объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-84-663

И.Г.Гочев

БИОНЫ И КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ГЕЙЗЕНБЕРГОВСКОЙ ЦЕПОЧКИ СПИНОВ $s = 1/2$

Направлено в "Журнал экспериментальной и теоретической физики"

1984

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании динамики ферромагнетиков часто используются феноменологические уравнения движения магнитного момента /уравнения Ландау-Лифшица/ [1-3]:

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} = [\frac{\delta W}{\delta \vec{M}} \vec{M}], \quad |\vec{M}(\vec{r},t)| = M_0 = \text{const}. \qquad /1/$$

Здесь W - функционал энергии рассматриваемой системы.

В квантовой теории уравнения движения для операторов спина $\hat{S}^a_m$ в гейзенберговском представлении записываются в виде /$\hbar = 1$/:

$$\frac{\partial \hat{S}^a_m}{\partial t} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{S}^a_m], \quad a = x, y, z. \qquad /2/$$

Формально заменяя в гамильтониане $\mathcal{H}$ и уравнениях /2/ операторы $\hat{\vec{S}}_m$ векторами $\vec{S}_m$ фиксированной длины s, в континуальном пределе можно получить функционал W и уравнения /2/ (в этом пределе дискретное распределение спинов заменяется векторным полем $\vec{M}(\vec{r},t)$)[3]. Более последовательно следует считать, что уравнения /1/ получены при подходящем усреднении операторных уравнений /2/. В монографии [2] приведены соображения, касающиеся вывода уравнений Ландау-Лифшица при помощи усреднения /2/ с матрицей плотности. Эти соображения не исключают возможности вывода соотношений /1/ с помощью другого типа усреднения /2/, по чистым квантовым состояниям. Для линеаризованных уравнений такая возможность по существу доказана и использована в [4,5]. Соответствующее состояние, по которому идет усреднение /2/, является когерентным состоянием* Глаубера [5]. В нем эволюция средних S^a_m описывается классической спиновой волной. Заметим также, что линеаризованные уравнения Ландау-Лифшица для одноосного ферромагнетика с обменной анизотропией точны при любом значении спина s.

В рамках феноменологической теории в последние годы проведено большое количество исследований нелинейных свойств ферромагнетиков [3,6,7,9,10]. Сравнение с точными квантовомеханически-

---

* В спин-волновом приближении гамильтониан квадратичен по бозонным операторам. Для них и следует писать уравнения движения.

ми результатами показало, в частности, что решения уравнений Ландау-Лифшица описывают ряд нетривиальных характеристик гейзенберговских спиновых цепочек [3]. Впечатляющим результатом является совпадение квазиклассических энергий солитонов с энергиями спиновых комплексов /связанных состояний магнонов/, доказанное сначала для изотропной цепочки [7], затем обобщенное на ряд анизотропных моделей спинов $s = 1/2$ [8]. Совпадают также плотности z -й компоненты спина в солитоне и комплексе [9,10]. Близки вклады двухмагнонных связанных состояний и солитонов в динамический формфактор одномерной системы спинов $s = 1$ [11].

Возникает предположение о том, что перечисленные факты совпадения являются следствием некоторой более полной связи феноменологических уравнений /1/ с микроскопической теорией /2/ в нелинейной области. Установление подобной связи, помимо обоснования соотношений /1/, решило бы и вопрос о солитонах в квантовых системах. Такую связь, как ясно из предыдущего, могут осуществить состояния, усреднение /2/ при помощи которых приводит к уравнениям Ландау-Лифшица.

Поскольку до настоящего времени в литературе отсутствует общий вывод соотношений /1/, то оправдано и решение более узкого вопроса о существовании и нахождении состояний $|\phi\rangle$, временная эволюция средних S^{α}_{m} и средняя энергия конкретной системы в которых описываются тем или иным характерным решением нелинейных уравнений Ландау-Лифшица.

В [10] нами найдена линейная комбинация $|\phi_0\rangle$ тяжелых спиновых комплексов $|\psi_n\rangle$

$$|\phi_0\rangle = a_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{k^2\sigma}{2}} \cdot |\psi_{N_0+k}\rangle, \quad N_0 \to \infty, \qquad /3/$$

которая является полным квантовым аналогом классической доменной стенки в цепочке с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = -\sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{1}{\operatorname{ch}\sigma}(S^x_m S^x_{m+1} + S^y_m S^y_{m+1}) + S^z_m S^z_{m+1}\right], \quad \sigma > 0, \quad J \equiv 1, \quad s = \frac{1}{2}. \qquad /4/$$

Средние значения $\langle\phi_0|\hat{S}^{\alpha}_m|\phi_0\rangle$ и энергия совпадают со значениями, следующими из статического решения уравнений /1/ /точнее, их дискретного аналога/. При этом выполняется тождество

$$\sum_{\alpha=x,y,z} (\langle\phi_0|S^{\alpha}_m|\phi_0\rangle)^2 = \frac{1}{4}, \qquad /5/$$

соответствующее, на наш взгляд, предположению феноменологического подхода /1/ о постоянной длине вектора $\vec{M}(\vec{r})$.

Состояние /3/ можно также представить [12] в виде прямого произведения одноузельных спиновых когерентных состояний

$$|\phi_0\rangle = \prod_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_m}{2} \\ \sin\frac{\theta_m}{2} \end{pmatrix}, \qquad /6/$$

где θ_m является решением нелинейного разностного уравнения $\frac{\partial W}{\partial \theta_m} = 0$. Своеобразие когерентного состояния $|\phi_0\rangle$ заключается в том, что оно стационарно. Впервые существование стационарного состояния неограниченной цепочки /4/ в форме /6/ для произвольного спина доказано в [13]. Стационарность $|\phi_0\rangle$ соответствует статическому характеру доменных стенок в рамках феноменологической теории возбуждений системы /4/.

Хорошо известны также солитонные решения уравнений /1/, зависящие от времени [3]. Временная эволюция солитонов обладает рядом особенностей, которые и привлекают в первую очередь внимание исследователей. Простейшие решения уравнений Ландау-Лифшица указанного типа описывают бион /солитон с внутренней прецессией/.

В настоящей работе квантовомеханически исследован бион, локализованный вблизи конца анизотропной цепочки /4/ спинов $s = 1/2$. Найдено когерентное состояние $|\phi(t)\rangle$, эволюция средних компонент спина и средняя энергия системы в котором описываются соответствующим решением уравнений Ландау-Лифшица. Состояние $|\phi(t)\rangle$ является нерасплывающимся пакетом спиновых комплексов.

1. СОСТОЯНИЕ $|\phi\rangle$ КАК ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ СПИНОВЫХ КОМПЛЕКСОВ

Решение уравнений /1/, описывающее локализованное вблизи конца цепочки /4/ нелинейное возбуждение, имеет следующий вид /$s = 1/2$/ [14]:

$$S^x_m = \frac{1}{2}\sin\theta_m \cos\omega t\,; \quad S^y_m = \frac{1}{2}\sin\theta_m \sin\omega t\,; \quad S^z_m = \frac{1}{2}\cos\theta_m\,;$$
$$\operatorname{tg}\frac{\theta_m}{2} = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch}(\sigma m \operatorname{th} a)}\,; \quad W = \frac{1}{2}\sigma \operatorname{th} a\,; \quad \omega = \frac{\sigma^2}{2\operatorname{ch}^2 a}\,; \qquad /7/$$
$$a \equiv \sigma N \geq 1, \quad \sigma \ll 1.$$

Здесь ω - частота внутренней прецессии биона; N - сохраняющееся значение суммарного S^z; a - параметр, характеризующий форму биона /или степень нелинейности/. В зависимости от значения a различают три области: $a \ll 1$ - область слабой нелинейности, в которой уравнения /1/ сводятся к нелинейному уравнению Шредингера; $a\approx 1$ - промежуточная область, и $a \gg 1$ - область сильной нелинейности. Предел $a\to\infty$ соответствует доменной стенке [10,14]. В данной работе мы не будем обсуждать случай слабой нелинейности. Кроме того, рассмотрение ведется в континуальном приближении, что предполагает слабую анизотропию взаимодействия, $\sigma \ll 1$ [8,10,14].

В квантовой картине выберем начальное состояние $|\phi\rangle$ в форме /6/, где углы θ_m взяты из решения /7/. Средние значения $\langle\phi|S_m^{\alpha}|\phi\rangle$ при этом совпадут со значениями S_m^{α} из /7/ в начальный момент времени $t=0$. Средняя энергия не зависит от времени и будет также равна энергии W. Нас интересует эволюция квантовомеханических средних $\langle\phi(t)|S_m^{\alpha}|\phi(t)\rangle$ с $|\phi(t)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t}|\phi\rangle$.

Установим, прежде всего, связь состояния $|\phi\rangle$ со стационарными состояниями системы /4/. В рассматриваемом здесь случае $\sigma \ll 1$ и $a \geq 1$ удается показать, что $|\phi\rangle$ можно представить как линейную комбинацию спиновых комплексов цепочки /4/. Для этого найдем разложение $|\phi\rangle$ с $\theta_m = 2\,\mathrm{arctg}(A/\mathrm{ch}\,Bm)$ по системе ортонормированных векторов следующего типа:

$$|\chi_n(B)\rangle = Z_n^{-1/2}(B)\sum_{\{m_i\}}(\mathrm{ch}\,Bm_1\ldots \mathrm{ch}\,Bm_n)^{-1}\cdot S_{m_1}^{-}\ldots S_{m_n}^{-}|0\rangle$$

$$\sum_{\{m_i\}}\ldots \equiv \sum_{0\leq m_1<m_2<\ldots<m_n}\ldots \qquad /8/$$

Заметим, что обратный квадрат нормировочной константы

$$Z_n(B) = \sum_{\{m_i\}}(\mathrm{ch}\,Bm_1\,\mathrm{ch}\,Bm_2\ldots \mathrm{ch}\,Bm_n)^{-2}$$

формально совпадает со статсуммой идеального газа фермионов с одночастичным спектром $E_m = \ln \mathrm{ch}^2 Bm$ при $T=1$.

Для матричного элемента $C_n = \langle\phi|\chi_n\rangle$ можно получить выражение

$$C_n = \frac{A^n\sqrt{Z_n(B)}}{\sqrt{Z(A^2,B)}}, \qquad /9/$$

где $Z(A^2,B) = \sum_{m=0}^{\infty}\cos^{-2}\frac{\theta_m}{2} = \prod_{m=0}^{\infty}\left(1+\frac{A^2}{\mathrm{ch}^2 Bm}\right)$ - не что иное, как статсумма того же газа в рамках большого канонического ансамбля /A^2 - активность/. Известно, что статсуммы Z_n и Z связаны соотношением: $Z(A^2,B) = \sum_{n=0}^{\infty}A^{2n}Z_n(B)$. Отсюда следует, что $\sum_{n=0}^{\infty}C_n^2 = 1$, т.е. состояние $|\phi\rangle$ разлагается только по системе векторов $|\chi_n\rangle$ /очевидно, $|\chi_n\rangle$ не образуют сами по себе полного набора/. Таким образом, имеем точное равенство

$$|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}C_n|\chi_n\rangle. \qquad /10/$$

Состояние $|\chi_n\rangle$ локализовано вблизи конца цепочки. В общем случае это состояние с n перевернутыми спинами не является стационарным для системы /4/. При $n\to\infty$ из /8/ следует

$$|\chi_n(B)\rangle = \tilde{A}_n\sum_{\{m_i\}}e^{-B(m_1+m_2+\ldots+m_n)}S_{m_1}^{-}S_{m_2}^{-}\ldots S_{m_n}^{-}|0\rangle.$$

Как показано в [10], в такой форме можно записать и вектор $|\psi_n\rangle$ спинового комплекса, локализованного вблизи конца цепочки /4/ /в том же предельном случае $n\to\infty$ и $B=\sigma$/. Следовательно, при $n\to\infty$ и $B=\sigma$ имеем $|\chi_n\rangle = |\psi_n\rangle$ и $|\phi\rangle$ является линейной комбинацией /3/ спиновых комплексов. Оказывается, что и при конечном n в цепочке /4/ со слабой анизотропией состояние $|\chi_n\rangle$ с $B=\sigma\,\mathrm{th}\,a$ близко к состоянию $|\psi_n\rangle$. Для доказательства последнего достаточно вычислить среднюю энергию* $\bar{E}_n = \langle\chi_n|\mathcal{H}|\chi_n\rangle$. Из соотношений /9/ и /10/ получаем:

$$W(A^2,B,\sigma) \equiv \langle\phi|\mathcal{H}|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{2n}\cdot Z_n(B)\cdot \bar{E}_n(B,\sigma)}{Z(A^2,B)}. \qquad /11/$$

Рассматривая функции $W(A^2)$, $Z(A^2)$ и A^{2n} как функции комплексной переменной $\lambda(A^2\to\lambda)$ и используя теорему Коши, можно записать:

$$Z_n(B) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_1}\frac{Z(\lambda,B)}{\lambda^{n+1}}d\lambda,$$

$$\bar{E}_n(B) = \frac{1}{Z_n(B)}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_2}\frac{Z(\lambda,B)\cdot W(\lambda,B,\sigma)}{\lambda^{n+1}}d\lambda, \qquad /12/$$

---

*При конечных n доказательство приведенного утверждения путем прямого сравнения векторов $|\chi_n\rangle$ и $|\psi_n\rangle$ затруднительно.

где L_i - замкнутые вокруг точки $\lambda = 0$ контуры в комплексной плоскости. Первое из равенств /12/ есть известное определение статсуммы Z_n через статсумму газа в большом ансамбле.

При малых σ интегралы в /12/ можно вычислить методом перевала, выбирая контуры L_i в виде окружности $\lambda = r_0 e^{i\varphi}$. Уравнение для седловой точки r_0 имеет вид ($r_0 = \mathrm{sh}^2 y_0$):

$$\sigma n = \frac{y_0 \,\mathrm{th}\, y_0}{\mathrm{th}\, a} + \frac{\sigma}{2}\mathrm{th}^2 y_0 + O(\sigma^3). \qquad /13/$$

При таком вычислении выражения для $Z_n(B)$ и $\bar{E}_n$ получаются в виде разложения по степеням σ. Как видно из дальнейшего, для наших целей достаточно найти $\bar{E}_n$ с точностью до членов порядка σ^2 включительно. Функция $W(\lambda, B, \sigma)$ получается из гамильтониана $\mathcal{H}$ заменой операторов $\hat{\vec{S}}_m$ на классические векторы длины 1/2. С помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена в нужном приближении W удается записать в виде

$$W(\lambda, B, \sigma) = \frac{B\lambda}{2}\int_0^\infty d\xi \frac{(\mathrm{th}^2\xi + B^{-2}\sigma^2)\,\mathrm{ch}^2\xi}{(\lambda + \mathrm{ch}^2\xi)^2} + O(\sigma^3).$$

Выполнив указанные расчеты, приходим к следующему выражению для средней энергии:

$$\bar{E}_n = \frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{th}\,\sigma n + \frac{B^2}{2}[f(2a) + (n-N)^2 \cdot \sigma f_1(a)] + O(\sigma^3),$$

$$f(a) = \frac{a\,\mathrm{ch}\, a - \mathrm{sh}\, a}{(a + \mathrm{sh}\, a)\,\mathrm{sh}^2 a}, \quad f_1(a) = \frac{r(1 - r + 2r^2 \mathrm{sh}^2 a)}{2a(1+r)^2 \mathrm{sh}^2 a}, \quad r \equiv \frac{2a}{\mathrm{sh}\, 2a}. \qquad /14/$$

С помощью аналогичных вычислений можно найти и коэффициенты C_n. Оставляя лишь множители, зависящие от n, результат можно записать так:

$$C_n \sim \left(\frac{\mathrm{sh}\, a}{\mathrm{sh}\, y_0}\right)^n \left[\left(1 + \frac{2y_0}{\mathrm{sh}\, 2y_0}\right)\mathrm{th}^2 y_0\right]^{-1/4} \cdot \exp\left(\frac{y_0^2}{2B}\right).$$

Если не интересоваться слабой зависимостью от n множителя в квадратных скобках и несущественной сдвижкой в показателе экспоненты, из решения уравнения /13/ получаем следующее простое выражение для C_k ($k \equiv n - N$):

$$C_k \sim \exp\left\{-\frac{\sigma k^2}{2} f_2(a)\right\}, \quad f_2(a) = \frac{(1+2r)\,\mathrm{cth}\, a}{(1+r)^2}. \qquad /15/$$

Из последнего результата видно, что ширина распределения C_k - порядка $\sigma^{-1/2}$. Функция $f_2(a)$ монотонная, $f_2(\infty) = 1$, $f_2(1) \approx 1{,}15$. Таким образом, в области $a \geq 1$ ширина пакета /10/ слабо уменьшается с уменьшением a.

Используя /14/ и /15/, можно видеть, насколько близко состояние $|\chi_n>$ к состоянию спинового комплекса $|\psi_n>$.

Комплекс $|\psi_n>$, локализованный вблизи конца цепочки /4/, является основным состоянием в подпространстве n-частичных состояний гамильтониана $\mathcal{H}$. Точное решение для волновой функции $|\psi_n>$ и энергии $\mathcal{E}_n$ найдено в /15/. При малых σ и $n\sigma \geq 1$ выражение для $\mathcal{E}_n$ принимает вид:

$$\mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{th}\,\sigma n + O(\sigma^3). \qquad /16/$$

Щель в спектре n-частичных состояний системы /4/ равна*
$\Delta_n = \mathcal{E}_{n-1} + \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_n = \frac{1}{2}\sigma^2\,\mathrm{th}^2\sigma n + O(\sigma^3)$.

Видно, что при $n\sigma \geq 1$ Δ_n - порядка σ^2. При $n - N \leq \sigma^{-1/4}$ имеем**
$\Delta_n = \frac{B^2}{2} + O(\sigma^3)$ /напоминаем, что $B = \sigma\,\mathrm{th}\,\sigma N$/.

Запишем в общем виде разложение $|\chi_n>$ по стационарным состояниям гамильтониана /4/: $|\chi_n> = a_{n,0}|\psi_n> + \sum_\nu a_{n,\nu}|\psi_{n,\nu}>$, $|\psi_{n,\nu}>$ - возбужденные состояния в n-частичном секторе.

Средняя энергия $\bar{E}_n$ при этом равна

$$\bar{E}_n = \frac{1}{2}\sigma\,\mathrm{th}\,\sigma n + \sum_\nu |a_{n,\nu}|^2(\mathcal{E}_{n,\nu} - \mathcal{E}_n). \qquad /17/$$

Учитывая, что $\mathcal{E}_{n,\nu} - \mathcal{E}_n \geq \Delta_n = \frac{B^2}{2} + O(\sigma^3)$, из сравнения /14/ и /17/ для $n - N \leq \sigma^{-1/4}$ получаем: $\sum_\nu |a_{n,\nu}|^2 \leq [f(2a) + (n-N)^2\sigma f_1(a)]$.

В случаях, когда правая часть этого неравенства мала, $|\chi_n>$ близко к состоянию $|\psi_n>$. Можно получить оценку сразу для общего вклада возбужденных состояний $|\psi_{n,\nu}>$ в разложении $|\phi>$. Записывая $|\phi> = \sum_n C_n a_{n,0}|\psi_n> + \sum_{n,\nu} C_n a_{n,\nu}|\psi_{n,\nu}>$ и проводя несложное вычисление, получаем: $\sum_{n,\nu} C_n^2|a_{n,\nu}|^2 \leq v(a) \equiv f(2a) + \frac{f_1(a)}{2f_2(a)}$. Функции f, f_1 и f_2 определены в /14/ и /15/.

---

*При вычислении Δ_n достаточно учесть, что первые возбужденные состояния описывают рассеяние магнона с энергией $\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}\sigma^2 + O(\sigma^3)$ на $n-1$-частичный спиновый комплекс.

** Максимальные $n-N$, для которых проводится анализ, определяются распределением C_k /см. /15//.

В случаях, когда выполнено условие

$$v(a) \equiv f(2a) + \frac{f_1(a)}{2f_2(a)} \ll 1 , \qquad /18/$$

имеет место равенство

$$|\phi> = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |\psi_n> . \qquad /19/$$

При $a \gg 1$ $v(a)$ экспоненциально мало ($v \sim ae^{-2a}$) в пределе $a \to \infty$ имеем $v(a) \to 0$, и равенство /19/ является точным. Исследование функции $v(a)$ показывает, что условие /18/ выполнено практически при всех $a \geq 1$. Функция $v(a)$ монотонная, $v_{max} = v(0) = 1/3$, при этом $v(1) \approx 0,100$; $v(2) \approx 0,005$. Отсюда можно заключить, что во всей области $a \geq 1$ $|\phi>$ разлагается только по спиновым комплексам. Более точно следует сказать, что поправки к разложению /19/ малы как в меру малости σ, так и малости численной функции $v(a)$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНИХ $<\phi(t)|\hat{S}^{\alpha}_{m}|\phi(t)>$

Используя результаты /15/ и /19/, легко найти состояние $|\phi(t)> = e^{-i\mathcal{H}t}|\phi>$. Действительно, при $k \leq \sigma^{-1/2}$ и $\sigma \ll 1$ энергию спинового комплекса из $N+k$ магнонов, как следует из /16/, можно записать в виде

$$\mathcal{E}_{N+k} \approx \mathcal{E}_N + k\omega , \qquad /20/$$

где ω совпадает с частотой прецессии классических векторов $\vec{S}_m$ /см. /7//. Отсюда следует, что

$$|\phi(t)> = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-i\omega kt} |\psi_{N+k}> . \qquad /21/$$

Нетрудно найти и другую форму состояния $|\phi(t)>$:

$$\phi(t) = \prod_{m=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_m}{2} \cdot e^{i\omega t} \\ \sin\frac{\theta_m}{2} \cdot e^{-i\omega t} \end{pmatrix} . \qquad /22/$$

Очевидно, что средние значения операторов $\hat{S}^{\alpha}_{m}$ в этом состоянии совпадают со значениями S^{α}_{m}, следующими из бионного решения /7/ уравнений Ландау-Лифшица: $<\phi(t)|\hat{S}^{\alpha}_{m}|\phi(t)> = S^{\alpha}_{m,\text{бион}}$.

3. СВОЙСТВА СОСТОЯНИЯ $|\phi(t)>$ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим основные свойства $|\phi(t)>$. Это нестационарное состояние для системы /4/, сохраняющее свой функциональный вид /22/ во времени. Оно является прямым произведением одноузельных спиновых /или блоховских/ когерентных состояний, свойства которых подробно изучены в работах [16]. Из этих свойств и из вида /22/ следует, что $|\phi(t)>$ при всех временах минимизирует произведения неопределенностей и факторизует корреляционные функции:

$$\overline{\hat{S}^{\alpha_1}_{m_1} \hat{S}^{\alpha_2}_{m_2}} = \overline{\hat{S}^{\alpha_1}_{m_1}} \cdot \overline{\hat{S}^{\alpha_2}_{m_2}} , \quad m_1 \neq m_2 .$$

Усреднение операторных уравнений /2/ при помощи $|\phi>$ приводит к феноменологическим уравнениям Ландау-Лифшица. Следовательно, нами построено когерентное состояние для системы /4/, которое устанавливает связь квантовой теории с решением /7/ уравнений /1/. Состояние $|\phi(t)>$ дает полное описание биона, локализованного вблизи конца квантовой спиновой цепочки /4/.

В рассмотренном здесь случае $s = 1/2$ имеется предел $a \to \infty$, в котором $v(a) = 0$, и уравнения Ландау-Лифшица точны в строгом смысле этого слова. Следует подчеркнуть отличие этого предела от обсуждаемого в [17] классического предела $\hbar \to 0$, $s \to \infty$. Любопытна, на наш взгляд, доказанная здесь возможность описания эволюции квантовомеханических средних S^{α}_{m} в цепочке спинов $s = 1/2$ феноменологическими уравнениями практически при всех $a \geq 1$. Не исключено, что такая возможность обусловлена полной интегрируемостью* системы /4/ как в квантовом [18], так и в классическом [19] случаях. Так или иначе, вопрос о нерасплывающихся пакетах со свойствами состояния $|\phi(t)>$/это и есть вопрос о когерентных состояниях/ важен для всех квантовых систем. Полностью этот вопрос решен только для квадратичных по бозе- или ферми-операторам гамильтонианов. Поиск таких пакетов в более сложных ситуациях даже в последнее время ведется почти исключительно в системах с несколькими степенями свободы [20].

Следует ожидать, что в модели /4/ при произвольном s функция $v(a)$ в /18/ будет содержать дополнительный множитель типа $(2s)^{-1}$, который в пределе $s \to \infty$ обратит правую часть неравенства /18/ в нуль. Для анализа при $s > 1/2$ предложенным здесь способом необходимо явное решение задачи о спиновом комплексе, которое для цепочки /4/ известно только в случае $s = 1/2$ [15]. При других

---

*Обратим все-таки внимание на то, что в [18,19] полная интегрируемость доказана для систем с периодическими граничными условиями. Здесь мы исследуем полуограниченную цепочку.

в полезной для указанной цели может оказаться точно решаемая обобщенная модель ферромагнетика[21].

Состояние $|\phi(t)\rangle$, как видно из /15/ и /19/, есть линейная комбинация спиновых комплексов* $|\psi_n\rangle$. На связь комплексов с солитонными решениями уравнений /1/ указывалось неоднократно в литературе[3,7-11,14]. Во введении приведены основные результаты, подтверждающие такую связь. Здесь следует пояснить, как эти результаты согласуются с тем фактом, что $|\phi(t)\rangle$ является пакетом комплексов, а не просто отдельным комплексом. Поскольку спектр /20/ связанных состояний эквидистантен и распределение /15/ C_k симметрично, средняя энергия пакета $\bar{E}(\bar{N})$ / $\bar{N}$ - среднее число магнонов/ совпадает с энергией комплекса $\mathcal{E}_n$ $(n \leftrightarrow N, \mathcal{E} \leftrightarrow \bar{E})$. Совпадение плотностей S_m^z в $|\phi\rangle$ и $|\psi_n\rangle$ легче понять в рамках статмеханической задачи, с которой делалось сопоставление на протяжении всего анализа. Равенство чисел заполнения газа для канонического и большого канонического ансамблей соответствует равенству средних S_m^z в обоих состояниях.

Другое важное свойство /5/, однако, является специфическим для $|\phi(t)\rangle$. Условие /5/ показывает, что средние значения S_m^α в любом узле m определяют вектор фиксированной длины 1/2 и, как уже отмечалось в наших работах[10,12], оно не может быть выполнено для отдельного комплекса $|\psi_n\rangle$ в принципе. Можно ожидать, что и в других случаях когерентные состояния будут обладать как указанными выше характеристиками отдельного комплекса, так и специфическими свойствами типа свойства /5/.

Наши результаты неприменимы в области слабой нелинейности. Особенности спектра комплексов и щели Δ при $a \ll 1$ требуют другого типа анализа. Не исключено, что $|\phi(t)\rangle$ в форме /22/ будет описывать бион и в этой области, но в разложении /19/, наряду с комплексами $|\psi_n\rangle$, полноправно могли бы участвовать и состояния непрерывного спектра.

Резюмируя, можно сказать, что при помощи решения /7/ уравнений Ландау-Лифшица и точного спектра спиновых комплексов /20/ квантовомеханически изучен бион, локализованный вблизи конца цепочки /4/. Мы надеемся, что наш метод применим и в более сложных задачах о движущемся солитоне и о столкновении двух солитонов в неограниченных системах.

Автор глубоко признателен А.М.Косевичу и А.М.Переломову за обсуждение результатов настоящей работы.

---

*Для сравнения напомним, что глуберовское когерентное состояние, устанавливающее связь микроскопической теории с классической спиновой волной, является линейной комбинацией спинволновых состояний гамильтониана[6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика. "Наука", М., 1978, ч. 2, гл. VII.
2. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. "Наука", М., 1967, гл. II.
3. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. "Наукова думка", Киев, 1983.
4. Цукерник В.М. ФТТ, 1968, 10, с. 1006.
5. Zagury N., Rezende S.M. Phys.Rev., 1971, B4, p. 201.
6. Елеонский В.М., Кирова Н.Н., Кулагин Н.Е. ЖЭТФ, 1980, 79, с. 321; Дзялошинский И.Е., Иванов Б.А. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 592; Барьяхтар В.Г., Иванов Б.А., Сукстанский А.Л. ЖЭТФ, 1980, 78, с. 1509.
7. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. ФНТ, 1977, 3, с.906.
8. Schneider T. Phys.Rev., 1981, B24, p. 5327; Иванов Б.А. ФНТ, 1977, 3, с. 1036; Gochev I.G. Phys.Lett., 1982, A89, p. 31; Бабич И.М., Косевич А.М. ЖЭТФ, 1982, 82, с. 1277.
9. Косевич А.М., Иванов Б.А. ЖЭТФ, 1977, 72, с. 2000.
10. Гочев И.Г. ЖЭТФ, 1983, 85, с. 199.
11. Dzub I.P. Zerov Yu.E. Phys.Lett., 1983, A99, p. 350.
12. Gochev I.G. Phys.Lett., 1984, A104, p. 36.
13. Покровский В.Л., Хохлачев С.Б. Письма в ЖЭТФ, 1975, 22, с. 371.
14. Гочев И.Г. ФНТ, 1984, 10, с. 615.
15. Гочев И.Г. Письма в ЖЭТФ, 1977, 26, с. 136.
16. Переломов А.М. УФН, 1977, 123, с. 23; Radcliff J.M. J.Phys., 1971, A4, p. 313; Perelomov A.M. Comm.Math.Phys., 1972, 26, p. 222.
17. Sinitsyn Yu.A., Tsukernik V.M. Phys.Lett., 1982, A90, p. 339; Заславский О.Б. УФЖ, 1984, 29, с. 419.
18. Kulish P.P., Sklyanin E.K. Phys.Lett., 1979, A79, p. 461.
19. Боровик А.Е., Кулинич С.И. Письма в ЖЭТФ, 1984, 39, с. 320; Sklyanin E.K. Preprint LOMI, E-3, Leningrad, 1979.
20. Gutschick V.P., Nieto M.M. Phys.Rev., 1980, D22, p. 403.
21. Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А. ЯФ, 1980, 32, с. 581; Кулиш П.П., Решетихин Н.Ю. ЖЭТФ, 1981, 80, с. 214.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 октября 1984 года.

Гочев И.Г. Р17-84-663

Бионы и когерентные состояния для гейзенберговской цепочки спинов $s = 1/2$

Квантовомеханическим путем исследован бион /солитон с внутренней прецессией/, локализованный вблизи конца анизотропной цепочки спинов $s = 1/2$. Найдено когерентное состояние $|\phi(t)\rangle$, эволюция средних компонент спина S^{a}_{m} и средняя энергия системы в котором описываются решением уравнений Ландау-Лифшица. Состояние $|\phi(t)\rangle$ является нерасплывающимся пакетом спиновых комплексов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Gochev I.G. P17-84-663

Bions and Coherent States for the Heisenberg Spin 1/2 Chain

Quantum-mechanical investigation of a bion, localized near the end of an anisotropic Heisenberg spin 1/2 chain is performed. A coherent state $|\phi(t)\rangle$ for this system is found. The time evolution of the mean values of the S^{a}_{m} and the mean energy in the state $|\phi(t)\rangle$ are described by the bion solution of the Landau-Lifshitz equation. The state $|\phi(t)\rangle$ is a stable spin complex packet.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984