объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-84-409

А.А.Владимиров

НЕСТРУННЫЕ ДВУХМАГНОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ИЗОТРОПНОМ МАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1984

Одномерный изотропный магнетик Гейзенберга, или XXX - модель спина I/2, был первой моделью, исследованной методом анзаца Бете /I-3/. Задача диагонализации гамильтониана

$$H=\frac{J}{4}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{a=1}^{3}\sigma_n^a\sigma_{n+1}^a-\mathbb{1}\right),\quad \sigma_{N+1}^a\doteq\sigma_1^a, \tag{I}$$

описывающего взаимодействие системы N спинов на одномерной периодической цепочке, сводится при этом к решению системы алгебраических уравнений

$$\left(\frac{\lambda_j-\frac{i}{2}}{\lambda_j+\frac{i}{2}}\right)^N=-\prod_{k=1}^{\ell}\frac{\lambda_j-\lambda_k-i}{\lambda_j-\lambda_k+i},\quad j=1,\dots,\ell \tag{2}$$

(наши обозначения в основном следуют работам /2,4/). Набор попарно различных комплексных чисел $\lambda_1,\dots,\lambda_\ell$, $0\le\ell\le N/2$, удовлетворяющих системе (2), задает "бетевский вектор" $|\lambda_1,\dots\lambda_\ell\rangle$, который является собственным для гамильтониана (I):

$$H\,|\lambda_1,\dots,\lambda_\ell\rangle=\mathcal{E}(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)\,|\lambda_1,\dots\lambda_\ell\rangle, \tag{3}$$

с энергией

$$\mathcal{E}(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)=-\frac{J}{2}\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{\lambda_j^2+1/4} \tag{4а}$$

и импульсом

$$P(\lambda_1,\dots,\lambda_\ell)=i\sum_{j=1}^{\ell}\ln\frac{\lambda_j-\frac{i}{2}}{\lambda_j+\frac{i}{2}}\quad(\mathrm{mod}\ 2\pi). \tag{4б}$$

За последнюю четверть века методом анзаца Бете было решено немало других моделей (как спиновых, так и полевых в I + I измерениях). При этом, несмотря на кардинальные различия исходных гамильтоновых формулировок, вид результирующей системы уравнений, аналогичной (2), менялся не столь сильно. Одним из широко используемых вспомогательных приемов исследования систем типа (2) стала "струнная гипотеза" /I,5-7/ - предположение о том, что при $N\longrightarrow\infty$ решения (2), т.е. числа $\lambda_1,\dots,\lambda_\ell$, с экспоненциальной по N точностью выстраиваются в одну или несколько "струн". Струной называется набор комплексных чисел $\{\lambda_k\}$ с одинаковой вещественной частью X:

$$\lambda_k = x + i\left(\frac{m+1}{2} - k\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{5}$$

где m ("длина" струны) может принимать целые положительные значения, причем m = I соответствует вещественному λ (струна длиной I).

Вопрос о том, насколько верно струнная гипотеза описывает поведение решений системы (2), имеющих ненулевую мнимую часть $(m>1)$, не получил достаточного освещения в литературе. Исследования последних лет [3,8] обнаружили существенные отклонения от струнной гипотезы в антиферромагнитном случае $J>0$, когда основную роль играют состояния с $\ell \approx N/2$. Решить явно систему связанных $N/2$ уравнений при больших N не представляется возможным, поэтому здесь приходится, в свою очередь, прибегать к анзацам. Такой самосогласованный анзац, допускающий более широкий спектр состояний, чем только струны, и был применен в работах [8], после чего решение оставшихся уравнений показало, что струны в лидирующем порядке по N, как правило, не возникают.

В настоящей работе струнная гипотеза для системы (2) подвергнута обстоятельной проверке в простейшем случае $\ell = 2$ (двухмагнонный сектор над ферромагнитным вакуумом, $J<0$). Система (2) принимает вид

$$\left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - i}{\lambda_1 - \lambda_2 + i}, \tag{6а}$$

$$\left(\frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right)^N = \frac{\lambda_2 - \lambda_1 - i}{\lambda_2 - \lambda_1 + i}, \tag{6б}$$

а ее комплексные решения, согласно струнной гипотезе, в пределе $N\to\infty$ выглядят так:

$$\lambda_{1,2} = x \pm iy, \quad y \xrightarrow[N\to\infty]{} 1/2. \tag{7}$$

В основе струнной гипотезы лежит следующее рассуждение. Пусть $\lambda_1 = x + iy$, $y>0$. Тогда модуль левой части (6а) стремится к нулю при $N\to\infty$:

$$\left(\frac{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2}\right)^{N/2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0, \tag{8}$$

поскольку дробь в круглых скобках меньше I. Следовательно, и в правой части (6а) должен получаться нуль, поэтому

$$\lambda_1 - \lambda_2 \xrightarrow[N\to\infty]{} i \tag{9}$$

с экспоненциальной точностью по N. Перемножая (6а) и (6б), получаем, в силу (9), что при больших N

$$\left(\frac{x + i(y - 3/2)}{x + i(y + 1/2)}\right)^N = 1. \tag{10}$$

Решения уравнения (I0) имеют вид

$$y = 1/2, \quad x = \operatorname{ctg}\frac{\pi k}{N}, \quad k = 1, \ldots, N-1, \tag{11}$$

и мы приходим к (7).

Рассмотрим, однако, внимательнее случай малых k (т.е. $k = O(1)$). Им соответствуют значения $x \sim N$, подстановка которых в левую часть (8) дает

$$\left(\frac{x^2 + (y - 1/2)^2}{x^2 + (y + 1/2)^2}\right)^{N/2} \sim \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{N/2} \sim \left(1 + \frac{1}{N^2}\right)^{-N/2} \xrightarrow[N\to\infty]{} 1, \tag{12}$$

т.е. модуль левой части (6а) стремится к единице, а вовсе не к нулю, как предполагалось!

Итак, исходный пункт (8) формулировки струнной гипотезы несостоятелен для крайних (наиболее удаленных по вещественной оси от нуля) решений. Точнее говоря, предел (8) не имеет места при $|x| \geq \sqrt{N}$. Внутренняя несогласованность струнной гипотезы для таких конфигураций тем самым установлена. Отметим, что на возможность нарушения струнной гипотезы для крайних решений указывал Овчинников [5].

Попытаемся теперь построить самосогласованную картину комплексных решений системы (6) при $N\to\infty$, заменяющую струнную гипотезу. При этом мы не будем делать никаких априорных предположений типа (7), (9) о связи λ_1 и λ_2. Перемножим (6а) и (6б):

$$\left(\frac{\lambda_1 - \frac{i}{2}}{\lambda_1 + \frac{i}{2}}\right)\left(\frac{\lambda_2 - \frac{i}{2}}{\lambda_2 + \frac{i}{2}}\right) = \sqrt[N]{1} = e^{-\frac{2i\pi k}{N}} = \frac{c - i}{c + i}, \tag{13}$$

где k = 0,I, ..., $N-1$; $c \doteq \operatorname{ctg}\frac{\pi k}{N}$. Отсюда

$$\lambda_2 = \frac{c\lambda_1 + 1/2}{2\lambda_1 - c}. \tag{14}$$

Подстановка (I4) в правую часть (6а) дает

$$\frac{\lambda_1-\lambda_2-i}{\lambda_1-\lambda_2+i}=\left(\frac{\lambda_1-\frac{i}{2}}{\lambda_1+\frac{i}{2}}\right)\left(\frac{\lambda_1-c-\frac{i}{2}}{\lambda_1-c+\frac{i}{2}}\right), \tag{I5}$$

т.е. (6а) превращается в

$$\left(\frac{\lambda_1-\frac{i}{2}}{\lambda_1+\frac{i}{2}}\right)^{N-1}=\frac{\lambda_1-c-\frac{i}{2}}{\lambda_1-c+\frac{i}{2}}. \tag{I6}$$

Мы заменили систему (6) уравнением с одним неизвестным (I6), которое надо решать при всех допустимых k .

Исследуем сначала вещественные решения. Логарифмируя (I6), получаем

$$(N-1)\,\mathrm{arctg}\,2\lambda_1=\mathrm{arctg}\,2(\lambda_1-c)+\pi\left(N/2-m\right), \tag{I7}$$

m - целое.

Интервал изменения arctg выбран от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Сравнивая асимптотики обеих частей (I7) на $\pm\infty$, находим, что при любом k уравнение (I7) заведомо имеет $N-3$ решений, отвечающих $m = 2,3,\ldots,N-2$. Следовательно, уравнение (I6) имеет не менее $N-3$ вещественных решений. Но (I6) есть уравнение степени $N-1$ с вещественными коэффициентами. Значит, оно при любом k имеет не более двух комплексных корней, причем сопряженных. Отсюда, в частности, следует, что если $\mathrm{Im}\,\lambda_1\neq 0$, то $\lambda_2=\lambda_1^*$. Действительно, (I6), наряду с корнем λ_1 , имеет своим корнем и λ_2 , задаваемое формулой (I4), а знаки мнимых частей λ_1 и λ_2 противоположны.

Итак, мы ищем решения $\lambda_{1,2}=x\pm iy$, $y>0$. Из (I4) следует

$$x^2+y^2-1/4=cx, \tag{I8}$$

а переход к модулям в (6а) дает

$$\left(\frac{x^2+(y-1/2)^2}{x^2+(y+1/2)^2}\right)^{N}=\frac{(y-1/2)^2}{(y+1/2)^2}. \tag{I9}$$

Поделив же уравнение (6а) на сопряженное, мы получаем в точности (I3). Деление комплексного числа на сопряженное удваивает его аргумент. Поэтому если x и y удовлетворяют (I8), то между аргументами правой и левой частей (6а), или, эквивалентно, (I6), имеет место соотношение

$$\varphi_{\text{лев}}=\varphi_{\text{прав}}+\pi n, \quad n - \text{целое}. \tag{20}$$

Решения уравнений (I8), (I9), приводящие к нечетным n , не являются решениями исходной системы (6) и должны быть отброшены. Так мы впоследствии и сделаем, а пока нам удобно исследовать систему (I8),(I9), не задумываясь о четности n .

Представим решения этой системы в виде рядов по $1/N$. Пусть $N\to\infty$, $k = 0(1)$. Тогда

$$c \doteq \mathrm{ctg}\,\frac{\pi k}{N}=\frac{N}{\pi k}-\frac{\pi k}{3N}+O\left(1/N^3\right). \tag{2I}$$

Переписывая (I9) в виде

$$\ln\left(\frac{1-\frac{y}{x^2+y^2+1/4}}{1+\frac{y}{x^2+y^2+1/4}}\right)=\frac{2}{N}\ln\left(\frac{1-1/2y}{1+1/2y}\right) \tag{22}$$

и принимая во внимание (I8), получаем следующие разложения:

$$x=\frac{N}{\pi k}\left(1-1/N-\frac{\pi^2k^2}{6N^2}-\frac{\pi^4k^4}{180N^3}+\ldots\right), \tag{23а}$$

$$y=\frac{\sqrt{N}}{\pi k}\left(1+\frac{1}{N}\left(\frac{\pi^2k^2}{24}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{N^2}\left(\frac{11\pi^4k^4}{5760}+\frac{\pi^2k^2}{48}-\frac{1}{8}\right)+\ldots\right). \tag{23б}$$

Простая проверка выполнения равенства (I6) для аргументов (а не только для модулей) показывает, что нечетным n в (20) соответствуют нечетные k в (23). Следовательно, разложения (23) задают решение $\lambda_{1,2}=x\pm iy$ системы (6) при

$$k = 2,4,6,\ldots \ll \sqrt{N}. \tag{24}$$

Импульс и энергия состояния (23) имеют вид

$$p=\frac{2\pi k}{N}, \tag{25а}$$

$$\mathcal{E}=-\frac{J\pi^2k^2}{N^2}\left(1-\frac{1}{N}-\frac{1}{N^2}\left(\frac{\pi^2k^2}{6}+1\right)-\frac{1}{N^3}\left(\frac{\pi^4k^4}{180}-\frac{\pi^2k^2}{3}+1\right)+\ldots\right). \tag{25б}$$

Сходимость рядов (23) гарантирована тем, что по теореме о неявной функции они генерируются степенными разложениями элементарных функций в регулярных точках. Скорость сходимости может быть проиллюстрирована примером крайнего комплексного решения системы (6) для $N = 6$, соответствующего $k = 2$. Точный ответ $\lambda_{1,2} = x \pm iy$,

$$x = \frac{\sqrt{3}\left(1+\sqrt{17}\right)}{16} \approx 0{,}555\,, \quad y = \frac{\sqrt{26+10\sqrt{17}}}{16} \approx 0{,}512 \qquad (26а)$$

неплохо аппроксимируется приближенным, полученным с учетом тех членов ряда по $1/N$, которые явно выписаны в (23):

$$x \approx 0{,}583\,, \quad y \approx 0{,}504\,, \qquad (26б)$$

несмотря на то, что здесь мы, конечно, еще далеки от выполнения неравенства $k \ll \sqrt{N}$.

Итак, комплексные решения системы (6) с наибольшими x имеют вид, в корне отличный от струнной гипотезы: вместо $y \xrightarrow[N\to\infty]{} 1/2$ мы получили $y \sim \sqrt{N}$. Интересно сравнить наши результаты (23), (25) с параметрами струнного "решения", имеющего тот же импульс $p = \frac{2\pi k}{N}$. Согласно (II), $x_{стр}$ задается формулой (2I), $y_{стр} = 1/2$, а энергия

$$\mathcal{E}_{стр} = -\frac{J}{1+x^2_{стр}} = -\frac{J\pi^2k^2}{N^2}\left(1-\frac{\pi^2k^2}{3N^2}+O\left(1/N^4\right)\right). \qquad (27)$$

Общая картина комплексных решений системы (6) во всем диапазоне $2 \le k \le N/2$ (при $k > N/2$ меняется только знак x) может быть найдена из уравнений (I8), (I9) или (22). Качественно, в лидирующем порядке по N, она выглядит так:

$$\begin{aligned}
&1/2 < \alpha \le 1\,,\ k \sim N^{1-\alpha} \Rightarrow && x \sim N^{\alpha},\ y \sim N^{\alpha-1/2}\,;\\
&\qquad k \sim \sqrt{N} && x \sim \sqrt{N},\ y = O(1) > 1/2\,;\\
&0<\beta<1/2\,,\ k \sim N^{1-\beta} && x \sim N^{\beta},\ \left(y-\tfrac{1}{2}\right) \sim \exp\left(-\tfrac{1}{2}N^{1-2\beta}\right); \qquad (28)\\
&\qquad k \sim N && x = O(1),\ \left(y-\tfrac{1}{2}\right) \sim \left(1+\tfrac{1}{x^2}\right)^{-N/2}.
\end{aligned}$$

Видно, что струнная картина (экспоненциальное стремление y к I/2) имеет место только для $k \sim N^{\gamma}$, $\gamma > 1/2$, т.е. для комплексных решений, удаленных от нуля на расстояние $x \ll \sqrt{N}$.

Выпадение нечетных значений k отражает тот известный факт [I,9], что уравнение (I6) при заданном нечетном k имеет, начиная с некоторого N, только вещественные решения. Недостающая до

$N-1$ пара вещественных корней (вдобавок к отмеченным ранее "обязательным" $N-3$ корням) появляется при $k = I$ за счет двукратного пересечения графиков правой и левой частей (I7) в случае $m = I$, а при $k = 3,5, \ldots$ – за счет трехкратного пересечения в случае $m = \frac{k+1}{2}$. Значения N, при которых уже нет комплексных корней уравнения (I7), определяются соотношением [I,9]

$$\cos\frac{\pi k}{N} > 1 - \frac{2}{N}\,, \qquad (29)$$

полученным из сравнения производных по λ обеих частей уравнения (I7) в точке

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\left(c + \sqrt{c^2+1}\right), \qquad (30)$$

соответствующей решению $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, которое существует для любого N при $m = \frac{k+1}{2}$. Если наклон кривой, задаваемой правой частью (I7), в этой точке больше, чем левой, то неизбежно будет 3 пересечения.

Техника $1/N$ – разложения, позволившая нам обнаружить "неструнные" решения в модели (I) при $\ell = 2$, безусловно может быть применена для соответствующего анализа уравнений типа (2) как при других значениях ℓ в модели (I), так и в других решаемых моделях. Пока же общий вывод такой: поскольку струнная гипотеза верна далеко не для всех (хотя и для большей части) комплексных решений системы (2), то ее, очевидно, нельзя использовать для точного подсчета числа бетевских векторов, как это делалось в ряде работ [I,2,4,6,I0]. Вместе с тем, подчеркнем, что наше рассмотрение проведено при большом, но конечном N. Асимптотическая струнная картина двухмагнонных ферромагнитных возбуждений, возникающая в пределе $N \to \infty$, не претерпит изменений, поскольку для любого конечного x справедливо неравенство $x \ll \sqrt{\infty}$. В то же время именно отклонения от струнной гипотезы для решений с $\ell > 2$, аналогичные обнаруженным в данной работе, могут быть ответственны, при $\ell \to N/2$, за формирование неструнных асимптотических конфигураций в антиферромагнитном секторе.

Я благодарен Л.В. Авдееву, П.Б. Вигману, И. Гочеву, Б. Дёрфелю, П.П. Кулишу, Н.Ю. Решетихину, М.А. Смондыреву и Д.В. Ширкову за полезные обсуждения.

Литература:

I. Bethe H. Z. Phys., I93I, 7I, p. 205.
2. Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д. Записки научн.семинара ЛОМИ, I98I, I09, с. I34.
3. Lowenstein J.H. Les Houches Lectures, I982, Preprint NYU/TR9/82.
4. Faddeev L.D., Takhtajan L.A. Phys. Lett., I98I, 85A, p. 375.
5. Овчинников А.А. ЖЭТФ, I969, 56, с. I354.
6. Takahashi M. Progr. Theor. Phys., I97I, 46, p. 40I.
7. Gaudin M. Phys. Rev. Lett., I97I, 26, p. I30I;
Lai C.K. Phys. Rev. Lett., I97I, 26, p. I472.
8. Destri C., Lowenstein J.H. Nucl. Phys., I982, B205, p. 369;
Woynarovich F., J. Phys., I982, AI5, p. 2985;
Babelon O., de Vega H.J., Viallet C.M. Nucl. Phys., I983, B220, p. I3.
9. Orbach R. Phys. Rev., I958, II2, p. 309;
Katsura S. Ann Phys., I965, 3I, p. 325.
I0. Furuya K., Lowenstein J.H. Phys. Rev., I982, B25, p. 5935;
Кириллов А.Н. Записки научн.семинара ЛОМИ, I983, I3I, с.88.

Рукопись поступила в издательский отдел
I3 июня I984 года

Владимиров А.А. Р17-84-409

Неструнные двухмагнонные решения в изотропном магнетике Гейзенберга

Методом разложения по $1/N$ исследованы уравнения анзаца Бете для двухмагнонных состояний в одномерном изотропном магнетике Гейзенберга (XXX - модель спина 1/2), где N - число узлов периодической спиновой цепочки. Получена качественная картина комплексных решений при больших N, которая заметно расходится с принимавшейся ранее струнной гипотезой. Например, найдены решения $\lambda_{1,2} = x \pm iy$, $x \sim N$, $y \sim \sqrt{N}$, в то время как струнная гипотеза предполагает $y \underset{N\to\infty}{\to} 1/2$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Г.Г.Сандуковской

Vladimirov A.A. P17-84-409

Non-String Two-Magnon Configurations in the Isotropic Heisenberg Magnet

By means of the $1/N$ expansion we study the Bethe-ansatz equations for two-magnon states in the one-dimensional isotropic Heisenberg spin chain of N spins 1/2. A qualitative picture of complex solutions for $N \to \infty$ is obtained which substantially disagrees with the string hypothesis. For example, the solutions $\lambda_{1,2} = x \pm iy$, $x \sim N$, $y \sim \sqrt{N}$ are found, whereas according to string hypothesis $y \underset{N\to\infty}{\to} 1/2$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984