объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-84-107

В.И.Межов, А.С.Шумовский, В.И.Ярославцев*

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ТИРРИНГА В МИКРОСКОПИЧЕСКОЙ ДВУХЖИДКОСТНОЙ МОДЕЛИ СВЕРХПРОВОДНИКА

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

* Московский институт инженеров
сельскохозяйственного производства

1984

В статье [1] была предложена микроскопическая двухжидкостная модель сверхпроводника. Рассмотрение данной модели позволяет сделать заключение, что она является обобщением известной модели сверхпроводника Боголюбова-БКШ на случай сосуществования и взаимного проникновения сверхпроводящей и нормальной фаз друг в друга. Соответствующие оценки величины параметра порядка сверхпроводящей фазы $\Delta$, а также нового параметра порядка - фазовой концентрации $w$, показывают, что в системе возможен фазовый переход второго рода при температуре $\Theta_c$, отличающейся от критической температуры в обычной модели Боголюбова-БКШ /в этом случае $w = 1$/. Остается неясным поведение параметров порядка в области температур $0 < \Theta < \Theta_c$, а также вопрос о стабильности состояний гибридной $(w \neq 1)$ системы. Аналогично модели магнетика с гетерофазными флуктуациями [2] была предпринята попытка [3] выявить роль конкурирующего взаимодействия в образовании гетерофазного состояния путем введения в гамильтониан члена, учитывающего кулоновское отталкивание в системе:

$$H_1^{(i)} = \frac{1}{2} w_i^2 Q \sum_{\vec{k},\sigma} a^+_{\vec{k}\sigma i} a_{\vec{k}\sigma i} ,$$

где $Q$ - среднее значение энергии экранированного кулоновского взаимодействия; $w_i$ -фазовая концентрация сверхпроводящей $(i = s)$ или нормальной $(i = n)$ фаз; $a^+_{\vec{k}\sigma i}$, $a_{\vec{k}\sigma i}$ - представление операторов рождения и уничтожения электрона с импульсом $\vec{k}$ и спином $\sigma$ в $i$-ой фазе. Отметим, что вследствие учета кулоновского взаимодействия в упрощенном виде, величина может принимать значения в области $-\infty < Q < +\infty$.

Оказалось, что кулоновское взаимодействие играет стабилизирующую роль в гибридной $(w_i \neq 1)$ системе; в основном состоянии $(\Theta = 0)$ концентрация нормальной фазы $w_n$ может быть отличной от нуля [3]. Однако в этом случае ввиду сложности модели не удалось получить полной информации о поведении системы /остается под вопросом существование фазовых переходов первого рода в гетерофазной системе; область значений $Q$, для которых гетерофазная система стабильна, не конкретизируется и т.д./. Тем не менее, предложенная модель сверхпроводника с гетерофазными флуктуациями позволяет математически корректно ставить и исследовать вопрос о влиянии кулоновского взаимодействия на сверхпроводящие свойства системы. В частности, учет кулоновского взаимодействия в указанном выше виде не приводит к тривиальному результату. Напротив, учет кулоновского взаимодействия в модели Боголюбова-БКШ в виде $\tilde{H}_1 = \frac{1}{2} Q \sum_{\vec k,\sigma} a^+_{\vec k\sigma} a_{\vec k\sigma}$,

где $a^+_{\vec k\sigma}$, $a_{\vec k\sigma}$ - операторы рождения и уничтожения электрона с импульсом $\vec k$ и спином $\sigma$, сводится к ренормировке спектра электронов идеального ферми-газа на величину $Q/2$ и не дает существенного изменения поведения системы. Последовательный учет влияния кулоновского взаимодействия электронов на свойства проводящей /негибридной/ системы был проведен в [4]. Было показано, что кулоновское взаимодействие противодействует появлению сверхпроводимости. Для того, чтобы точнее исследовать влияние кулоновского взаимодействия на свойства гетерофазной системы, можно рассмотреть, ввиду математической сложности модели Боголюбова-БКШ с гетерофазными флуктуациями, более простую гибридную систему, оставив при этом неизменным качественное ее поведение. Этим требованиям удовлетворяет приближение Тирринга. Рассмотрение модели сверхпроводника Боголюбова-БКШ /негибридная система/ в приближении Тирринга [5-8] дает основание считать, что гетерофазная система также может быть исследована в приближении Тирринга. Отметим в этой связи работу [9], где кратко исследовалось поведение гетерофазной системы в приближении Тирринга.

В приближении Тирринга имеем:

1. $J(k,k') = J = \text{const}$, где $J(k,k')$ - параметр эффективного взаимодействия электронов, обусловленного фрелиховским механизмом обмена.

2. $\vec k^2/2m = T = \text{const}$, где $\vec k^2/2m$ - кинетическая энергия электрона в идеальном ферми-газе.

3. $V^{-1}\sum_{\vec k} 1 = \gamma = \text{const}$, $\vec k$ - импульс электрона.

Выполнение условий 2 и 3 соответствует предположению об обрезании импульса электронов некоторым заданным значением $k_0$. В этом случае модельный гамильтониан сверхпроводника с гетерофазными флуктуациями имеет вид:

$$H = \sum_i \oplus H_i\,, \qquad /1/$$

$$H_i = w_i \epsilon_i \sum_{\vec k,\sigma} a^+_{\vec k\sigma i} a_{\vec k\sigma i} - w_i^2 J V^{-1} \sum_{\vec k,\vec k'} a^+_{\vec k\uparrow i} a^+_{-\vec k\downarrow i} a_{-\vec k'\downarrow i} a_{\vec k'\uparrow i}$$

и определен на пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_s \otimes \mathcal{H}_n$ [1,3]. Здесь: $\epsilon_i = T - \mu + \frac{1}{2} w_i Q$; $\mu$ - химический потенциал; $V$ - объем системы. В приближении Тирринга получаем для свободной энергии

$$F = \frac{1}{2} V\gamma\left(w^2 \frac{\Delta^2 w^2}{2E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta} + w\epsilon_s + (1-w)\epsilon_n\right) - \qquad /2/$$
$$- \Theta V\gamma \ln 2\,\mathrm{ch}\frac{E}{2\Theta} - \Theta V\gamma \ln 2\,\mathrm{ch}\frac{(1-w)\epsilon_n}{2\Theta} + \mu N\,,$$



где

$$w = w_s = 1 - w_n\,, \quad E^2 = w^2\epsilon_s^2 + w^4\Delta^2\,. \qquad /3/$$

Система уравнений для определения $w$, $\mu$, $\Delta$ как функций температуры есть

$$\Delta = \Delta\frac{J\gamma w^2}{2E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}\,, \quad w = w\frac{v\gamma}{2}\left(1 - \frac{w\epsilon_s}{E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}\right), \qquad /4/$$
$$1 - w = (1-w)\frac{v\gamma}{2}\left(1 - \mathrm{th}\frac{(1-w)\epsilon_n}{2\Theta}\right), \quad v = \frac{V}{N}\,.$$

Преобразуем систему уравнений /4/ к виду:

$$\Delta = \Delta\frac{J\gamma w^2}{2E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}\,, \qquad wt = w\frac{w\epsilon_s}{E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}\,, \qquad /5/$$
$$(1-w)\,t = (1-w)\,\mathrm{th}\frac{(1-w)\epsilon_n}{2\Theta}\,,$$

где $t = 1 - 2/v\gamma$.

Рассмотрим случай $w \equiv 1$, соответствующий стандартной модели сверхпроводника Боголюбова-БКШ. Имеем

$$\Delta = \Delta\frac{J\gamma}{2\tilde E}\,\mathrm{th}\frac{\tilde E}{2\Theta}\,, \quad t = \frac{\epsilon_s}{\tilde E}\,\mathrm{th}\frac{\tilde E}{2\Theta}\,, \qquad /6/$$

где $\tilde E = E(w=1)$. Система уравнений /6/ имеет следующее решение:

1. $\Delta = 0$, $\mu = T + \frac{1}{2}Q$,
   $\Delta \neq 0$, $\mu = T + \frac{1}{2}Q$, $t = 0$.
2. $\Delta = 0$, $\mu = T + \frac{1}{2}Q - 2\Theta\,\mathrm{arth}\,t$, $|t| \le 1$, $t \neq 0$,
   $\Delta \neq 0$. $\mu = T + \frac{1}{2}Q - \frac{1}{2}J\gamma t$, $|t| \le 1$, $t \neq 0$.

Состояния с отличным от нуля параметром порядка $\Delta$ являются стабильными, а состояния с $\Delta \equiv 0$ - метастабильными в соответствии с известными результатами для модели Боголюбова-БКШ [4].

Используя условие минимальности термодинамического потенциала Гиббса в состоянии теплового равновесия, получаем соотношение:

$$\mu(\Delta \equiv 0) - \mu(\Delta \not\equiv 0) \ge 0 \qquad /6a/$$

или $T + \frac{1}{2}Q - 2\Theta\,\mathrm{arth}\,t \ge T + \frac{1}{2}(Q - p)$, где $p = J\gamma t$. Неравенство /6a/ справедливо при температурах $0 < \Theta < \Theta_T$ ($\Theta_T$ - температура фазового перехода второго рода в случае $w \equiv 1$) только для значений $t \ge 0$. Таким образом, плотность электронов в системе $d = 1/v$ удовлетворяет условию $1 - 2d\gamma^{-1} \ge 0$.

Рассмотрим случай $w \equiv 0$. Имеем: $\Delta \equiv 0$, $\mu = T + \frac{1}{2}Q - 2\Theta\,\mathrm{arth}\,t$. Этот случай соответствует чистой нормальной фазе.

Пусть теперь $w \not\equiv 0,1$. Система уравнений /5/ преобразуется к виду:

$$\Delta = \Delta\frac{J\gamma w^2}{2E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}, \quad t = \frac{w\epsilon_s}{E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}, \quad t = \mathrm{th}\frac{(1-w)\,\epsilon_n}{2\Theta}. \qquad /7/$$

Ее решения:

1. $\Delta \equiv 0$, $w \equiv \frac{1}{2}$, $\mu = T + \frac{1}{4}Q$,

   $\Delta \not\equiv 0$, $w \equiv \frac{1}{2}$, $\mu = T + \frac{1}{4}Q$, при $t = 0$.

2. $\Delta \equiv 0$, $w \equiv \frac{1}{2}$, $\mu = T + \frac{1}{4}Q - 4\Theta\,\mathrm{arth}\,t$, $|t| \leq 1$, $t \neq 0$;

   $\Delta \not\equiv 0$, $w \not\equiv \frac{1}{2}$, $\mu = T + \frac{1}{2}(Q - p)w$, $|t| \leq 1$, $t \neq 0$.

Для $t = 0$ уравнение для $\Delta \not\equiv 0$ имеет вид:

$$1 = \frac{J\gamma}{2\Delta}\,\mathrm{th}\frac{\Delta}{8\Theta}. \qquad /8/$$

Для $t \neq 0$ уравнение для $\Delta \not\equiv 0$ имеет вид

$$1 = \frac{J\gamma w^2}{2E}\,\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta}, \qquad /9/$$

где $w$ определяется из уравнения

$$w^2(2Q - p) + w(p - 3Q) + Q - 4\Theta\,\mathrm{arth}\,t = 0 \qquad /10/$$

и является функцией температуры. Отметим при этом, что из двух ветвей фазовой концентрации, определяемой уравнением /10/, выбирается ветвь, для которой производная $\frac{dw}{d\Theta} \leq 0$, т.к. в этом случае термодинамический потенциал Гиббса имеет меньшее по величине значение.

Из соотношения /10/ видно, что величина фазовой концентрации $w$ для области значений $0 < Q < +\infty$ может не удовлетворять условию $0 \leq w \leq 1$ при некоторых температурах $\Theta > 0$. Поэтому область значений $Q$ выбираем в виде: $-\infty < Q < 0$. Аналогично случаю $w \equiv 1$, из сравнения свободных энергий для случаев $\Delta \equiv 0, w \not\equiv 0;1$ и $\Delta \not\equiv 0$, $w \not\equiv 1;0$, получаем, что состояния с отличным от нуля параметром порядка $\Delta$ являются стабильными состояниями, а состояния с $\Delta \equiv 0$ - метастабильными.

Используя минимальность термодинамических потенциалов в состоянии теплового равновесия, приходим к следующей картине поведения гетерофазной системы:

1. При $Q < -2p$ при температурах $0 \leq \Theta \leq \Theta_T$ стабильно чисто сверхпроводящее состояние $w \equiv 1$, $\Delta \not\equiv 0$, при $\Theta_T < \Theta < \tilde{\Theta}$ ($\tilde{\Theta} = -Q/8\,\mathrm{arth}\,t$) стабильно чисто нормальное состояние $w \equiv 1$, $\Delta \equiv 0$, при $\Theta > \tilde{\Theta}$ - стабильно "гибридное" состояние $w = 1/2$, $\Delta \equiv 0$, где $\Theta_T = p/4\,\mathrm{arth}\,t$.

2. При $Q > -2p$ имеем: при $0 \leq \Theta \leq \tilde{\Theta}$ стабильно чисто сверхпроводящее состояние, при $\tilde{\Theta} < \Theta < \Theta_1 < \Theta_T$ - стабильно чисто сверхпроводящее состояние $w \equiv 1$, $\Delta \not\equiv 0$; при $\Theta > \Theta_1$ стабильно "гибридное" состояние $w \equiv 1/2$, $\Delta \equiv 0$, где $\Theta_1 = (2p - Q)/16\,\mathrm{arth}\,t$.

Таким образом, при $Q \leq -2p$ существует стабильное чисто сверхпроводящее состояние с фазовым переходом второго рода в точке $\Theta_T$, а при $Q > -2p$ - стабильное чисто сверхпроводящее состояние с фазовым переходом первого рода в точке $\Theta_1$. Гибридные состояния гетерофазной системы, имеющие при $Q = 0$ фазовый переход второго рода в точке $\Theta_c = \Theta_T/4$, а при $Q < 0$ - фазовый переход первого рода при температуре $\Theta_c < \Theta_{пер} < \Theta_1$ являются метастабильными.

Графическое изображение температурных зависимостей параметров порядка $w$ и $\Delta$ для гетерофазной системы приведено на рис.1 и 2, где линии 2-5 соответствуют гибридным состояниям с фазовыми переходами первого рода в точках $\Theta_2$, $\Theta_3$, $\Theta_4$, $\Theta_5$. При этом скачок параметра порядка $\Delta$ происходит с ненулевого значения до нуля, а скачок параметра порядка $w$ - до значения 1/2. Для каждой из линий 2-5 значения $Q$ возрастают по абсолютной величине $|Q_2| < |Q_3| < |Q_4| < |Q_5|$ $(Q \leq 0)$. При $Q \to -\infty$ линии 2-5 плавно переходят в линию 7, соответствующую чисто сверхпроводящему состоянию, а при $Q \to 0$ линии 2-5 плавно переходит в линию 1, соответствующую состоянию гетерофазной системы при $Q = 0$ с фазовым переходом второго рода. Точки перехода первого рода для фа-

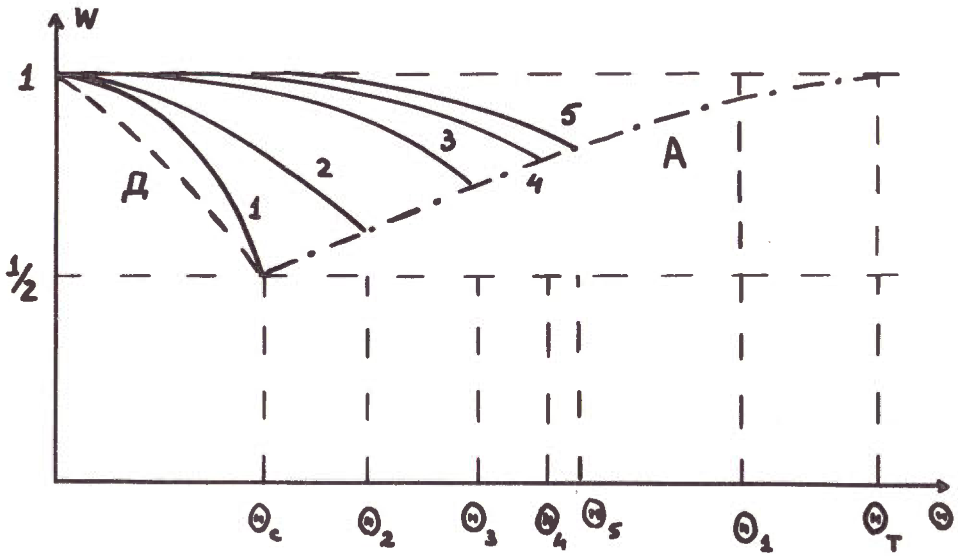


Рис.1

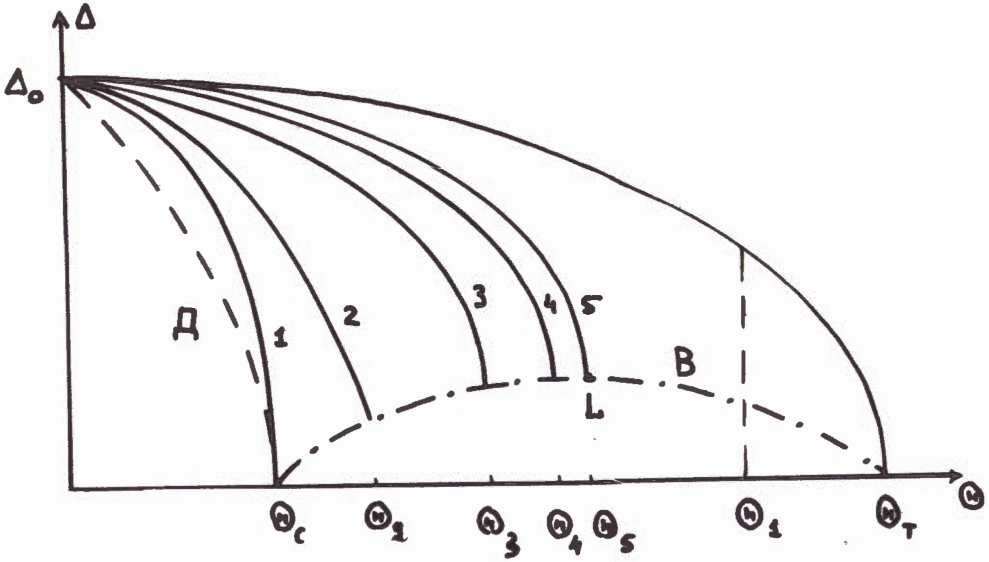


Рис.2

зовой концентрации $w$ лежат на пунктирной линии A /рис.1/, начинающейся из точки $w = 1/2$, $\Theta = \Theta_c$ и кончающейся в точке $w = 1$, $\Theta = \Theta_T$. Соответственно точки перехода для параметра порядка $\Delta$ лежат на пунктирной выпуклой линии B /рис.2/, начинающейся в точке $\Theta = \Theta_c$, $\Delta = 0$, проходящей через точку $L$, и кончающейся в точке $\Theta = \Theta_T$, $\Delta = 0$. Пунктирная линия Д соответствует состоянию системы $w \equiv 1/2$, $\Delta \neq 0$.

Для полного описания поведения системы приведем выражение для энтропии $S$ и теплоемкости $C$ гетерофазной системы:

$$S = V\gamma\{\ln 2\mathrm{ch}\frac{E}{2\Theta} - \frac{E}{2\Theta}\mathrm{th}\frac{E}{2\Theta} + \ln 2\mathrm{ch}\frac{(1-w)\epsilon_n}{2\Theta} - \frac{(1-w)\epsilon_n}{2\Theta}\mathrm{th}\frac{(1-w)\epsilon_n}{2\Theta}\},$$

$$C = V\gamma\,\mathrm{ch}^{-2}\frac{E}{2\Theta}\,\frac{1}{2\Theta}\{\frac{E^2}{2\Theta} - \frac{w^4}{4}(\Delta^2)' - w^3(\frac{p^2}{4} + \Delta^2)w'\},$$

где $(\Delta^2)'$, $w'$ – производные параметров порядка по температуре, причем

$$(\Delta^2)' < 0, \quad (\Delta^2)'' < 0, \quad w' < 0. \qquad /11/$$

Величина энтропии $S$ лежит в интервале $0 \leq S \leq \ln 2$ и меняется в зависимости от изменения величины $t$.

Теплоемкость, как это следует из /11/, есть величина положительная, имеющая при $\Theta \to 0$ асимптотику: $C \sim V\gamma(X/\Theta)^2\exp(-X/\Theta)$, где $X \equiv \Delta(0)(1-t^2)^{-1/2}$.



Таким образом, имеем обычное экспоненциальное поведение теплоемкости вблизи нуля температуры.

В заключение приведем разложение параметров порядка вблизи $\Theta = \Theta_c$ для гибридных состояний. Имеем:

$$w = \frac{1}{2} + \delta, \quad \Delta^2 = z, \quad \Theta = \Theta_c + \Delta\Theta, \quad \delta = -4(\Delta\Theta)Q^{-1}\,\mathrm{arth}\,t,$$
$$\frac{z}{2p^2}\{1 - t^{-1}(1-t^2)\,\mathrm{arth}\,t\} = 4t^{-1}(1-t^2)\,\mathrm{arth}^2 t\,(p^{-1} - Q^{-1})\cdot\Delta\Theta. \qquad /12/$$

Из /12/ видно, что при $Q \neq 0$ наблюдается фазовый переход первого рода, что и следовало ожидать. Таким образом, исследовать род фазового перехода в гетерофазной системе можно, не имея явной зависимости фазовой концентрации $w$ от температуры $\Theta$. По всей видимости, это может быть использовано при исследовании свойств гетерофазной системы, описываемой более общим модельным гамильтонианом Боголюбова-БКШ с гетерофазными флуктуациями.

Итак, воспользовавшись приближением Тирринга для качественного исследования поведения сверхпроводника с гетерофазными флуктуациями, приходим к следующей физической картине поведения двухжидкостной системы. При отсутствии кулоновского взаимодействия $(Q = 0)$ получаем стабильное чисто сверхпроводящее состояние с фазовым переходом второго рода и метастабильное гибридное состояние с фазовым переходом второго рода, причем точка фазового перехода второго рода в гибридной системе лежит ниже точки фазового перехода для чисто сверхпроводящей системы. С увеличением $|Q|$ появляются гибридные сверхпроводящие метастабильные состояния, которые плавно переходят при $Q \to -\infty$ в чисто сверхпроводящее состояние. При небольших значениях $|Q| : \{Q > -2p\}$ в системе реализуются чисто сверхпроводящие состояния с фазовым переходом первого рода. При больших значениях $|Q| : \{Q < -2p\}$ в системе реализуется чисто сверхпроводящее состояние с фазовым переходом второго рода - обычное состояние, получаемое в модели Боголюбова-БКШ в приближении Тирринга. Полученные результаты могут быть использованы для объяснения аномального поведения параметра порядка $\Delta$ при температурах ниже критической в сверхпроводниках второго рода и некоторых сверхпроводниках первого рода /10,11/.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Н.Н.Боголюбова /мл./ за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шумовский А.С., Юкалов В.И. ДАН СССР, 1982, 266, с.320-323.
2. Шумовский А.С., Юкалов В.И. ДАН СССР, 1980, 262, с.581-583.
3. Шумовский А.С., Юкалов В.И. В сб.: "II международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики" 1981 г., Дубна, ОИЯИ, с.238-260.

4. Боголюбов Н.Н., Толмачев В.В., Ширков Д.В. Новый метод в теории сверхпроводимости. Изв.АН СССР, М., 1958.
5. Thirring W., Wehrl A. Comm.Math.Phys., 1967, 4, p.303-314.
6. Thirring W. Comm.Math.Phys., 1968, 7, p.181-189.
7. Jelinek F. Comm.Math.Phys., 1968, 9, p.169-175.
8. Bogolubov N.N.Jr., Shumovsky A.S. Indian J.Pure and Appl. Phys., 1970, 8, p.121-126.
9. Ярославцев В.И. Вестник МГУ, сер.физ., 1982, т. 23, вып.5, с.56-60.
10. Сан-Жам Д., Сарма Г., Томас Е. Сверхпроводимость второго рода. "Мир", М., 1970.
11. Линтон Э. Сверхпроводимость. "Мир", М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 марта 1984 года



Межов В.И., Шумовский А.С., Ярославцев В.И. P17-84-107
Приближение Тирринга в микроскопической двухжидкостной модели сверхпроводника

Исследована микроскопическая двухжидкостная модель сверхпроводника в приближении Тирринга. Дополнительный /фазовая концентрация/ параметр порядка определен как функция температуры. Получено обобщение уравнения для обычного /щель/ параметра порядка. Выяснена роль кулоновского взаимодействия в изменении рода фазового перехода.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1984

Перевод Т.Ю.Думбрайс

Mezhov V.I., Shumovsky A.S., Yaroslavtsev V.I. P17-84-107
Thirring Approximation on the Microscopic Two-Liquid Model for a Superconductor

The microscopic two-liquid model for a superconductor is examined in the Thirring approximation. An additional order parameter (phase concentration) is determined as a function of temperature. A generelized equation for an ordinary order parameter (gap) is obtained. The change of the phase transition type due to Coulomb interaction is investigated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1984