объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-85-414

Н.Н.Боголюбов /мл./, А.А.Молдояров,
А.С.Шумовский

О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ В МОДЕЛИ ДИККЕ С ДВУХФОТОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в "ДАН СССР"

1985

В стандартной модели Дикке при выполнении условия сильной связи имеет место фазовый переход в сверхизлучательное состояние, характеризуемое макроскопическим заполнением резонансной моды поля и спонтанной поляризацией в подсистеме диполей [1]. Однако для задач квантовой радиофизики большой интерес представляет также исследование систем с переходами высшей мультипольности, в которых реализуются многофотонные процессы. Такие переходы используются, например, в схемах нелинейного преобразования когерентного инфракрасного излучения в видимый диапазон [2]. В связи с этим актуален вопрос о существовании сверхизлучательного фазового перехода в двухуровневой системе с двухфотонным обменом. Такая модель применима, если переходы между уровнями дипольно запрещены. Надо отметить, что обычно рассматриваются системы, состоящие из одного излучателя и двух мод поля [3], либо макроскопическая система, нелинейно взаимодействующая с одной модой поля [4].

Будем исходить из обобщения модели Дикке на случай многофотонных процессов, предложенного Мак Нейлом и Уоллсом [5], и описываемого гамильтонианом:

$$H = H_F + H_{A-F} + H_A, \quad H_F = \sum_{k=1}^{M} \omega_k a_k^+ a_k, \quad H_A = \epsilon \sum_{f=1}^{N} \sigma_f^z,$$

$$H_{A-F} = N^{-\frac{M}{2}} \lambda \sum_{f=1}^{N} \left(\prod_{k=1}^{M} a_k^+ \sigma_f^- + \prod_{k=1}^{M} a_k \sigma_f^+ \right). \qquad /1/$$

Мы рассматриваем модель с M = 2. Здесь, как обычно, ω_k - собственные частоты мод поля, характеризуемых операторами $a_k^{\#}$ с перестановочными соотношениями $[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'}$, $[a_k, a_{k'}] = 0$, λ - константа связи, N - число излучателей, $\sigma_f^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i\sigma^y)$ и σ_f^z описывают излучатели.

Для исследования термодинамики удобным представляется метод когерентных состояний [6,7], использованный для точного решения стандартной модели Дикке [8,9]. Поскольку гамильтониан нашей задачи

$$H = \omega_1 a_1^+ a_1 + \omega_2 a_2^+ a_2 + \frac{\lambda}{N} \sum_{f=1}^{N} (\sigma_f^- a_1^+ a_2^+ + \sigma_f^+ a_1 a_2) + \epsilon \sum_{f=1}^{N} \sigma_f^z \qquad /2/$$

имеет нелинейность во взаимодействии, возникает необходимость построения оценок для статистической суммы в термодинамическом пр[illegible] $N \to \infty$.

Введем в полном пространстве состояний $\mathcal{H} = \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2 \otimes \mathcal{H}_s$ /где $\mathcal{F}_i$ – гильбертово пространство, на котором определены операторы $a_i^{\#}$ и $\mathcal{H}_s$ – пространство состояний операторов спина $\sigma^{x,y,z}$ размерности 2^N/ проекторы $P_1(n)$ и $P_2(m)$ на состояния с не более чем n фотонами первого сорта и не более чем m фотонами второго сорта. Из определения следует, что $P_i(j) \to I_i$ в сильном смысле /[10], гл.8/. Положим $H(n,m) = P_1(n)\,P_2(m)\,HP_2(m)\,P_1(n)$ и рассмотрим

$$\mathcal{Z}(n,m) = \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{H}\}} P_1(n)\,P_2(m)\,\exp(-\beta H(n,m)). \qquad /3/$$

В /3/ берется след оператора в конечномерном пространстве. Общей областью определения оператора H в /2/ и операторов $H(n,m)$ является область $\mathcal{H}_0 = \bigcup_{\{n,m\}} P_1(n)\,P_2(m)\,\mathcal{H}$ и для любого состояния $\psi \in \mathcal{H}_0$ можно удовлетворить равенству $H(n,m)\psi = H\psi$, выбрав достаточно большие значения n и m. Тогда $H(n,m) \to H$ в смысле сильной резольвентной сходимости /[10], гл.8/. В этом можно убедиться путем перехода к пределу по n и по m, причем порядок такого перехода несуществен.

Далее, пусть $\{\psi_j\,,\, \mathcal{E}_j\}_{j=1}^{\infty}$ – система собственных векторов и собственных значений, занумерованных в возрастающем порядке, для гамильтониана H. Для $H(n,m)$ соответствующую систему обозначим $\{\psi_j(n,m),\ \mathcal{E}_j(n,m)\}_{j=1}^{n\cdot m\cdot 2^N}$. Мы можем использовать $\psi_j(n,m)$ в качестве пробных функций для H и с помощью принципа минимакса /[11], гл.13/ получить $\mathcal{E}_j(n,m) \geq \mathcal{E}_j$ для $1 \leq j \leq n \cdot m \cdot 2^N$.
Из сильной резольвентной сходимости $H(n,m) \to H$ немедленно следует, что для $a, b \notin \sigma(H)$, где $\sigma(H)$ – спектр H, для проекторнозначных мер операторов $H(n,m)$ и H выполняется $P_{(a,b)}(n,m) \to P_{(a,b)}$ в сильном смысле /[10], гл.8/.

Тогда, согласно спектральной теореме в терминах функционального исчисления, $\psi_j(n,m) \to \psi_j$ и $\mathcal{E}_j(n,m) \to \mathcal{E}_j$ поточечно по индексу j. Отсюда окончательно заключаем, что в /3/ $\mathcal{Z}(n,m) \to \mathcal{Z}$, согласно теореме о мажорированной сходимости /[10], гл.1/.

В каждом из пространств $\mathcal{F}_i$ введем усеченные глауберовские состояния [9]

$$|\alpha_i, n\rangle = P_i(n)\,|\alpha_i\rangle, \quad \text{где} \quad a_i|\alpha_i\rangle = \alpha_i\,|\alpha_i\rangle. \qquad /4/$$

Тогда справедливы соотношения

$$\langle\alpha_i, n\,|\,\beta_i, n\rangle = K_i(\alpha_i, \beta_i, n) =$$

$$= \exp\{-\tfrac{1}{2}(|\alpha_i|^2 + |\beta_i|^2)\}\cdot \sum_{n'=1}^{n} (\alpha_i^* \beta_i)^{n'} / n'!\,, \qquad /5/$$

$$\operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{F}_i\}} P_i(n)\,A\,P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i \langle\alpha_i, n\,|\,A\,|\,\alpha_i, n\rangle, \qquad /6/$$

где A – произвольный оператор,

$$\operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{F}_i\}} |\alpha_i, n\rangle\langle\beta_i, n| = K_i(\alpha_i, \beta_i, n), \qquad /7/$$

$$P_i(n)\,a_i\,P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i\, \alpha_i\, |\alpha_i, n\rangle\langle\alpha_i, n|, \qquad /8/$$

$$P_i(n)\,a_i^+ a_i\,P_i(n) = \frac{1}{\pi} \int d\alpha_i\,(|\alpha_i|^2 - 1)\,|\alpha_i, n\rangle\langle\alpha_i, n|. \qquad /9/$$

Поскольку уже доказано, что $\mathcal{Z}(n,m) \to \mathcal{Z}$, то для получения нижней границы статистической суммы достаточно воспользоваться формулой /6/ и неравенством Боголюбова-Пайерлса

$\langle\psi\,|\,\exp A\,|\,\psi\rangle > \langle\psi|\psi\rangle \exp\{\langle\psi\,|\,A\,|\,\psi\rangle / \langle\psi\,|\,\psi\rangle\}$,

положив $A = H(n,m)$. Для "усеченной" статистической суммы $\mathcal{Z}(n,m)$ получим оценку снизу:

$$\mathcal{Z}(n,m) \geq \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{H}_s\}} \frac{1}{\pi^2} \int d\alpha_1\, d\alpha_2\, K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)\, K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)\, \times$$

$$\times \exp\Big[-\beta\Big\{\omega_1 \cdot |\alpha_1|^2 \cdot \frac{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n-1)}{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)} + \omega_2 |\alpha_2|^2 \cdot \frac{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m-1)}{K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)}\, +$$

$$+ \frac{\lambda}{N} \sum_{f=1}^{N} \frac{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n-1)\, K_2(\alpha_2, \alpha_2, m-1)}{K_1(\alpha_1, \alpha_1, n)\, K_2(\alpha_2, \alpha_2, m)} (\sigma_f^- \alpha_1^* \alpha_2^* + \sigma_f^+ \alpha_1 \alpha_2)\, +$$

$$+ \epsilon \sum_{f=1}^{N} \sigma_f^z \Big\}\Big]. \qquad /10/$$

Взяв след в пространстве $\mathcal{H}_s$ и переходя к пределу $n \to \infty$ и $m \to \infty$, имеем $\mathcal{Z} \geq \tilde{\mathcal{Z}}$, где

$$\tilde{\mathcal{Z}} = \frac{1}{\pi^2} \int d\alpha_1\, d\alpha_2 \exp(-\beta(\omega_1|\alpha_1|^2 + \omega_2|\alpha_2|^2))\, \times$$

$$\times\ 2^N \{\operatorname{ch}(\beta\sqrt{\epsilon^2 + \frac{\lambda^2}{N^2}|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2})\}^N. \qquad /11/$$

Таким образом, в силу теоремы о мажорированной сходимости, справедлива оценка /11/.

Для получения оценки сверху определим следующую величину:

$$\mathcal{Z}_\ell(n,m) = \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{H}\}} P_1(n)\,P_2(m)\,\Big(1 - \beta\,\frac{H(n,m)}{\ell}\Big)^{\ell}.$$

Чтобы не исследовать вопрос о сходимости, воспользуемся приемом, предложенным в [12]. Для этого введем обрезающий фактор $e^{-\gamma|\alpha_i|^2}$, $\gamma > 0$ в те члены гамильтониана, где есть операторы поля. Применяя неравенство Голдена-Томпсона, получаем

$$\mathcal{Z}_\ell^\gamma(n,m) \le \int \frac{d\alpha_1}{\pi}\frac{d\alpha_2}{\pi} K_1(\alpha_1,\alpha_1,n)\, K_2(\alpha_2,\alpha_2,m) \times$$

$$\times \operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{H}_s\}} \Big(1-\beta\frac{H^\gamma(n,m)}{\ell}\Big)^\ell, \qquad /12/$$

где $H^\gamma(n,m)$ получен из $H(n,m)$ заменой в этих операторах $a_i^+ a_i$ на $(|\alpha_i|^2-1)\,e^{-\gamma|\alpha_i|^2}$. Применяя к /12/ теорему о мажорированной сходимости и полагая $\gamma=0$ /это возможно в силу равномерности оценки /12/ по γ/, получаем искомую верхнюю границу статистической суммы.

В итоге имеем

$$\tilde{\mathcal{Z}} \le \mathcal{Z} \le \exp(\beta(\omega_1+\omega_2))\,\tilde{\mathcal{Z}}, \qquad /13/$$

где $\tilde{\mathcal{Z}}$ дается выражением

$$\tilde{\mathcal{Z}} = N^2 \int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2 \exp\Big[N\Big\{-\beta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) +$$

$$+ \ln\Big(2\,\mathrm{ch}\Big(\beta\epsilon\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{\epsilon^2}x_1x_2}\Big)\Big)\Big\}\Big], \quad x_i = \frac{|\alpha_i|^2}{N}. \qquad /14/$$

Интеграл /14/ берется методом Лапласа. Максимум показателя экспоненты достигается при $x_1 = x_2 = 0$, свободная энергия имеет простой вид:

$$f = -\frac{1}{\beta}\ln(2\,\mathrm{ch}(\beta\epsilon)), \qquad /15/$$

и макроскопического заполнения бозонных мод нет:

$$\Big\langle\frac{a_i^+ a_i}{N}\Big\rangle = \frac{1}{\tilde{\mathcal{Z}}}\int_0^\infty dx_1 \int_0^\infty dx_2\, x_i \exp\Big[N\Big\{-\beta(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) +$$

$$+ \ln\Big(2\,\mathrm{ch}\Big(\beta\sqrt{\epsilon^2+\lambda^2 x_1 x_2}\Big)\Big)\Big\}\Big] \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \quad i=1,2. \qquad /16/$$

Для исследования спиновой подсистемы воспользуемся соотношениями

$$\mathcal{Z} = \sum_{J=0}^{N/2} \frac{N!\,(2J+1)}{(\frac{N}{2}+J+1)!\,(\frac{N}{2}-J)!}\,\mathcal{Z}(\hat{J}), \qquad \mathcal{Z}(\hat{J}) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta H(\hat{J})}, \qquad /17/$$

где $H(\hat{J})$ получается из исходного заменой операторов спина 1/2 на операторы спина J [12]. Имеет место оценка [12]

$$\tilde{\mathcal{Z}}(J) \le \frac{\tilde{\tilde{\mathcal{Z}}}(J)}{2J+1} \le \tilde{\mathcal{Z}}(J+1), \text{ где } \tilde{\tilde{\mathcal{Z}}}(J) = \frac{1}{4\pi}\operatorname*{Tr}_{\{\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2\}}\int d\Omega\,\exp(-\beta\tilde{H}(J,\Omega)),$$

а гамильтониан $\tilde{H}(J,\Omega)$ получается из $H(\hat{J})$ заменой операторов $\hat{J}$ на векторы $\vec{J} = J\{\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta\}$. Тогда, вводя параметр $\xi = J/N$ и переходя к новым бозонным переменным

$$A_1 = a_1\,\mathrm{ch}\rho + a_2^+\,\mathrm{sh}\rho\, e^{-i\phi}, \quad A_2 = a_1^+\,\mathrm{sh}\rho\, e^{-i\phi} + a_2\,\mathrm{ch}\rho,$$

где $\mathrm{th}\,\rho \equiv D = \frac{1}{2\lambda\xi\sin\theta}\left(\omega_1+\omega_2-\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2-4\lambda^2\xi^2\sin^2\theta}\right)$,

получаем следующее выражение:

$$\tilde{\mathcal{Z}}(N,\xi) = \frac{1}{2}\int_0^\pi d\theta\sin\theta\,\frac{e^{-\beta E_0}}{(1-e^{-\beta E_1})(1-e^{-\beta E_2})}\,e^{N(-\beta\epsilon\xi\cos\theta)}. \qquad /18/$$

В этом выражении $E_0 = \frac{D^2}{D^2-1}\cdot\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2-4\lambda^2\xi^2\sin^2\theta}$,

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(\omega_1-\omega_2+\sqrt{(\omega_1+\omega_2)^2-4\lambda^2\xi^2\sin^2\theta}\right), \qquad E_2 = E_1+\omega_2-\omega_1.$$

Для $\tilde{\mathcal{Z}}(J)$ имеет место асимптотическая оценка

$\frac{1}{N}(\ln\tilde{\mathcal{Z}}(J+1) - \ln\tilde{\tilde{\mathcal{Z}}}(J)) \le \frac{1}{N}(\ln\Delta - \beta\epsilon)$, где $\Delta = \sup\limits_{\xi,\theta} G - \inf\limits_{\xi,\theta} G$, $G = \frac{e^{-\beta E_0}}{(1-e^{-\beta E_1})(1-e^{-\beta E_2})}$. Переходя в /17/ от суммирования по J к интегрированию по ξ, а также пользуясь формулой Стирлинга, получаем статистическую сумму

$$\tilde{\mathcal{Z}}(N,\xi) \sim \int_0^{1/2} d\xi\int_0^\pi d\theta\sin\theta\cdot G\cdot\exp\Big[N\Big\{-\Big(\frac{1}{2}+\xi\Big)\ln\Big(\frac{1}{2}+\xi\Big) - \frac{1}{2}(1-2\xi)\ln\Big(\frac{1}{2}-\xi\Big) - \beta\epsilon\cos\theta\Big\}\Big].$$

Применяя метод Лапласа, получаем уравнения для населенностей уровней и свободную энергию

$$\xi = -\frac{1}{2}\,\mathrm{th}(\beta\epsilon), \qquad /19/$$

$$f = -\frac{1}{\beta}\ln(2\,\mathrm{ch}(\beta\epsilon)). \qquad /20/$$

Пусть теперь H_{A-F} представляет собой произвольную эрмитову квадратичную форму по бозонным переменным с коэффициентами, линейными по операторам $\frac{1}{N}\sum_{f=1}^{N}\sigma^{x,y,z}$. Применяя метод Либа [12], строго показываем, что снова имеют место формулы /19/, /20/, а именно, если

$$H_{A-F}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{M}(R_{ij}\,a_i^{+}a_j^{+}+R^{+}_{ij}\,a_i\,a_j)+\sum_{i,j=1}^{M}S_{ij}\,a_i^{+}\,a_j\ ,$$

где $R_{ij}=R_{ji}$, $S_{ij}=S^{+}_{ji}$ - линейны по $\frac{1}{N}\sum_{f=1}^{N}\sigma^{x,y,z}$, то фазового перехода в сверхизлучательное состояние нет, населенность нижнего уровня всегда больше, чем верхнего, согласно /19/. Поляризация в системе равна нулю, поскольку

$$|<\frac{1}{N}\sum_{f=1}^{N}\sigma_f^{\pm}>|=\frac{J}{N}\sin\theta=0.$$

Если в исходный гамильтониан добавить член, линейный по бозонным переменным, то фазовый переход в сверхизлучательное состояние будет существовать [13].

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н. /мл./, Плечко В.Н., Шумовский А.С. ЭЧАЯ, 1983, 14, 1443.
2. Ахметели А.М., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1981, 256, 1094.
3. Buck B., Sukumar C.V. J.Phys. A, 1984, 17, 877; 17, 885.
4. Gilmore R. Physica A., 1977, 86, 137.
5. McNeil K.J., Walls D.F. J.Phys. A., 1975, 8, 104.
6. Glauber R. Phys.Rev., 1963, 131, 2766.
7. Arecchi F.T. et al. Phys.Rev. A., 1972, 6, 2211.
8. Wang Y.K., Hioe F.T., Phys.Rev. A., 1973, 7, 831.
9. Hepp K., Lieb E.H., Phys.Rev. A., 1973, 8, 2517.
10. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. "Мир", М., 1977, т.1.
11. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. "Мир", М., 1981, т.4.
12. Lieb E., Comm.Math.Phys., 1973, 31, 327.
13. Thomson B.V. J.Phys.A., 1975, vol.8, 126.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 мая 1985 года