклось вниз функции $u(\rho)$ для $\rho \ge 0$. Поэтому утверждение теоремы остается справедливым, если заменить $u(\rho)$ (4.I) на любую строго выпуклую вниз функцию $w(\rho)$ (4.2). Например, $w(\rho) = g\rho^2/2$ соответствует модели, которую называют Imperfect Bose Gas /4,9-II/.

Теорема 4.2. Для неидеального бозе-газа со взаимодействием (4.I)

(или (4.2)) КА и БКА эквивалентны в статистическом (сильном) смысле для всех $\beta \ge 0$ и $\mu \in \mathbb{R}^1$.

Доказательство. Заметим, что теперь, в отличие от (2.I6), (3.30), характеристическая функция для плотности в конечном сосуде не содержит множителей, соответствующих идеальному газу:

$$\langle \exp(it\tfrac{N}{V}) \rangle_{\Lambda,III}(\beta,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \exp(it\tfrac{N}{V}) \mathcal{P}_\Lambda(\tfrac{N}{V}) ,$$

$$\mathcal{P}_\Lambda(\rho) = \{\Xi_{\Lambda,III}(\beta,\mu)\}^{-1} \exp[\beta V F_\Lambda(\beta,\rho|\mu)] . \qquad (4.I0)$$

Из аргументов, приведенных в доказательстве теоремы 4.I, следует, что распределение $\mathcal{P}_\Lambda(\rho)$ для модели Ш таково, что (см. (4.6)) для любого $\varepsilon > 0$

$$t\text{-}\lim \Big\{ \sum_{\bar\rho_\Lambda + \varepsilon > \rho > \bar\rho_\Lambda - \varepsilon} \mathcal{P}_\Lambda(\rho) \Big\} = 1 . \qquad (4.II)$$

Следовательно, (ср. п. 3) распределения вероятностей $\{\mathcal{P}_\Lambda(\rho)\}_\Lambda$ слабо сходятся для $\Lambda \nearrow \mathbb{R}^\nu$ к распределению, сосредоточенному в точке $\rho = \bar\rho_{III}(\beta,\mu)$, которая соответствует максимуму функции (4.5) (см. (4.9)), или

$$\partial_\mu p_{III}(\beta,\mu) = \bar\rho_{III}(\beta,\mu) . \qquad (4.I2)$$

Поэтому предел для характеристической функции имеет вид

$$t\text{-}\lim \langle \exp(it\tfrac{N}{V}) \rangle_{\Lambda,III}(\beta,\mu) = \exp\{it\bar\rho_{III}(\beta,\mu)\} , \qquad (4.I3)$$

т.е. функция плотности Каца для модели Ш является δ – функцией:

$$K^{III}_{\beta,\mu}(x) = \delta(x - \bar\rho_{III}(\beta,\mu)) \; ; \; \beta \ge 0 , \; \mu \in \mathbb{R}^1 , \qquad (4.I4)$$

что и завершает доказательство. □

Замечание 4.2. Для теоремы 4.2 уместно то же замечание, которое сделано в следствии 4.I, причем строгая выпуклость функции $w(\rho)$ обеспечивает строгую монотонность функции $\bar\mu(\rho) = \partial_\rho f_{III}(\beta,\rho)$ и тем самым (в отличие от моделей I и П), взаимно однозначное соответствие между плотностью и химическим потенциалом, который для модели Ш может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, см. (4.4).

Рассмотрим теперь вопрос о бозе-конденсации в модели Ш. Заметим, что специальный вид взаимодействия (4.I), (4.2) позволяет легко решить этот вопрос в КА. Действительно, для конечного сосуда Λ в КА для средних чисел заполнения (n_ε – число заполнения уровня с энергией ε) имеем:

$$\langle n_\varepsilon \rangle_{\Lambda,III}(\beta,\rho) = \langle n_\varepsilon \rangle_{\Lambda,0}(\beta,\rho) . \qquad (4.I5)$$

Как известно, см /I,2/, для идеального бозе-газа предел средних (4.I5) имеет вид:

$$t\text{-}\lim\langle n_\varepsilon\rangle_{\Lambda,0}(\beta,\rho)=\begin{cases}(A\exp(\beta\varepsilon)-1)^{-1}, & \rho<\rho_{c,0};\\ \left.\begin{cases}(\exp(\beta\varepsilon)-1)^{-1}, & \varepsilon>0\\ (\rho-\rho_{c,0}), & \varepsilon=0\ (\nu\geq 3)\end{cases}\right\} & \rho\geq\rho_{c,0},\end{cases} \tag{4.16}$$

где параметр $A=A(\beta,\rho)$ определяется из условия:

$$\rho=t\text{-}\lim\frac{1}{V}\sum_{\varepsilon\geq 0}\langle n_\varepsilon\rangle_{\Lambda,0}(\beta,\rho)=t\text{-}\lim\{V(A_\Lambda-1)\}^{-1}+$$
$$+\int_0^\infty d\mathcal{N}(\varepsilon)\left(A\exp(\beta\varepsilon)-1\right)^{-1},\qquad d\mathcal{N}(\varepsilon)=\left(\frac{2\pi\hbar^2}{m}\right)^{\nu/2}\cdot\frac{\varepsilon^{\nu/2-1}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})}d\varepsilon. \tag{4.17}$$

Замечание 4.3. Из (4.15)-(4.17) следует, что в КА бозе-конденсация для модели III возникает так же и при тех же условиях, что и для идеального бозе-газа. Таким образом, взаимодействие (4.1), (4.2), восстанавливая полную эквивалентность ансамблей, не разрушает бозе-конденсат в КА.

Для того, чтобы перейти к БКА, напомним (см. (4.9)), что

$$p_{\mathrm{III}}(\beta,\mu)=\mu\bar{\rho}(\beta,\mu)-f_{\mathrm{III}}(\beta,\bar{\rho}(\beta,\mu)),$$

где плотность $\bar{\rho}(\beta,\mu)\equiv\bar{\rho}_{\mathrm{III}}$ является единственным решением уравнения

$$\mu=\partial_\rho f_0(\beta,\rho)+w'(\rho). \tag{4.18}$$

Как известно (см. /1/),

$$\partial_\rho f_0(\beta,\rho)=(-\beta)^{-1}\ln A(\beta,\rho). \tag{4.19}$$

Поэтому для функции $\tilde{A}(\beta,\mu)=A(\beta,\bar{\rho})$ из (4.18), (4.19) получаем

$$\tilde{A}(\beta,\mu)=\exp\left[\beta\left(w'(\bar{\rho}(\beta,\mu))-\mu\right)\right]. \tag{4.20}$$

Используя теперь сильную эквивалентность КА БКА (теорема (4.2) и (4.20), для средних чисел заполнения в БКА получаем (см.(4.16)):

$$\langle n_\varepsilon\rangle(\beta,\mu)=\langle n_\varepsilon\rangle(\beta,\bar{\rho}(\beta,\mu))=$$
$$=\left\{\exp\left[\beta\left(\varepsilon-\mu+w'(\bar{\rho}(\beta,\mu))\right)\right]-1\right\}^{-1}, \tag{4.21}$$

а уравнение (4.18) для $\bar{\rho}(\beta,\mu)$ можно представить, с помощью (4.21), в виде:

$$\rho=(\rho-\rho_c)\theta(\rho-\rho_c)+\int_0^\infty d\mathcal{N}(\varepsilon)\left\{\exp\left[\beta\left(\varepsilon-\mu+w'(\rho)\right)\right]-1\right\}^{-1}. \tag{4.22}$$

Здесь первый член выделен для того, чтобы при $\nu\geq 3$ учесть бозе-конденсацию в основном состоянии, которая, как следует из (4.22), появляется для $\mu>\mu_c\equiv w'(\rho_c)$, $\rho_c=\rho_{c,0}$, см. (4.18) и /2/:

$$\rho_c(\beta)=\int_0^\infty d\mathcal{N}(\varepsilon)\left[\exp(\beta\varepsilon)-1\right]^{-1},$$
$$\mu_c(\beta)=w'(\rho_c(\beta)). \tag{4.23}$$

Теорема 4.3. В неидеальном бозе-газе со взаимодействием (4.1), (4.2) для $\nu\geq 3$ и $\rho>\rho_c(\beta)$ КА, либо $\mu>\mu_c=w'(\rho_c)$ (БКА), возникает бозе-конденсация ρ_0 в основном состоянии, равная $\rho_0(\beta,\rho)=\rho-\rho_c(\beta)$ (КА), либо $\rho_0(\beta,\mu)=\bar{\rho}(\beta,\mu)-\rho_c(\beta)$ (БКА).

Замечание 4.4. Доказательство теоремы следует из рассуждений, которые приведены выше, и замечания 4.3. Отметим здесь лишь особенности поведения химического потенциала $\bar{\mu}(\beta,\rho)$ в КА (см. (4.3), (4.18)):

$$\bar{\mu}(\beta,\rho)=\begin{cases}\partial_\rho f_0(\beta,\rho)+w'(\rho), & \rho\leq\rho_c(\beta);\\ w'(\rho), & \rho>\rho_c(\beta).\end{cases} \tag{4.24}$$

Важное отличие поведения $\bar{\mu}(\beta,\rho)$ от того, что мы имели в моделях I, II и в идеальном бозе-газе, заключается в том, что для модели III функция $\bar{\mu}(\beta,\rho)$ монотонно возрастает с ростом плотности ρ. Аналогично, из уравнения (4.18) или эквивалентного ему уравнения (4.22), определяется средняя плотность числа частиц $\bar{\rho}(\beta,\mu)$ в БКА, которая, как очевидно, является функцией, обратной функции (4.24).

В заключение этого пункта обсудим некоторые термодинамические свойства неидеального бозе-газа III.

Из теоремы 4.3 (см. также (4.17), (4.23) следует, что температурное поведение бозе-конденсата в КА (и его зависимость от плотности) совпадает с тем, которое имеет место для идеального бозе-газа, см. (1.4) и /1,2/:

$$\rho_0(\beta,\rho)=\begin{cases}0, & \beta<\beta_c(\rho);\\ \rho-\rho_{c,0}(\beta), & \beta\geq\beta_c(\rho),\end{cases} \tag{4.25}$$

где критическая температура $(\beta_c(\rho))^{-1}$ определяется из условия (см. (4.23):

$$\rho_{c,0}(\beta_c(\rho))=\rho. \tag{4.26}$$

Далее, поскольку $w'(\rho)$-монотонно возрастающая функция плотности (см. следствие 4.1), то для $\mu\geq\mu_c(\beta)$, см. (4.23) средняя плотность $\bar{\rho}(\beta,\mu)\geq\rho_c(\beta)$, и функция $\bar{\rho}(\beta,\mu\geq\mu_c(\beta))=\rho_*(\mu)$ не зависит от температуры, так как уравнение (4.18) для $\rho>\rho_{c,0}(\beta)$ принимает вид:

$$\mu=w'(\rho_*(\mu)),\quad \mu\geq\mu_c(\beta). \tag{4.27}$$

Таким образом:

$$\overline{\rho}(\beta,\mu)=\begin{cases}\overline{\rho}(\beta,\mu) & ,\ \mu<\mu_c(\beta)\ ;\\ \rho_*(\mu) & ,\ \mu\geq\mu_c(\beta)\ ;\end{cases}$$

$$\overline{\rho}(\beta,\mu_c(\beta))=\rho_*(\mu_c(\beta))=\rho_c(\beta)\ ;\ \mu_c(\beta=+\infty)=w'(0). \qquad (4.28)$$

Следовательно, температурная зависимость бозе-конденсата в БКА будет такой же, как и в КА:

$$\rho_0(\beta,\mu)=\begin{cases}0 & ,\ \beta<\beta_c(\mu)\ ;\\ \rho_*(\mu)-\rho_{c,0}(\beta)\ , & \beta\geq\beta_c(\mu)\ ,\end{cases} \qquad (4.29)$$

где критическая температура $(\beta_c(\mu))^{-1}$ определяется из условия (см. (4.28)):

$$\rho_c(\beta_c(\mu))=\rho_*(\mu)\quad ,\ \mu\geq\mu_c\ . \qquad (4.30)$$

Одновременно выражения (4.25) и (4.29) описывают зависимость бозе-конденсата от плотности и химического потенциала (при фиксированной температуре), соответственно, в КА и БКА.

Наконец, из (4.3) нетрудно получить для неидеального бозе-газа Ш уравнение состояния:

$$p(\beta,\rho)=\rho\,\partial_\rho f_{\text{Ш}}(\beta,\rho)-f_{\text{Ш}}(\beta,\rho)= \qquad (4.3I)$$

$$=p_0(\beta,\rho)+\rho w'(\rho)-w(\rho).$$

Из уравнения (4.3I) с учетом строгой выпуклости вниз функции $w(\rho)$ следует, что фазовый переход в модели Ш не сопровождается появлением на p-v диаграмме $(v=\rho^{-1})$ плоского горизонтального участка, который соответствует, как известно, фазовому переходу первого рода и, как следует из разделов I-3, имеет место для моделей I,П и идеального газа для $v<v_c(\beta)$. Это означает, что для модели Ш фазовый переход по плотности будет определяться не плоским участком на $p-v$ диаграмме, а изломом давления $p(\beta,v^{-1})$ в точке $v=v_c(\beta)$, а фазовый переход по температуре (см. (4.3) будет таким же, как и в идеальном бозе-газе — он определяется изломом теплоемкости $c_v(\beta)$ /3,4/.

5. Заключительные замечания

Механизм восстановления статистической (сильной эквивалентности КА и БКА для неидеального бозе-газа Ш ясен из сравнений этой модели с моделями I,П и идеальным бозе-газом: взаимодействие (4.I), (4.2) подавляет аномальные флуктуации плотности числа частиц /I/. Действительно, из разделов 2 и 3 (см. также /I/) следует, что

$$t\text{-}\lim D^{0}_{\beta,\mu,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)=t\text{-}\lim D^{\mathrm{I}}_{\beta,\mu,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)=$$

$$=t\text{-}\lim D^{\text{П}}_{\beta,\mu,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)=\begin{cases}0 & ,\ \mu<0\ \ (\rho<\rho_c)\ ;\\ (\rho-\rho_c)^2 & ,\ \mu=0\ \ (\rho\geq\rho_c)\ ,\end{cases} \qquad (5.\mathrm{I})$$

где $D^{(\cdot)}_{\beta,\mu,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)$ – дисперсия плотности числа частиц N/V в сосуде Λ в БКА, соответственно, для идеального бозе-газа и моделей I, П. Заметим теперь, что для модели Ш в КА, по определению этого ансамбля, $D^{\text{Ш}}_{\beta,\rho,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)=D^{0}_{\beta,\rho,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)=0$. Тогда, в силу теоремы 4,3, имеем:

$$t\text{-}\lim D^{\text{Ш}}_{\beta,\mu,\Lambda}\left(\frac{N}{V}\right)=0\ ;\ \beta\geq0\ ,\ \mu\in\mathbb{R}^1. \qquad (5.2)$$

Этим модель Ш существенно отличается от моделей I,П и идеального газа, хотя в ней, так, как и в упомянутых моделях, имеет место фазовый переход с образованием бозе-конденсата в основном состоянии.

Вероятностное распределение для плотности числа частиц в сосуде Λ для БКА имеет вид (см. п.п. I-4 и /I,2/):

$$\mathrm{Pr}^{(\alpha)}_{\beta,\mu,\Lambda}\left(\frac{N}{V}=\xi\right)=\frac{Z_{\Lambda,\alpha}(\beta,N=\xi V)}{\Xi_{\Lambda,\alpha}(\beta,\mu)}\ ,\quad \alpha=0,\mathrm{I},\text{П},\text{Ш}\ . \qquad (5.3)$$

Тогда из (5.I)- (5.3) и неравенства Чебышева следует, что: (а) для моделей 0,I, П в той области значений параметров, которые соответствуют появлению бозе-конденсата: $\mu=0\ (\rho>\rho_{c,\alpha})$ нарушается принцип репрезентативности случайной величины в том смысле, что (см. /I2/)

$$t\text{-}\lim \mathrm{Pr}^{(\alpha)}_{\beta,\overline{\mu}_\Lambda(\rho),\Lambda}\left\{\left|\frac{N}{V}-\rho\right|>\varepsilon\right\}\neq0\ ,\quad \alpha=0,\mathrm{I},\text{П}\ ;$$

$$\left\langle\frac{N}{V}\right\rangle_{\Lambda,\alpha}(\beta,\overline{\mu}_\Lambda(\rho))=\rho>\rho_{c,\alpha}\ ;\ t\text{-}\lim\overline{\mu}_\Lambda(\rho)=0\ ; \qquad (5.4)$$

(б) для модели Ш случайная величина N/V удовлетворяет принципу репрезентативности, т.е. она сходится (по вероятности $\mathrm{Pr}^{\text{Ш}}_{\beta,\mu,\Lambda}(\cdot)$) к неслучайной величине $\overline{\rho}(\beta,\mu)=t\text{-}\lim\left\langle\frac{N}{V}\right\rangle_{\Lambda,\text{Ш}}(\beta,\mu)$ для всех значений термодинамических параметров, в том числе и для $\mu>\mu_c(\beta)$, т.е. в области, соответствующей появлению бозе-конденсата (см. п. 4).

Тот факт, что нарушение принципа репрезентативности для плотности числа частиц может служить критерием существования фазовых переходов первого рода, был впервые отмечен в работах /I3,I4/. Таким образом, нарушение статистической (сильной) эквивалентности КА и БКА для бозе-систем, рассмотренных в настоящей работе, связано с нарушением для этих систем в БКА принципа репрезентативности (закона больших чисел) для случайной величины, равной отношению числа частиц, попавших в выделенную область, к объему этой области.

Литература

I. Загребнов В.А., Папоян Вл.В. Идеальный бозе-газ: флуктуации и неэквивалентность ансамблей. III Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики (Дубна, 1984), т. I, с. 30I-309, ДI7-84-850, Дубна: ОИЯИ, 1984.
2. Загребнов В.А., Папоян Вл. В. О проблеме эквивалентности ансамблей для бозе-систем (идеальный бозе-газ). Препринт РI7-85-403. Дубна: ОИЯИ, 1985.
3. Ziff R.M., Uhlenbeck G.K., Kac M.-Physics Reports, 1977, 32C, No 4, 169-248.
4. Хуанг К. Статистическая механика. М.:"Мир", 1966.
Huang K. Imperfect Rose Cas. In: Studies in Statistical Mechanics, v. II, Amsterdam North-Holland Publishing Comp., 1964, 3-106.
5. Davies E.B.- Commun. Math. Phys., 1972, 28, No I, 69-86.
6. Angelescu N., Nenciu G., Tonchev N.S. On the Theory of the Excitonic Phase Transition in the Presence of a Reservoir Preprint EI7-82-798, Dubna: JINR, 1982.
7. Боголюбов Н.Н. (мл.), Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Курбатов А.М. Тончев Н.С. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. София: Изд-во БАН, 1981.
8. Рюэль Д. Статистическая механика. Строгие результаты. М.:"Мир", 1971.
9. Fannes M., Verbeure A.- J. Math. Phys., 1980, 2I, No 7,,1809-1818
10. Buffet E., Pulé J.V. - J. Math.Phys.,1983, 24, No 6,1608-1616.
11. Van den Berg M., Lewis J.T., de Smedt Ph.- J. Stat. Phys., 1984, 37, No 5/6, 697-707 .
12. Минлос Р.А. - УМН, 1968, 23, № I, 133-190.
13. Березин Ф.А., Синай Я.Г. - Труды Моск. математ. общества, 1967, 17, 197-212.
14. Dobrushin R.L. Existence of Phase Transitions in Models of a Lattice Cas. Proc. Fifth Berkeley Symposium Math. Stat. and Prob., 1967, VI, p. 73-87.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1985 года

Загребнов В.А., Папоян Вл.В. P17-85-508
О проблеме эквивалентности ансамблей для бозе-систем /неидеальный бозе-газ/

Проблема эквивалентности канонического и большого канонического ансамблей для неидеальных бозе-систем рассмотрена на примере трех точно решаемых моделей, каждая из которых испытывает переход с образованием бозе-конденсата. Показано, что нарушение статистической /сильной/ эквивалентности ансамблей не является простым следствием бозе-конденсации - - эквивалентность восстанавливается при изменении рода фазового перехода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод авторов

Zagrebnov V.A., Papoyan Vl.V. P17-85-508
On the Problem of the Ensemble Equivalence for Bose-Systems (Nonideal Boson Gas)

We study the problem of canonical and grand canonical ensemble equivalence for nonideal Boson systems by considering three exactly solvable models exhibiting phase transitions with Bose-condensation. It is shown that the violation of statistical (strong) equivalence of ensembles is not a simple consequence of Bose-condensation. The equivalence can be restored if the type of phase transition changes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985