83-678

2/6/XII-83

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

6724/83

Р17-83-678

С.А.Сергеенков

КИНКОПОДОБНОЕ РЕШЕНИЕ В БОЗЕ-КОНДЕНСАТЕ С U(1,1)-СИММЕТРИЕЙ

Направлено в журнал "Physics Letters A"

1983

1. Слабо неидеальный бозе-газ с внутренними квазиспиновыми /"цветовыми"/ степенями свободы и отталкиванием между частицами описывается в двумерном пространстве-времени системой двух связанных нелинейных уравнений для двухкомпонентной комплексной вектор-функции $\psi(x,t) = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$ /1/:

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \kappa((\bar\psi\psi) - \rho^2)\psi = 0, \qquad /1/$$

где

$$\bar\psi = \psi^+\gamma_0, \quad \psi^+ = (\psi^*)^T, \quad \gamma_0 = \mathrm{diag}(1,-1),$$

$(\bar\psi\psi) \equiv |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2$ - инвариант изогруппы $U(1,1)$, κ - константа связи.

Поскольку наибольшего внимания заслуживают именно свойства конденсата и его возбуждений, мы рассмотрим здесь решение задачи Коши для уравнения /1/ при неисчезающих на обеих бесконечностях граничных условиях:

$$\begin{cases}\psi(x,t) \to \psi_\pm, \\ \psi_x(x,t) \to 0,\end{cases} \quad x \to \pm\infty. \qquad /2/$$

В силу /2/ из /1/ следует, что для корректной постановки задачи в этом случае необходимо, чтобы

$$(\bar\psi_+\psi_+) = (\bar\psi_-\psi_-) = \rho^2, \qquad /3/$$

где ρ^2 - плотность бозе-конденсата. Возможность детального изучения задачи /1/-/2/ вытекает из соответствующей линейной задачи /2/:

$$\begin{cases}\phi_x = U\phi, \\ \phi_t = V\phi,\end{cases} \qquad /4/$$

где

$$U(x,\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} -i\lambda & -i\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\bar\psi \\ \hline -i\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\psi & i\lambda\cdot I_2 \end{array}\right),$$

$$V(x,\lambda) = \left(\begin{array}{c|c} 4i\lambda^2 - i\frac{\kappa}{2}(\bar\psi\psi - \rho^2) & \sqrt{\frac{\kappa}{2}}(2i\lambda\bar\psi - \bar\psi_x) \\ \hline \sqrt{\frac{\kappa}{2}}(2i\lambda\psi + \psi_x) & i\frac{\kappa}{2}(\psi\otimes\bar\psi - \rho^2\cdot I_2) \end{array} \right) ,$$

λ - комплексный /в общем случае/ спектральный параметр. Условие интегрируемости линейной задачи /4/ эквивалентно исходному нелинейному уравнению /1/. Программа метода обратной задачи для линейной системы /4/ в рамках обобщенной схемы Захарова-Шабата [3] была выполнена. В результате были найдены солитоноподобные решения нелинейной задачи /1/-/2/.

2. Здесь мы приведем необычное в некотором смысле односолитонное решение, являющееся эрмитовой редукцией ($\mathrm{Im}\lambda = 0$) общего солитонного решения. Оно имеет следующий вид *:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\lambda - i\nu}\psi_+ (\lambda - i\nu\,\mathrm{th}\,\nu z) + \frac{i\nu}{\lambda - i\nu}\sigma_1\psi_+^* e^{i\theta}\,\mathrm{sech}\,\nu z , \qquad /5/$$

где

$$z = x - 2\lambda t - x_0, \quad \theta = \lambda x - (\lambda^2 - \nu^2)t - i\phi,$$

$$e^{2\nu x_0} = \frac{\mu_1(0)}{\nu}, \quad e^{\phi} = \frac{\mu_2(0)}{\nu}\cdot\sqrt{\frac{\nu}{\mu_1(0)}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa} - 1},$$

$$\rho^2 = \zeta^2 - \lambda^2 = |\psi_{+1}|^2 - |\psi_{+2}|^2, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\mu_1(t) = \mu_1(0)\,e^{-2i\lambda\zeta t}, \quad \mu_2(t) = \mu_2(0)\,e^{-i(\lambda+\zeta)^2 t} \qquad /6/$$

отражают законы эволюции данных рассеяния для линейной задачи /4/. ν - мнимая часть перенормированного /благодаря присутствию конденсата плотности ρ^2 / спектрального параметра $\zeta = \sqrt{\lambda^2 + \rho^2}$. Для асимптотик $\psi_\pm$ решения $\psi(x,t)$ при $x \to \pm\infty$ имеем

$$\psi_- = \psi_+ e^{i\alpha} , \qquad /7/$$

* Заметим, что подобное решение может быть получено с помощью изовращений по группе $U(1,1)$ [2].

где $e^{i\alpha} = \frac{\lambda + i\nu}{\lambda - i\nu}$ - фаза конденсата, что согласуется с требованием /3/. Отметим существенную зависимость решения /5/ от константы связи κ. В случае $\kappa = 2$ это решение вырождается в хорошо известное кинк-кинковое решение, или, по терминологии работы [4], в решение типа "двойной пузырь". Другой предельный случай, ψ_{+1} /или ψ_{+2}/ $\to 0$, соответствует решению типа "капля в пузыре" в системе взаимопроникающих газов [4]. Из формул /6/ следует, что решение /5/ имеет две различных частоты. Это приводит к бионоподобному поведению этого решения. Действительно, нетрудно проверить, что плотность амплитуды $|\psi|^2$ имеет интерференционный /осциллирующий/ характер во времени [2].

3. Используя результаты работы [5] по гамильтоновской структуре $U(p,q)$ НУШ при постоянных граничных условиях, можно вычислить вклад одного солитона в инволютивные законы сохранения. Для числа частиц, импульса и энергии на солитон /5/ получим соответственно

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(\bar\psi\psi - \rho^2) = \frac{4\nu}{\kappa}.$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dx\,(\bar\psi\psi_x - \bar\psi_x\psi) = \frac{4\lambda\nu}{\kappa},$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,(\bar\psi\psi_{xx} + \frac{\kappa}{2}(\bar\psi\psi - \rho^2)^2) = \frac{16}{3}\frac{\nu^3}{\kappa} + 2\nu\rho^2(\frac{2}{\kappa} - 1)$$

Таким образом, квазиклассический спектр солитона /5/ имеет вид:

$$E(N;\kappa) = \frac{\kappa^2}{12}N^3 + \rho^2(1 - \frac{\kappa}{2})N. \qquad /8/$$

Необычность решения /5/, связанная с перекрытием дискретной /кинк/ и непрерывной /фон/ частей спектра в рамках метода обратной задачи, приводит к интересной возможности осуществления своеобразного фазового перехода по константе связи κ в рассматриваемой модели $U(1,1)$ НУШ. Действительно, при изменении параметра κ от нуля до двух решение /5/ /точнее, функция $\sqrt{\frac{\kappa}{2}}\,\psi(\kappa)$/ описывает динамику непрерывного перехода: "капля" ($\kappa = 0$) $\to$ "капля в пузыре" ($0 < \kappa < 2$) $\to$ "пузырь" ($\kappa = 2$) или обратно /в зависимости от начальных условий/ в слабонеидеальном бозе-газе. Уникальная возможность такого перехода основана исключительно на некомпактности группы симметрии $U(1,1)$. При этом описанные выше фазы эволюционируют согласно уравнениям /типа НУШ/, инвариантным относительно соответствующей подгруппы группы $U(1,1)$, а именно: "капля"($U(1,0)\otimes U(1,0)$ $\to$ "капля в пузыре" ($U(1,0)\otimes U(0,1)$) $\to$

"пузырь" (U(0,1) $\bullet$ U(0,1)), разумеется, с учетом правильных граничных условий. Особо выделим наличие гетерофазного состояния /"капля в пузыре"/ в системе взаимопроникающих газов, благодаря которому и возможен такой переход. Представляет несомненный интерес изучение его термодинамики и статистики. Эти вопросы, а также проблема столкновений "цветных" кинков будут обсуждаться более детально в отдельной работе.

Автор выражает искреннюю благодарность В.Г.Маханькову за постановку задачи и В.Б.Беляеву, В.Герджикову и О.К.Пашаеву за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yang C.N. Phys.Rev.Lett., 1967, 19, p.1342; ter Haar D. Preprint Ref. 54/77, Oxford Univ., 1977; Кулиш П.П. Препринт ЛОМИ, Р-3-79, Л., 1979; Маханьков В.Г., Пашаев О.К. ТМФ, 1982, 53, с.55; Манаков С.В. ЖЭТФ, 1973, 65, с.505.
2. Makhankov V.G., Makhaldiani N.V., Pashaev O.K. Phys.Lett., 1981, 81A, p.161.
3. Makhankov V.G., Pashaev O.K., Sergeenkov S.A. JINR, E2-83-378, Dubna, 1983.
4. Makhankov V.G. Phys.Lett., 1981, 81A, p.156.
5. Пашаев О.К., Сергеенков С.А. ОИЯИ, Р2-83-377, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 сентября 1983 года.

Сергеенков С.А. Р17-83-678
Кинкоподобное решение в бозе-конденсате с U(1,1)-симметрией

Методом обратной задачи найдено необычное односолитонное решение векторного нелинейного уравнения Шредингера с некомпактной U(1,1)-изогруппой при нетривиальных граничных условиях. Обсуждается возможность существования в модели взаимопроникающих газов структурного фазового перехода по константе связи.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Sergeenkov S.A. P17-83-678
Kink-Like Solution in U(1,1) Symmetry Bose-Condensate

A peculiar single-soliton solution of the vector nonlinear Schrödinger equation with noncompact U(1,1) isogroup under nontrivial boundary conditions is found via the Inverse Scattering Method. The existence of the phase transitions within the model of gas mixtures through the power constant is discussed as well.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983