объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-85-224

Д.И.Пушкаров

ДЕФЕКТОННЫЙ ВТОРОЙ ЗВУК В КВАНТОВЫХ КРИСТАЛЛАХ

Направлено в журнал
"Физика низких температур"

1985

Как известно[1-3], точечные дефекты в квантовых кристаллах при низких температурах превращаются в квазичастицы-дефектоны. Поэтому состояние дефектов в квантовых кристаллах описывается не их положением в решетке, а квазиимпульсом $\vec{k}$ и законом дисперсии $\omega(\vec{k})$. На смену активационному /прыжковому/ механизму перемещения дефектов при достаточно низких температурах приходит зонный механизм движения дефектонов. Этот механизм /предсказанный в[1,2] / обнаружен экспериментально в исключительно прецизионных экспериментах[5,6] по диффузии примесей ^3He в твердом ^4He, которые позволили, в частности, уточнить характеристики примесонной зоны. Ее ширина оказалась $\sim 10^{-4}$ К, а ширина вакансионной зоны - порядка нескольких градусов. Они хорошо согласуются с предсказанием теории[2-4].

Зонный механизм движения приводит также к определенным эффектам в поведении термодинамических функций и кинетических коэффициентов. Как показано в[7], при достаточно низких температурах дефектонный вклад в теплопроводность кристалла должен быть основным.

Дефектоны могут подчиняться как статистике Ферми-Дирака, так и статистике Бозе-Эйнштейна[8]. В последнем случае в достаточно разреженном газе можно ожидать проявления сверхтекучих свойств. При этом направленный сверхтекучий поток вакансионов будет эквивалентен сверхтекучему потоку массы в обратную сторону. Такое поведение может привести к разнообразным эффектам, аналогичным явлениям в сверхтекучем гелии.

Проблема сверхтекучести дефектонного газа рассматривалась уже в работе Андреева и Лифшица[1]. Авторы строили ее по аналогии с двухжидкостной теорией Ландау. Они показали, что кроме обычного звука, в квантовом кристалле с дефектонами могут распространяться волны типа второго звука. Попытку построить микроскопическую теорию предпринял позже Saslow[9]. Однако его результаты нельзя признать убедительными, так как использованные им термодинамические функции не удовлетворяют некоторым соотношениям Максвелла. По-видимому, им получен правильно только четвертый звук. Интересна работа[10], где показано, что если сверхтекучая скорость "негалилеева" /а постоянна во всех системах координат/, это может привести к сверхтекучему потоку энтропии /а не массы/. Во всех работах /вслед за Ландау/ предполагалась потенциальность "сверхтекучей" скорости. В них рассматривался собственно гидродинамический режим, в предположении, что все длины пробега много меньше длины волны. Однако при достаточно низких температурах длина свободного пробега относительно столкновений с изменением квазиимпульса возбуждений, очевидно, будет возрастать, и система рано или поздно выйдет из этого режима. Поэтому появится новая сохраняющаяся величина – квазиимпульс дефектонного газа. С математической точки зрения это означает появление дополнительного уравнения в системе гидродинамических уравнений, и можно ожидать, что с ним будет связана новая ветвь колебаний, которую мы будем называть дефектонным вторым звуком.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДЕФЕКТОННОГО ГАЗА

Для квазичастичного описания дефектов характерно то, что движение дефектонов /и, в частности, вакансионов/ оказывается возможным и при неподвижных узлах решетки, что, однако, не означает неподвижности атомов в решетке. В этом случае гидродинамическую систему уравнений можно получить из следующих соображений.

Если концентрация статических дефектов в кристалле достаточно мала, а температура достаточно низка, то столкновения с изменением квазиимпульса / U-процессы/ маловероятны, и квазиимпульс является сохраняющейся величиной. Равновесие в газе дефектонов при этом устанавливается за счет нормальных столкновений, не сопровождающихся изменением квазиимпульса. Их частота τ_N^{-1} при этом предполагается больше частоты U-процессов τ_U^{-1}. Таким образом, можно ввести функцию распределения дефектонного газа $n_{\vec k}(\vec r, t)$, зависящую от квазиимпульса $\vec k$, координат $\vec r$ и времени t. В случае бозевских возбуждений энтропию единицы объема можно записать в виде:

$$S = \int s\{n_{\vec k}\} d\tau_{\vec k}, \quad s\{n_{\vec k}\} = (1 + n_{\vec k})\ln(1 + n_{\vec k}) - n_{\vec k}\ln n_{\vec k}. \qquad /1/$$

Соответственно число квазичастиц в единице объема:

$$n = \int n_{\vec k} d\tau_{\vec k}, \qquad /2/$$

плотность квазиимпульса:

$$\vec K = \int \vec k n_{\vec k} d\tau_{\vec k}, \qquad /3/$$

а плотность энергии:

$$E = \int \omega_{\vec k} n_{\vec k} d\tau_{\vec k}, \qquad /4/$$

где $\omega_{\vec k}$ – закон дисперсии квазичастиц, $d\tau_{\vec k} = d^3k/(2\pi)^3$, а постоянная Планка $\hbar = 1$.

Из условия максимума энтропии при сохраняющихся энергии, квазиимпульсе и числе квазичастиц, получаем вид равновесной функции распределения:

$$n_{\vec k} = [\exp(\frac{\omega_{\vec k} - \vec k\vec v - \mu}{T}) - 1]^{-1}, \qquad /5/$$

где μ – химический потенциал, а $\vec v$ – скорость, сопряженная квазиимпульсу $\vec k$. Обращаем внимание на то, что вид функции /5/ только формально напоминает преобразование Галилея к новой системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec v$. В данной ситуации есть выделенная система координат, связанная с решеткой, и никакой галилеевской инвариантности не предполагается.

Варьируя /1/ с функцией распределения /5/, имеем:

$$T\delta S = \delta E - \vec v\delta\vec K - \mu\delta n, \qquad /6/$$

что является определением энергии в переменных S, $\vec K$, n.

Подставляя /5/ в /1/, получим соотношение $\Omega(T, \mu, n) = E - TS - \vec v\vec K - \mu n$ и, соответственно

$$d\Omega = -SdT - nd\mu - \vec K d\vec v, \qquad /7/$$

определяющее дифференциал термодинамического потенциала Ω в переменных $(T, \mu, \vec v)$.

БЕЗДИССИПАТИВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ

Для получения уравнений гидродинамики необходимо вычислить соответствующие потоки. С точностью до линейных по $\vec v$ членов поток квазиимпульса задается потенциалом Ω:

$$L_{i\ell} = \int k_i \frac{\partial\omega_{\vec k}}{\partial k_\ell} n_{\vec k} d\tau_{\vec k} - \Omega_0\delta_{i\ell}, \qquad /8/$$

где $\Omega_0 = \Omega(T, \mu, \vec v = 0)$. Отметим, что тензор потока квазиимпульса диагонален при любом законе дисперсии.

Таким образом, новое уравнение гидродинамики, выражающее в данном приближении закон сохранения квазиимпульса, имеет вид

$$\dot{\vec K} + S\nabla T + n\nabla\mu = 0. \qquad /9/$$

Аналогично поток энергии

$$\vec Q = \int \omega_{\vec k} \frac{\partial\omega_{\vec k}}{\partial\vec k} n_{\vec k} d\tau_{\vec k} = W_0\vec v, \qquad /10/$$

где $W_0 = E_0 - \Omega_0$ - энтальпия единицы объема, а поток квазичастиц

$$\vec{j} = n\vec{v}. \qquad /11/$$

Таким образом, полная система гидродинамических уравнений состоит из уравнения /9/, уравнения непрерывности для числа квазичастиц

$$\dot{n} + n\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0 \qquad /12/$$

и уравнения сохранения энергии

$$\dot{E} + \mathrm{div}(W\vec{v}) = 0. \qquad /13/$$

Из уравнений /9-13/ и термодинамического тождества /6/ получаем уравнение для энтропии

$$\dot{S} + S\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0. \qquad /14/$$

Таким образом, полная система гидродинамических уравнений состоит из /9/, /12/, /14/. В рассматриваемом приближении малых скоростей $\vec{v}$ квазиимпульс $\vec{K}$ зависит от $\vec{v}$ линейно:

$$K_i = \rho_{i\ell} v_\ell , \qquad /15/$$

где эффективная плотность

$$\rho_{i\ell} = -\int k_i k_\ell \frac{\partial n_{\vec{k}}}{\partial \omega_{\vec{k}}}\, d\tau_{\vec{k}} = \frac{1}{T}\int k_i k_\ell\, n^0_{\vec{k}}(n^0_{\vec{k}} + 1)\, d\tau_{\vec{k}}.$$

Можно показать, что

$$\rho_{i\ell} = -\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial v_i\, \partial v_\ell}\right)_{T,\mu}, \quad \rho^{-1}_{i\ell} = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial K_i\, \partial K_\ell}\right)_{S,n}.$$

Во избежание недоразумений отметим, что $\rho_{i\ell}$ в общем случае непропорциональна числу дефектонов n. Пропорциональность имеет место только в случае квадратичного закона дисперсии $\omega_{\vec{k}} = \frac{1}{2} m^{-1}_{i\ell} k_i k_\ell$. Тогда тензор эффективных масс не зависит от квазиимпульса $\vec{k}$, и из /15/ следует $\rho_{i\ell} = n\, m_{i\ell}$.

Если, как это обычно бывает при низких температурах, закон дисперсии степенной ($\omega_{\vec{k}} = a_d k^d$), то эффективная плотность $\rho_{i\ell} \sim T^{(5-d)/d}$, в то время как $n \sim T^{3/d}$. В случае активационных /ненулевых, см.[1]/ вакансионов с законом дисперсии $\omega_{\vec{k}} = \epsilon_0 + \epsilon(\vec{k})$ зависимость обеих плотностей от температуры /при $T \ll \epsilon_0$/ экспоненциальна ($\sim e^{-\epsilon_0/T}$) /см. также [11]/. Однако их отношение остает-

ся степенной функцией от T

$$\rho_{i\ell}/n \sim T^{(2-d)/d}. \qquad /16/$$

ВТОРОЙ ЗВУК

С учетом /15/ линеаризованная система гидродинамических уравнений в переменных T, μ, n принимает вид

$$\rho_{i\ell}\dot{v}_\ell + S\nabla_i T + n\nabla_i \mu = 0, \qquad /17/$$

$$a\dot{T} + \beta\dot{\mu} + n\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad /18/$$

$$\gamma\dot{T} + a\dot{\mu} + S\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0, \qquad /19/$$

где $a = \left(\frac{\partial n}{\partial T}\right)_\mu = \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_T$, $\beta = \left(\frac{\partial n}{\partial \mu}\right)_T$, $\gamma = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\mu$.

Комбинируя уравнения /18/ и /19/ и учитывая, что в этих переменных теплоемкость единицы объема $C_v = T(\gamma - a^2/\beta)$, получаем вместо /19/

$$C_v\dot{T} + TS\left(1 - \frac{a}{\beta}\frac{n}{S}\right)\mathrm{div}\,\vec{v} = 0. \qquad /20/$$

Дальнейшее рассмотрение зависит от того, сохраняется ли число квазичастиц или нет. Если число дефектонов не сохраняется, то уравнение непрерывности для числа квазичастиц /18/ следует опустить, а в /17/ и /19/ положить $\mu = 0$. Таким образом получаем систему из двух уравнений:

$$\rho_{i\ell}\dot{v}_\ell + S\nabla_i T = 0, \qquad /21/$$

$$C_v\dot{T} + TS\,\mathrm{div}\,\vec{v} = 0,$$

совпадающую формально с уравнениями, полученными в [12] для фононного газа в диэлектрике. Из /21/ следует закон дисперсии второго звука

$$\omega^2(\vec{q}) = \frac{TS^2}{C_v}\rho^{-1}_{i\ell} q_i q_\ell. \qquad /22/$$

Если число квазичастиц сохраняется, то решение полной системы из трех уравнений /17,18,20/ приводит к закону дисперсии

$$\omega^2(\vec{q}) = \frac{TS^2}{C_v}\left\{\left(1 - \frac{a}{\beta}\frac{n}{S}\right)^2 + \frac{C_v}{T\beta}\frac{n^2}{S^2}\right\}\rho^{-1}_{i\ell} q_i q_\ell. \qquad /23/$$

Это выражение выглядит проще в переменных (T, n):

$$\omega^2(\vec{q}) = \{ \frac{T}{C_v} (\frac{\partial s}{\partial v_0})_T^2 - (\frac{\partial \mu}{\partial v_0})_T \} \rho^{-1}_{i\ell} q_i q_\ell , \qquad /24/$$

где $s = S/n$ и $v_0 = n^{-1}$ - энтропия и объем на одну квазичастицу.

Наконец, предполагая уравнение состояния известным и используя соотношения Максвелла

$$(\frac{\partial s}{\partial v_0})_T = (\frac{\partial P}{\partial T})_{v_0} , \quad (\frac{\partial \mu}{\partial v_0})_T = v_0 (\frac{\partial P}{\partial v_0})_T = v_0 \{ (\frac{\partial P}{\partial v_0})_s + \frac{T}{c_v} (\frac{\partial P}{\partial T})^2_{v_0} \},$$

где $c_v = C_v/n$ - теплоемкость на одну квазичастицу, получаем

$$\omega^2(\vec{q}) = (\frac{\partial P}{\partial n})_s n \rho^{-1}_{i\ell} q_i q_\ell . \qquad /25/$$

Этот же результат можно получить непосредственно из гидродинамической системы /12/, /14/, /17/, записанной в переменных n, s, $\vec{v}$. При этом, однако, не сразу виден предельный переход к фононному газу.

Из закона дисперсии /25/ видно, что скорость второго звука совпадает по форме со скоростью звука в обычном газе только в случае квадратичного закона дисперсии, когда $\rho_{i\ell} = n \delta_{i\ell}$.

БОЛЬЦМАНОВСКИЙ ГАЗ

Будучи точными для бозе-газа, полученные результаты справедливы и в предельном случае больцмановской статистики. В этом случае $\Omega = -T \int \ln(1 + n_{\vec{k}}) d\tau_{\vec{k}} = -Tn$, и уравнение состояния принимает вид $P = nT$.

Поскольку

$$(\frac{\partial P}{\partial n})_s = \frac{c_p}{c_v} (\frac{\partial P}{\partial n})_T = \frac{c_p}{c_v} T,$$

то для скорости второго звука имеем

$$c^2 = Tn/\rho$$

или, учитывая /16/:

$$c \sim T^{1-1/d} . \qquad /26/$$

Таким образом, зависимость скорости второго звука от температуры - степенная, даже в случае активационного /щелевого/ закона дисперсии.

В заключение автор выражает глубокую благодарность А.Ф.Андрееву за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.Ф., Лифшиц И.М. ЖЭТФ, 1969, 56, с.2057.
2. Пушкаров Д.И. ЖЭТФ, 1970, 59, с.1755.
3. Пушкаров Д.И. Письма в ЖЭТФ, 1974, 19, с.751.
4. Пушкаров Д.И. ФНТ, 1975, 1, с.581.
5. Михеев В.А. и др. ФНТ, 1977, 3, с.386.
6. Григорьев В.Н., Есельсон Б.Н., Михеев В.А. ФНТ, 1975, 1, с.5.
7. Pushkarov D.I. phys.stat.sol.(b), 1977, 80, p.295.
8. Пушкаров Д.И. Квантовая теория дефектов в кристаллах при низких температурах. Автореферат канд.дисс. МГУ, 1972.
9. Saslow W.M. Phys.Rev., 1977, B15, p.173.
10. Liu M. Phys.Rev., 1978, B18, p.1165.
11. Пушкаров Д.И. Письма в ЖЭТФ, 1978, 27, с.359.
12. Гуревич В.Л., Эфрос А.Л. ЖЭТФ, 1966, 51, с.1693.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 марта 1985 года.

СООБЩЕНИЯ, КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ, ПРЕПРИНТЫ И СБОРНИКИ ТРУДОВ КОНФЕРЕНЦИЙ, ИЗДАВАЕМЫЕ ОБЪЕДИНЕННЫМ ИНСТИТУТОМ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ, ЯВЛЯЮТСЯ ОФИЦИАЛЬНЫМИ ПУБЛИКАЦИЯМИ.

Ссылки на СООБЩЕНИЯ и ПРЕПРИНТЫ ОИЯИ должны содержать следующие элементы:

- фамилии и инициалы авторов,
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс публикации,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы /при необходимости/.

Пример:

1. *Первушин В.Н. и др. ОИЯИ, Р2-84-649, Дубна, 1984.*

Ссылки на конкретную СТАТЬЮ, помещенную в сборнике, должны содержать:

- фамилии и инициалы авторов,
- заглавие сборника, перед которым приводятся сокращенные слова: "В кн."
- сокращенное название Института /ОИЯИ/ и индекс издания,
- место издания /Дубна/,
- год издания,
- номер страницы.

Пример:

Колпаков И.Ф. В кн. XI Международный симпозиум по ядерной электронике, ОИЯИ, Д13-84-53, Дубна, 1984, с.26.

Савин И.А., Смирнов Г.И. В сб."Краткие сообщения ОИЯИ", № 2-84, Дубна,1984,с.3.

Пушкаров Д.И. P17-85-224

Дефектонный второй звук в квантовых кристаллах

Получена гидродинамическая система уравнений для дефектонного газа в квантовых кристаллах в бездиссипативном случае. Показана возможность распространения волн типа второго звука и получен их закон дисперсии. Результаты выражены через термодинамические функции дефектонного газа, но в принципе приложимы и к другим газам из квазичастиц в диэлектриках.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1985

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Pushkarov D.I. P17-85-224

Defecton Second Sound in Quantum Crystals

Hydrodynamic set of equations for defecton gas in quantum crystals is deduced. The possibility of second-sound type wave propagation is considered, and the second-sound dispersion law is obtained. The results are expressed by means of the thermodynamic functions of the defection gas, but may be applied also to other quasiparticle gases in dielectrics.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1985