объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-84-625

Ш.Шуян

ФЛУКТУАЦИИ В КОНФИГУРАЦИЯХ ЧИСТЫХ ФАЗ И ГЕТЕРОФАЗНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1984

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим двумерную ферромагнитную модель Изинга [1,2], гамильтониан которой можно записать в виде

$$H_0 = -J \sum_{t',t''\in Z^2,\ ||t'-t''||=1} \omega(t')\omega(t''); \ \omega(t) = \pm 1,\ J > 0.$$

Как хорошо известно, существует такая константа β_0, что для $\beta < \beta_0$ гамильтониан βH_0 допускает единственное трансляционно-инвариантное предельное распределение Гиббса /ПРГ/ P_β, а для $\beta > \beta_0$ существуют точно два экстремальных ПРГ P_β^+ и P_β^-, которые, как функции от β, образуют малые возмущения основных состояний $\psi^+ = \{\omega(t) \equiv 1\}$ и $\psi^- = \{\omega(t) \equiv -1\}$.

Поскольку P_β^+ и P_β^- - эргодические состояния, то имеет смысл говорить о типичных конфигурациях. Из оценок /см. §2.4 в [2] / вытекает, что при больших β конфигурация, типичная для P_β^+ (P_β^-), состоит из "моря" плюсов /минусов/ с "островками" минусов /плюсов/. Важным для наших рассуждений оказывается тот факт, что фазовый переход /т.е. неоднозначность ПРГ; однако см. также замечание ниже/ проявляется уже на уровне математических ожиданий. На самом деле,

$$P_\beta^+[\omega(0) = -1] < \frac{1}{2}; \quad P_\beta^-[\omega(0) = -1] > \frac{1}{2}. \qquad /1.1/$$

Пусть $A \subset Z^2$ - большой конечный объем. Обозначим $\varphi_A = \{\omega(t); t \in A\}$ конфигурацию, полученную в результате наблюдения в области A. Если через $||E||$ обозначить число элементов конечного множества E, то целью настоящей работы /если ограничиться только что описанным примером/ является объяснение события

$$P_\beta^-[\omega(0) = 1] < ||A||^{-1}\, ||\{t \subset A: \omega_A(t) = 1\}|| < P_\beta^+[\omega(0) = 1]. \qquad /1.2/$$

Итак, интересующий нас случай состоит в том, что конфигурация ω_A содержит больше плюсов, чем типично для P_β^- и, в то же самое время, меньше плюсов, чем ожидалось бы для конфигурации, типичной для P_β^+. Такое поведение можно объяснить двумя способами:

(I) ω_A является результатом случайных флуктуаций в конфигурации, типичной либо для P_β^+, либо для P_β^-.

(II) ω_A является типичной для гетерофазной системы.

Замечание. Остановимся более подробно на понятии гетерофазной системы. Для рассматриваемого примера двумерной модели Изинга формализм ПРГ исключает спонтанное нарушение Z^2-симметрии, поскольку при $\beta > \beta_0$ множество всех ПРГ для βH_0 состоит из всех выпуклых комбинаций экстремальных ПРГ P_β^+ и P_β^- [3]:

$$\{\alpha P_\beta^+ + (1-\alpha)P_\beta^-:\ 0 \le \alpha \le 1\}. \qquad /1.3/$$

Если считать фазовый переход спонтанным нарушением симметрии /см. с.263 в[4]/, то в двумерной модели не будет фазового перехода и, следовательно, гетерофазной системы /напомним, что в[4-6] гетерофазная система определяется как такая система, в которой возможно сосуществование фаз с разными группами симметрии/. Если $d \ge 3$, то существует бесконечное число ПРГ с пониженной симметрией[7]. Следовательно, сосуществование фаз с различными группами симметрии вполне возможно. Наконец, даже в двумерной модели нельзя исключить, что наблюдаемая конфигурация соответствует "смеси" Z^2-инвариантной чистой фазы и Z_2-инвариантной /хотя с точки зрения формализма ПРГ такое явление необходимо будет метастабильным/.

На основе предыдущего замечания мы уточним (II) в том смысле, что будем говорить о гетерофазных конфигурациях в том случае, если нам удалось отрицать объяснение (I). Это полностью соответствует общей интерпретации статистических решений, согласно которой принятые гипотезы (II) следует понимать только как решение об отрицании гипотезы (I).

В настоящей статье мы доказываем один результат о вероятностях больших уклонений для сумм случайных величин, образующих строго стационарное случайное поле на целочисленной решетке Z^d, удовлетворяющее условию равномерного перемешивания. Он позволит нам построить метод для принятия решения в пользу одной из указанных выше гипотез.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Всюду в статье буквами Z, N и R будем обозначать соответственно множества всех целых, натуральных и действительных чисел. Если $t = (t^1, \dots, t^d)$ и $u = (u^1, \dots, u^d) \in Z^d$, то $|t| = t^1 \dots t^d$, $t + u = (t^1 + u^1, \dots, t^d + u^d)$ и $t \circ u = (t^1u^1, \dots, t^du^d)$. Обозначение $t \to \infty$ /для $t \in Z^d$/ следует понимать как $\min t^i \to \infty$. /A1/-/A4/ обозначают условия, которым должны удовлетворять рассматриваемые нами случайные поля.

/A1/ S /пространство "спинов"/ - счетное дискретное топологическое пространство.

Пусть $X = (X_t;\ t \subset Z^d)$ - d-мерное случайное поле в каноническом представлении. Итак, случайные величины X_t считаются определенными на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где Ω - топологическое /в топологии прямого произведения/ пространство всех конфигураций $\omega: Z^d \to S$, $\mathcal{F}$ - σ-поле борелевских подмножеств $F \subset \Omega$ и P - вероятностная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Притом

$$X_t(\omega) = \omega(t);\ \omega \in \Omega,\ t \in Z^d. \qquad /2.1/$$

/A2/ $P[0 \le X_t \le 1] = 1$ для всех $t \in Z^d$.

Отметим в связи с /A2/, что важным является только свойство ограниченности S в обычной топологии R; границы 0 и 1 подобраны только с целью упрощения вычислений. Пусть

$$(S_t\omega)(u) = \omega(t + u);\ \omega \in \Omega;\ t, u \in Z^d. \qquad /2.2/$$

/A3/ X - строго стационарное, по отношению к группе $\mathcal{S} = \{S_t; t \in Z^d\}$, случайное поле, т.е. $PS_t = P$ для всех $t \in Z^d$.

Введем обозначение

$$m = \langle X_t \rangle_P = \int X_t(\omega)P(d\omega);\ t \in Z^d. \qquad /2.3/$$

Если $A \subset Z^d$, то обозначим через $\mathcal{F}(A) \subset \mathcal{F}$ σ-поле событий, зависящих только от координат $t \in A$, т.е. $\mathcal{F}(A) = \sigma\{X_t;\ t \in A\}$. Пусть

$$\mathfrak{A} = \{A \subset Z^d:\ 0 < ||A|| < \infty\}. \qquad /2.4/$$

Множество $C \subset \Omega$ назовем конечным цилиндром, если можно найти такие $A \subset \mathfrak{A}$ и $E \subset S^A$, что $C = \{\omega \subset \Omega: \omega_A \in E\}$, где $\omega_A = \omega|A$. Функцию $f: \Omega \to R$ назовем финитной, если существует такое $A \in \mathfrak{A}$, что $f(\omega) = f(\omega_A)$ для всех $\omega \subset \Omega$. Пусть $\{V_n;\ n \in N\} \subset \mathfrak{A}$ - любая такая последовательность, что $V_n \uparrow Z^d$ при $n \to \infty$.

/A4/ X удовлетворяет свойству равномерного перемешивания, т.е. существует такая функция $\phi: N \to R$, что $\phi(n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$, и для любого конечного цилиндра $A \in \mathcal{F}$ и любого конечного цилиндра $B \in \mathcal{F}(Z^d \smallsetminus V_n)$, $|P(A \cap B) - P(A)(B)| < \phi(n)P(B)$.

Ниже нам понадобится другое определение перемешивания. Для этой цели для любого $n \in N$ обозначим G_n множество всех $\mathcal{F}(Z^d \smallsetminus V_n)$-измеримых функций с $||g||_\infty \le 1$, где $||\cdot||_\infty$ - обычная $L_\infty(P)$-норма.

/A4'/ Для любой непрерывной функции f, которая является тоже финитной, выполнены неравенства

$$\sup|\langle fg \rangle_P - \langle f \rangle_P \langle g \rangle_P| < \phi(n),$$

$$g \in G_n,$$

где ϕ - функция из условия /A4/.

Лемма 1. Допустим, что выполнены условия /A1/-/A3/. Тогда условие /A4'/ равносильно условию /A4/.

На самом деле, из /A1/ следует, что Ω - вполне несвязное полное сепарабельное метрическое пространство. Следовательно, характеристические функции конечных цилиндров являются непрерывными финитными функциями. Поскольку мера P плотная /как и любая борелевская вероятность на таком пространстве[8]/, то доказательство сводится к применению стандартных аппроксимационных аргументов.

Если $u \in Z^d$ и $\min u^i \geq 1$, то u - я частная сумма случайных величин X_t - случайная величина:

$$Z_u = \Sigma\{X_t : t \in Z^d,\ 1 \leq t^i \leq u^i\ (1 \leq i \leq d)\}. \qquad /2.5/$$

Теорема 1. Пусть случайное поле X удовлетворяет условиям /A1/-/A4/. Для любых $a > 0$ и $\epsilon \in (0, a)$ можно найти такие $k(\epsilon, a) \in N$ и $t(\epsilon) \in Z^d$ $(\min t(\epsilon)^i \geq 1)$, что для всех $u \in Z^d$, для которых $\min u^i \geq 1$ и $|u|/|t(\epsilon)| \geq k(\epsilon, a)$, справедливы оценки

$$P[Z_u - |u| m \geq |u| a] \leq |t(\epsilon)| \exp\{-2|u|(a - \epsilon)^2/|t(\epsilon)|\}. \qquad /2.6/$$

Неравенства /2.6/ представляют собой d-мерное обобщение неравенств Бхаттачарии[9], но по сравнению с последними они оказываются менее удовлетворительными, поскольку константа k зависит тоже от a. От этой зависимости можно избавиться за счет небольшого усиления требований к a и ϵ.

Теорема 2. Пусть $\gamma_0 > 0$ - любое. Если $4a - \ln(1 + \gamma_0) > 0$ и $0 < \epsilon < a - (1/4)\ln(1 + \gamma_0)$, то константу $k(\epsilon, a)$ в теореме 1 можно подобрать зависящей только от ϵ и γ_0. Более того, оценки /2.6/ с такой константой k будут справедливы равномерно для всех $\gamma > \gamma_0$, если только для них выполнены указанные неравенства.

Доказательства теорем приведены в Приложении. В следующем разделе мы применим их к решению задачи, поставленной во введении. Для этой цели оказывается полезной следующая модификация теоремы 1. Доказательство /2.6/ основано /кроме предположений /A1/-/A4// на определенных свойствах случайных величин X, для которых $0 \leq X \leq 1$ почти наверное /см. /A.5/ и /A.6/ Приложения/. Несложным образом можно доказать и "двойственные" к /A.5/ и /A.6/ свойства, если $-1 \leq X \leq 0$ п.н. Тогда, если /A2/ заменить условием /A2'/ $P[-1 \leq X_t \leq 0] = 1$ для всех $t \in Z^d$, то вместо /2.6/ получаются неравенства

$$P[Z_u - |u| m \leq -|u| a] \leq |t(\epsilon)| \exp\{-2|u|(a - \epsilon)^2/|t(\epsilon)|\}, \qquad /2.7/$$

где теперь $a > 0$, $m \leq 0$.

3. КОНФИГУРАЦИИ ЧИСТЫХ ФАЗ И ГЕТЕРОФАЗНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ

Рассмотрим снова двумерную ферромагнитную модель Изинга. Если $\beta > \beta_0$, то ПРГ P^+_β и P^-_β являются даже мерами Бернулли /т.е. соответствующие случайные поля допускают изоморфные, в смысле теории вероятностей, модели в форме независимых и одинаково распределенных случайных величин[10]/. В частности, все условия, за исключением /A2/, выполняются. Если $A \uparrow Z^2$, $A \subset \mathfrak{A}$, и если объемы A являются достаточно регулярными, то из эргодичности меры P^+_β следует, что

$$P^+_\beta[\omega(0) = 1] = \lim \|A\|^{-1}\ \|\{t \in A : \omega(t) = 1\}\| \text{ - п.н.}; \qquad /3.1/$$

аналогичное утверждение верно и для P^-_β. Рассмотрим ситуацию /1.2/ для большого объема $A \in \mathfrak{A}$. Сначала исследуем случай

$$P^-_\beta[\omega(0) = 1] < \|A\|^{-1}\ \|\{t \subset A : \omega_A(t) = 1\}\|. \qquad /3.2/$$

Это неравенство утверждает, что в конфигурации ω_A больше плюсов, чем типично для P^-_β. Преобразуем спиновое пространство $S = \{-1, 1\}$ согласно правилам $-1 \to 0$, $1 \to 1$, причем сохраним корреляционную структуру меры P^-_β. Если преобразованные объекты обозначить $\tilde{\omega}_A$, $\tilde{m}$ и $(P^-_\beta)^\sim$, то свойства перемешивания у $(P^-_\beta)^\sim$ будут точно совпадать со свойствами у P^-_β, а новое математическое ожидание $\tilde{m}$ можно выразить формулой $\tilde{m} = (P^-_\beta)^\sim[\tilde{\omega}(0) = 1] = P^-_\beta[\omega(0) = 1]$. Следовательно, при подходящем выборе $a > 0$ событие /3.2/ преобразуется в событие

$$\|A\|^{-1} \sum_{t \in A} \tilde{\omega}_A(t) - \tilde{m} \geq a. \qquad /3.3/$$

Если объем A является достаточно большим и регулярным для того, чтобы содержать прямоугольные объемы, встречающиеся в теореме 1, то можно использовать неравенства /2.6/ для оценки вероятности события /3.3/.

Используя правила $-1 \to 0$, $1 \to -1$, мы получим $\tilde{\omega}_A$, $\tilde{m}$ (<0) и $(P^+_\beta)^\sim$, для которых можно воспользоваться неравенствами /2.7/. На самом деле, событие

$$\|A\|^{-1}\ \|\{t \in A : \omega_A(t) = 1\}\| < P^+_\beta[\omega(0) = 1] \qquad /3.4/$$

можно преобразовать в событие

$$\|A\|^{-1} \sum_{t \in A} \tilde{\omega}_A(t) - \tilde{m} \leq -a. \qquad /3.5/$$

Теперь допустим, что при фиксированных A и $\beta > \beta_0$ наблюдается большое количество $\omega^1_A, \dots, \omega^N_A$ конфигураций. Построим конфигурации $\bar{\omega}^i_A$, $1 \le i \le N$, и вычислим относительную частоту появления события /3.3/. Если она меньше вероятности события /3.3/, вычисленной согласно неравенствам /2.6/, то можно сделать вывод, что конфигурации ω^i_A, $1 \le i \le N$ соответствуют "чистой фазе" P^-_β. Точнее, те из конфигураций, которые приводят к /3.3/, можно считать результатами случайных флуктуаций в конфигурациях, типичных для P^-_β.

В противном случае останутся еще две возможности: либо конфигурации ω^i_A, $1 \le i \le N$ соответствуют /в только что описанном смысле/ второй чистой фазе P^+_β, либо они соответствуют гетерофазной системе. Этот вопрос можно решить аналогично при помощи события /3.5/.

Если результаты наблюдений приведут к отрицанию как P^-_β, так и P^+_β, то имеется сильное эмпирическое подтверждение гипотезы о том, что наблюдались конфигурации, типичные для гетерофазной системы.

4. СМЕЖНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВОПРОСЫ

В этом разделе мы приводим ряд заметок, относящихся к исследуемой проблеме.

А/ Если $||S|| < \infty$ и если ПРГ P единственно /например, P_β, $\beta \le \beta_0$ в двумерной модели Изинга/, то P удовлетворяет условию /А4/ /см. [11]/. Это утверждение останется справедливым и в намного более общих условиях /см. теорему 1, /2.5/ в [12]/.

Б/ В доказательстве основных результатов /см. Приложение/ мы, на самом деле, не используем условие /А4/, а только d-мерное обобщение условия Бхаттачарии [9]:

$$E_p[X_t|\sigma\{X_u : u^i \le 0,\ 1 \le i \le d\}] \qquad /4.1/$$

сходится при $t \to \infty$ к m почти равномерно по отношению к мере P, где символ $E_p[\cdot|\cdot]$ обозначает условное математическое ожидание.

Лемма 2. Пусть $||S|| < \infty$. Пусть гамильтониан определяется при помощи такого трансляционно-инвариантного потенциала на Z^d, что соответствующее ПРГ единственно. Тогда верно утверждение /4.1/.

Дадим набросок доказательства /которое, по существу, является только комбинацией ряда общеизвестных фактов/. Пусть $\mathcal{F}_\infty$ – σ-поле событий на бесконечности, т.е.

$$\mathcal{F}_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}(Z^d \setminus V_n),$$

напомним, что $\mathcal{F}_\infty$ не зависит от выбора последовательности $V_n \uparrow Z^d$. Любое ПРГ P определяется однозначно, с точностью до нулевых множеств, своими значениями на $\mathcal{F}_\infty$. Если ПРГ P является $\mathcal{S}$-инвариантным и единственным, то оно $\mathcal{S}$-эргодично. Следовательно, $\mathcal{F}_\infty$ – тривиальное по отношению к P σ-поле, поскольку $\mathcal{F}_\infty$ содержится /по модулю P-нулевых множеств/ в σ-поле инвариантных событий. С использованием теоремы о сходимости мартингалов мы получим сходимость п.н. в условии /4.1/. Из теоремы Егорова вытекает почти равномерная сходимость.

Итак, условие /4.1/ можно считать наиболее слабым условием перемешивания. Оно отличается от обычных условий /в том числе от /А4// тем, что оно выполняется только для одних проекций X_t /см. /2.1//, и ничего не говорит об убывании корреляций для функционалов от поля X.

В/ Основным преимуществом оценок /2.6/ и /2.7/ является то, что их справедливость не зависит от скорости сходимости $\phi(n) \downarrow 0$ в условии /А4/. В частности, они применимы и в таких случаях, как двумерная модель Изинга при критической температуре. Как известно, в этом случае убывание корреляций может быть сколь угодно медленным [13,14]; в работе Синая [2] это находит отражение в утверждении, что при критической температуре случайные величины X_t, $t \subset Z^d$ нельзя считать слабозависящими.

Г/ В случае мер P^+_β и P^-_β известно, что перемешивание имеет место даже с экспоненциальной скоростью [10]. На основании этого факта нетрудно проверить условия центральной предельной теоремы для этих ПРГ [15]. В частности, получаются оценки и для вероятностей "малых" уклонений типа $(Z_u - \langle Z_u\rangle_p)/\sqrt{(D^2_p(Z_u))} < a$, где $D^2_p(\cdot)$ обозначает дисперсию.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить А.С.Шумовского за весьма полезное объяснение многих вопросов, связанных с проблемами фазовых переходов и гетерофазных систем, а также В.А.Загребнова за обсуждение результатов настоящей работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Докажем прямо равномерную форму. Фиксируем $\gamma_0 > 0$, и возьмем любые такие $a > 0$ и ϵ, что $4a - \ln(1+\gamma_0) > 0$ и $0 < \epsilon \ge a - (1/4)\ln(1+\gamma_0)$. Пусть $t \in Z^d$. Поскольку X_t -проекция, то X_t – непрерывная финитная функция. Согласно /А2/, $||X_t||_\infty \le 1$. Пусть $n \in N$ достаточно большое для того, чтобы $\phi(n) < \epsilon$. Из /А3/ и /А4'/ можно вывести существование такого $t(\epsilon) \subseteq Z^d$ $(\min t(\epsilon)^i \ge 1)$, что для всех $u \subseteq Z^d$ $(u^i \le 0,\ 1 \le i \le d)$,

$$|\langle X_{t(\epsilon)} X_u\rangle_p - m^2| < \epsilon. \qquad /А.1/$$

Пусть $\nu^i \ge 1$, $1 \le i \le d$. Возьмем $u = \nu_0 t(\epsilon)$. Множество

$$\{y \in Z^d : 1 \le y^i \le \nu^i\ (1 \le i \le d)\}$$

содержит точно $|\nu|$ элементов, скажем $t_1, \dots, t_{|\nu|}$. Применим /А.1/

$|\nu|$ раз:

$$< \prod_{j=1}^{|\nu|} (1 + \gamma X_{t_j \circ t(\epsilon)})>_P \le (1 + \gamma m) < \prod_{j=2}^{|\nu|} (1 + \gamma X_{t_j \circ t(\epsilon)})>_P \le \dots \le$$

$$\le (1 + \gamma m)^{|\nu|} + \epsilon\{1 + (1 + \gamma m) + \dots + (1 + \gamma m)^{|\nu|-2}\} \le (1+\gamma m)^{|\nu|} + \epsilon(\gamma m)^{-1}[(1+\gamma m)^{|\nu|-2} - 1].$$

Здесь мы использовали /А3/, согласно которому /А.1/ зависит только от обычного расстояния в R^d между $t(\epsilon)$ и u, но не зависит от координат этих точек. Мы утверждаем, что существует такое $k(\epsilon, \gamma_0) \in N$, что для всех $\gamma > \gamma_0$ и $k \ge k(\epsilon, \gamma_0)$ справедливы неравенства

$$(1 + \gamma m)^k + \epsilon(\gamma m)^{-1}[(1 + \gamma m)^{k-2} - 1] \le [1 + \gamma(m + \epsilon)]^k. \qquad /A.2/$$

Положим

$$k(\epsilon, \gamma_0) = \mathrm{INT}\{\frac{1}{2} + [(8 + m\gamma_0^2\epsilon)/4m\gamma_0^3\epsilon]^{1/2}\} + 1, \qquad /A.3/$$

где $\mathrm{INT}\{\alpha\}$ = целая часть α. Если $k \ge k(\epsilon, \gamma_0)$, то $k^2 - k - 2/m\gamma_0^3\epsilon > 0$, следовательно,

$$m\binom{k}{2}\gamma_0^3\epsilon - 1 > 0. \qquad /A.4/$$

Умножим /А.4/ на положительное выражение $(1 + \gamma_0 m)^{k-2}$ и добавим положительное слагаемое

$$1 + \sum_{j=1,\, j\neq 2}^{k} \binom{k}{j}(1 + \gamma_0 m)^{k-j}\gamma_0^{j+1}\epsilon^{j-1}$$

к левой стороне полученного неравенства. Таким образом, получим

$$m \sum_{j=1,\, j\neq 2}^{k} \binom{k}{j}(1 + \gamma_0 m)^{k-j}\gamma_0^{j+1}\epsilon^{j-1} + 1 + (1 + \gamma_0 m)^{k-2}[m\binom{k}{2}\gamma_0^3\epsilon - 1] > 0.$$

Следовательно, $m \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j}(1 + \gamma_0 m)^{k-j}\gamma_0^{j+1}\epsilon^{j-1} > (1 + \gamma_0 m)^{k-2} - 1$.

Теперь умножим обе стороны последнего неравенства на положительное число $(m\gamma_0)^{-1}\epsilon$, и затем добавим к обеим сторонам выражение $(1 + \gamma_0 m)^k$. В итоге получим неравенство

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(1 + \gamma_0 m)^{k-j}(\gamma_0\epsilon)^j > (1 + \gamma_0 m)^k + \epsilon(\gamma_0 m)^{-1}[(1 + \gamma_0 m)^{k-2} - 1],$$

т.е. искомое неравенство /А.2/. Если $\gamma > \gamma_0$, то $(m^3\gamma\epsilon)^{-1} < (m\gamma_0^3\epsilon)^{-1}$. Итак, если $k \ge k(\epsilon, \gamma_0)$ /см. /А.3//, то для всех $\gamma \ge \gamma_0$ $k^2 - k - 2/m\gamma^3\epsilon > k^2 - k - 2/m\gamma_0^3\epsilon > 0$.

Теперь используем следующие элементарные утверждения из теории вероятностей:

$$P[X \ge 0] \le \langle e^{hX}\rangle_P \quad \text{для всех } h \ge 0, \qquad /A.5/$$

если $P[0 \le X \le 1] = 1$, то для всех $h \ge 0$

$$P[\exp(hX) < 1 + (e^h - 1)X] = 1. \qquad /A.6/$$

Тогда мы получим следующие неравенства:

$$P[Z_u - |u|m \ge |u|a] \le |t(\epsilon)|P[\sum_{j=1}^{|\nu|} X_{t_j \circ t(\epsilon)} - |\nu|(m + a) \ge 0] \le$$

$$\le |t(\epsilon)|\exp\{-|\nu|h(m + a)\} < \prod_{j=1}^{|\nu|} \exp(hX_{t_j \circ t(\epsilon)})>_P \le$$

$$< |t(\epsilon)|\exp\{-|\nu|h(m + a)\} \times < \prod_{j=1}^{|\nu|} [1 + (e^h - 1)X_{t_j \circ t(\epsilon)}]>_P.$$

Рассмотрим $h = 4(a - \epsilon)$ и напомним, что $u = \nu \circ t(\epsilon)$. Если $\gamma_0 = e^h - 1$ то $0 < \epsilon < a - (1/4)\ln(1 + \gamma_0)$ /это позволяет применить /А.1/ и $|u|/|t(\epsilon)| > k(\epsilon, \gamma_0)$ /это позволяет применить /А.2//. Следовательно,

$$P[Z_u - |u|m > |u|a] < |t(\epsilon)|\exp\{|\nu|[\ln(1 + (e^{4(a-\epsilon)} - 1))(m + \epsilon) -$$

$$- 4(a - \epsilon)(m + a)]\} < |t(\epsilon)|\exp\{-2|\nu|(a - \epsilon)^2\}.$$

Последнее неравенство доказано Хеффдингом[16]. Поскольку $u = \nu \circ t(\epsilon)$, доказательство полностью закончено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Peierls R. Proc.Cambridge Phil.Soc., 1936, 32, part 3, p.477.
2. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. "Наука", М., 1980.
3. Aizenman M. Comm.Math.Phys., 1980, 73, p.83.
4. Шумовский А.С., Юкалов В.И. Спонтанные нарушения симметрии и критические явления. Междунар.школа молодых ученых по физике высоких энергий. ОИЯИ, Д2,4-83-179, Дубна, 1983, с.223-313.
5. Юкалов В.И. ТМФ, 1976, 26, с.403; 28, с.92.
6. Шумовский А.С., Юкалов В.И. Physica A, 1982, 110, p.518.
7. Добрушин Р.Л. Теория вероятн. и ее прим., 1972, 17, с.619.
8. Биллингслей П. Сходимость вероятностных мер. "Наука", М., 1977.

9. Bhattacharya P.K. Sankhya, 1972, A34, part 1, p.9.
10. Georgii H.-O. On K-Systems and Bernoullicity in Statistical Mechanics. Lecture Notes in Math. Springer V., Berlin, Heidelberg, New York, 1976, vol.532, p.138-150.
11. Добрушин Р.Л., Минлос Р.А., Сухов Ю.М. Дополнение к книге Рюэлль Д. Статистическая механика. "Мир", М., 1971.
12. Добрушин Р.Л. Теория вероятн. и ее прим., 1973, 18, с.261.
13. Kaufman B., Onsager L. Phys.Rev., 1949, 76, p.1244.
14. Holley R.A., Stroock D.W. Z. Wahrsch. verw.Geb., 1976, 35, p.87.
15. Нахапетян Б.С. Центральная предельная теорема для случайных полей, удовлетворяющих условию сильного перемешивания. Многокомпонентные случайные системы. "Наука", М., 1978, с.276-288.
16. Hoeffding W. J.Amer.Stat.Assoc., 1963, 58, p.13.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 сентября 1984 года.

В Объединенном институте ядерных исследований начал выходить сборник *"Краткие сообщения ОИЯИ"*. В нем будут помещаться статьи, содержащие оригинальные научные, научно-технические, методические и прикладные результаты, требующие срочной публикации. Будучи частью "Сообщений ОИЯИ", статьи, вошедшие в сборник, имеют, как и другие издания ОИЯИ, статус официальных публикаций.

Сборник "Краткие сообщения ОИЯИ" будет выходить регулярно.

The Joint Institute for Nuclear Research begins publishing a collection of papers entitled *JINR Rapid Communications* which is a section of the JINR Communications and is intended for the accelerated publication of important results on the following subjects:

Physics of elementary particles and atomic nuclei.
Theoretical physics.
Experimental techniques and methods.
Accelerators.
Cryogenics.
Computing mathematics and methods.
Solid state physics. Liquids.
Theory of condenced matter.
Applied researches.

Being a part of the JINR Communications, the articles of new collection like all other publications of the Joint Institute for Nuclear Research have the status of official publications.

JINR Rapid Communications will be issued regularly.

Шуян Ш. P17-84-625

Флуктуации в конфигурациях чистых фаз и гетерофазные конфигурации

Установлены верхние границы вероятностей больших уклонений для частных сумм случайных величин, образующих строго стационарное случайное поле на d-мерной целочисленной решетке Z^d, удовлетворяющее свойству равномерного перемешивания. Рассмотрена двумерная ферромагнитная модель Изинга при больших β. Для заданного семейства больших /но конечных/ конфигураций рассматриваются гипотеза /I/: конфигурации являются "типичными" для одной из чистых фаз P^+_β или P^-_β, и гипотеза /II/: конфигурации соответствуют гетерофазной системе. На основе полученных оценок предложен метод /статистической/ проверки этих гипотез.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод О.С.Виноградовой

Šujan Š. P17-84-625

Fluctuations in Pure Phases' Configurations and Heterophase Configurations

Upper bounds to the probabilities of large deviations for partial sums of random variables forming a strictly stationary and uniformly mixing random field on the d-dimensional integer lattice Z^d are derived. A two-dimensional Ising model of ferromagnet at large β is considered and, based on the obtained inequalities, a statistical decision procedure is designed for deciding whether a given set of observed large (but finite) configurations fits in one of the following two hypotheses: /I/ the configurations are "typical" of one of the two pure phases P^+_β, P^-_β and /II/ the configurations arise from a heterophase system.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984