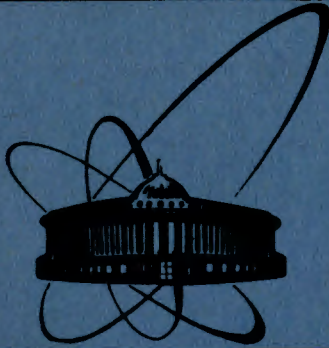


9/7-84



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

223/84

P17-83-737

Е.И.Корнилов, В.Б.Приезжев

ОТСУТСТВИЕ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА
В МОДЕЛИ ПЕРКОЛЯЦИИ
КОРНЕВЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1983

Несколько лет назад Стефен /1/ рассмотрел проблему деревоподобной перколяции и предположил наличие фазового перехода в таких системах. В этой проблеме ребра решетки случайным образом покрывались связями с тем условием, чтобы не образовывались замкнутые циклы из связей. С другой стороны, Ву /2/, используя полиномы Уитнея и дуальное преобразование, показал, что в двумерном случае фазового перехода может и не быть. Наконец, Стрелей /3/ указал на недостаточность аргументов Ву для доказательства наличия или отсутствия фазового перехода. Он также привел некоторые оценки, указывающие на фазовый переход для двух- и трехмерных кристаллов при плотности связей, немного меньшей, чем для обычной перколяции.

Целью настоящей заметки является рассмотрение перколяции корневых деревьев и доказательство отсутствия фазового перехода в таких моделях для произвольной размерности.

Дерево есть связный непустой граф, не имеющий в качестве подграфа ни одного цикла. Деревом на решетке является такой подграф решетки, который есть дерево. Корневое дерево /4/ есть дерево с одной помеченной вершиной. Очевидно, что каждому n -дереву, имеющему n вершин, соответствуют n корневых n -деревьев. Корневое дерево можно рассматривать как модель ветвящегося полимера, растущего из данного зародыша.

Пусть $C(n_1, n_2, \dots, n_N) \in C\{n\}$ - совокупность несвязанных деревьев на гиперкубической решетке размерности d , где n_j означает число j -деревьев, а N - число узлов решетки. Производящая функция деревоподобной модели, рассматриваемой в /1-3/, есть

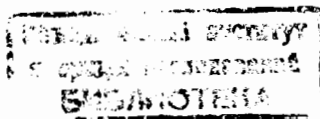
$$Z_d(x) = \sum_{C\{n\}} \prod_{j=1}^N (x^{j-1})^{n_j}, \quad /1/$$

где суммирование проводится по всем возможным конфигурациям деревьев и $(j-1)$ есть число связей в j -дереве. В этих обозначениях производящая функция модели корневых деревьев имеет вид

$$\tilde{Z}_d(x) = \sum_{C\{n\}} \prod_{j=1}^N (jx^{j-1})^{n_j}. \quad /2/$$

Мы получим $\tilde{Z}_d(x)$ путем сведения модели корневых деревьев к некой вспомогательной модели, сформулированной и решенной в /5/.

Рассмотрим решетку L размерности d с целочисленными координатами (r_1, r_2, \dots, r_d) , такими, что $1 \leq r_i \leq l_i$ ($N = l_1 l_2 \dots l_d$). Мы предполагаем периодические граничные условия, получающиеся путем отождествления противоположных сторон L . В узлах решетки



могут находиться стрелки единичной длины. Стрелка, занимающая узел s , может быть направлена из s в один из $2d$ смежных узлов s' . Будем говорить, что стрелка порождает путь ss' из s в s' . Совокупность путей вида $s_1 s_2, s_2 s_3, \dots, s_{n-1} s_n$, порожденная стрелками, находящимися в узлах s_1, s_2, \dots, s_{n-1} , есть путь из s_1 в s_n . Если в совокупности путей $s_1 s_2, s_2 s_3, \dots, s_{n-1} s_n$ узел s_n совпадает с узлом s_1 , то путь $s_1 s_n$ замкнут. Точка s_n является конечной точкой пути $s_1 s_n$, если в ней нет стрелки.

Рассмотрим все конфигурации n стрелок, не образующих замкнутых путей. Обозначим число таких конфигураций через g_n . Задача состоит в нахождении производящей функции

$$\Phi_d(x) = \sum_{n=0}^{N-1} g_n x^n. \quad /3/$$

В [5] было доказано, что в пределе больших N функция $\Phi_d(x)$ имеет вид

$$\Phi_d(x) = \exp \left\{ \frac{N}{(2\pi)^d} \int \dots \int_0^{2\pi} \ln [1 + 2x \sum_{i=1}^d (1 + \cos \phi_i)] d\phi_1 \dots d\phi_d \right\}. \quad /4/$$

Ниже мы покажем, что

$$\Phi_d(x) = \tilde{Z}_d(x). \quad /5/$$

Нетрудно показать, что каждая конфигурация стрелок соответствует одной и только одной конфигурации корневых деревьев. Действительно, рассмотрим произвольную конфигурацию стрелок, которые образуют совокупность путей, оканчивающихся в узлах s_1, s_2, \dots, s_n . Совокупность связей, принадлежащих всем путям, оканчивающихся в узле s_i , образует дерево с корнем s_i . Так как любые два пути, оканчивающихся в различных узлах, не имеют общих элементов, каждое дерево имеет в точности один корень.

Обратно, пусть \tilde{C} - конфигурация деревьев с корнями в узлах s_1, s_2, \dots, s_n . Рассмотрим дерево с корнем s_i . Присвоим каждой вершине v данного дерева стрелку, направленную от v к смежному узлу s' , для которого расстояние /число связей/ между s' и s_i минимально. Повторяя эту процедуру для каждого дерева, получим конфигурацию стрелок. Требуемое соответствие между моделью корневых деревьев и вспомогательной моделью получено.

Заметим, что g_{N-1}/N есть число остовных деревьев на решетке. Его можно получить, применяя матричную теорему о деревьях [4,6]. Мы можем легко получить это число из формулы /4/. Записывая

$$g_{N-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} x^{-N+1} \Phi_d(x), \quad /6/$$

находим

$$g_{N-1} \sim \exp \left\{ \frac{N}{(2\pi)^d} \int \dots \int_0^{2\pi} \ln (4 \sum_{i=1}^d \sin^2 \phi_i) d\phi_1 \dots d\phi_d \right\}. \quad /7/$$

Отсутствие фазового перехода немедленно следует из явного вида функции $\tilde{Z}_d(x)$, который ведет к регулярному поведению термодинамических функций для всех $0 \leq x < \infty$.

Полученный выше точный результат не дает окончательного заключения об отсутствии фазового перехода в первоначальной проблеме деревоподобной перколяции. Однако он может служить отправной точкой для исследования термодинамических функций последней модели. Например, можно использовать тот факт, что производящая функция /2/ связана с /1/ весовой перенормировкой $x \rightarrow x_j^{1/(j-1)} \equiv \tilde{x}_j$, где \tilde{x}_j - вес связи, принадлежащей j -дереву. Если предположить преобладание больших кластеров ($j \rightarrow \infty$) около точки перколяции, то $\tilde{x}_j \rightarrow x$, и различие в перколяционном поведении обеих моделей исчезает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stephen M.J. Phys.Lett., 1976, A56, p.149.
2. Wu F.Y. Phys.Rev., 1978, B18, p.516.
3. Straley J.P. Phys.Rev., 1979, B19, p.4845.
4. Harary F., Palmer E.M. Graphical Enumeration. Academic Press, New York and London, 1973.
5. Priezzhev V.B. Theor.Math.Phys., 1978, 36, p.634.
6. Temperley H.N.V. Faraday Soc.Disc., 1958, 25, p.92.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 октября 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

ДЗ-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
ДЗ,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Корнилов Е.И., Приезжев В.Б.

P17-83-737

Отсутствие фазового перехода
в модели перколяции корневых деревьев

Получено соответствие между моделью перколяции корневых деревьев и ациклической моделью, позволяющее установить отсутствие фазового перехода на решетках любой размерности.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Kornilov E.I., Priezhev V.B.

P17-83-737

Absence of Phase Transitions
in Rooted-Tree Percolation

It is shown that a rooted-tree model closely related to the treelike percolation does not have a phase transition for arbitrary dimensions.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод авторов