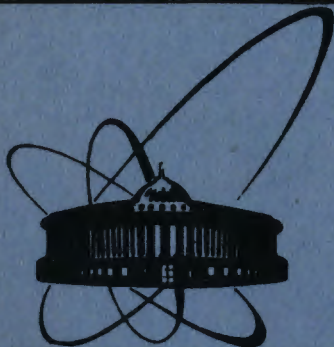


12/xu-83



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

6473/83

P17-83-632

Ю.С.Гальперн, А.Т.Филиппов

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ СОЛИТОНОВ
В НЕОДНОРОДНЫХ
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Направлено в "Журнал экспериментальной
и теоретической физики"

1983

1. ВВЕДЕНИЕ

Явления, связанные с образованием и распространением солитонов в неограниченных однородных системах, хорошо изучены. Однако возможности наблюдения и, в перспективе, использования солитонов в приложениях определяются их взаимодействием с неоднородностями внутренней структуры и границами реальных физических систем. Особенно интересны с этой точки зрения неоднородные длинные /"одномерные"/ джозефсоновские переходы, или ДДП /см., например, /1-4/ /. Это связано как с тем, что распространение в них солитонов, называемых также флюксонами, или джозефсоновскими вихрями, описывается с достаточной точностью относительно простым нелинейным уравнением, так и с тем, что они удобны для экспериментального наблюдения солитонов /1,5/. Действительно, для джозефсоновских переходов имеется широкий выбор способов наблюдения солитонных физических эффектов, таких, как особенности вольт-амперных характеристик, связанные с рождением флюксонов, излучение на краю перехода при отражении движущегося флюксона, своеобразная зависимость максимального тока, текущего через переход, от внешнего магнитного поля и т.д. /см., например, /6-10/, в /9/ и /10/ можно найти дальнейшие указания, касающиеся литературы/. Совсем недавно был также разработан новый метод прямого экспериментального наблюдения статических распределений тока в ДДП посредством лазерного сканирования /11,12/, позволяющий между прочим непосредственно наблюдать взаимодействие флюксонов с неоднородностями.

Возможности использования солитонов в ДДП с неоднородностями для запоминаящих и переключающих элементов ЭВМ обсуждались неоднократно, и потенциальные преимущества таких элементов хорошо известны /2,3/. Однако попытаться конкретно реализовать эти преимущества можно будет лишь после детального теоретического и экспериментального изучения физических явлений в неоднородных ДДП. Основным препятствием для экспериментального исследования солитонов в ДДП до недавнего времени были технологические трудности приготовления переходов с заданными свойствами. В настоящее время удастся не только изготавливать однородные переходы с длиной $l = (10 \div 20) \lambda_J$, где λ_J - джозефсоновская глубина проникновения, но и создавать в них неоднородности с заранее заданными свойствами /3/. Таким образом, экспериментальное исследование солитонов в неоднородных ДДП стало возможным, а теоретический анализ взаимодействия солитонов с неоднородностями - реально необходимым.

До последнего времени это взаимодействие изучалось с помощью различных вариантов теории возмущений /1-2,13/, в которой невозмущенными считаются движущиеся солитонные или многосолитонные состояния в однородном бесконечном переходе. При этом действие возмущения на одиночный солитон приводит к тому, что он ведет себя как деформируемая частица, на которую действуют консервативные силы, зависящие от неоднородностей, а также силы трения, описывающие рассеяние энергии в переходе; в таком же духе описывается и действие возмущения на многосолитонные состояния, называемые иногда "пачками" солитонов. Такая "солитонная" теория возмущений, или СТВ, дает очень ясную физическую картину происходящих процессов и позволяет наглядно объяснить некоторые наблюдаемые явления /9,10/. Она, однако, становится неприменимой в тех случаях, когда солитон или многосолитонное состояние сильно деформируются взаимодействием с неоднородностью. Простейшие примеры этого - отрыв флюксона от края ДДП при увеличении внешнего магнитного поля и локализация флюксона на неоднородности, размер которой меньше или порядка размера флюксона, т.е. $\lesssim \lambda_J$. Для решения задач такого типа необходимо использовать аналитические или численные методы, позволяющие получить в принципе точные решения. Так, в аналитическом виде точно найдены статические распределения магнитного потока для конечного ДДП во внешнем магнитном поле /6-8/, построены точные решения, описывающие движение флюксонов в конечном ДДП с простейшими граничными условиями /14/. Недавно были также построены приближенные решения, описывающие вхождение решетки вихрей в переход, на конце которого максимальный джозефсоновский ток плавно, т.е. на длине $\gg \lambda_J$, спадает до нуля /4/.

В работах /15,16/ была поставлена задача об определении статических состояний ДДП с локальными неоднородностями. Точное решение этой задачи можно выразить через эллиптические функции, однако исследование свойств точного формального решения представляет собой нетривиальную задачу, так как неизвестные параметры, определяющие состояние, удовлетворяют очень сложным трансцендентным уравнениям. Анализ некоторых частных решений позволил нам выявить два новых явления: образование локализованных связанных состояний на притягивающих микрон неоднородностях, соответствующих локальному уменьшению максимального джозефсоновского тока, и существование нетривиальных бифуркаций этих состояний при изменении внешнего магнитного поля /15,16/ /напомним, что бифуркацией называют порождение или исчезновение решений при некоторых критических значениях внешних параметров; если параметры не проходят через критические значения, число решений сохраняется/.

Настоящая работа посвящена систематическому изучению статических связанных состояний в ДДП с локальными неоднородностями и в особенности их бифуркаций. Показано, что для качественного и количественного описания всех связанных состояний достаточно

найти решения в точках бифуркации, т.е. критические состояния. После этого можно построить разложение любого состояния в ряд по степеням отклонения параметров от бифуркационных значений; члены этого ряда определяются рекуррентно и выражаются в явном виде через функции, характеризующие критические состояния. Такая теория возмущений очевидно принципиально отличается от солитонной, и мы называем ее бифуркационной, или БТВ. Для детального количественного изучения связанных состояний и их бифуркаций предложена простая кусочно-линейная модель, допускающая решение в элементарных функциях и позволяющая получить хорошие приближения для точных решений. Подробно рассмотрены точные и приближенные решения простейших нетривиальных задач: бесконечный переход с одной и двумя неоднородностями, полубесконечный переход с одной неоднородностью и магнитным полем на краю. Обсуждаются возможности прямого экспериментального наблюдения предсказанных в работе связанных состояний флюксонов и их бифуркаций.

2. СТАТИЧЕСКИЕ СОСТОЯНИЯ И ИХ БИФУРКАЦИИ. БИФУРКАЦИОННАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотрим переход, схематически изображенный на рис.1. В общем случае ширина перехода w и толщина d диэлектрического слоя между верхним и нижним сверхпроводниками зависят от x . Переход будем считать одномерным, т.е. его размеры должны удовлетворять условиям $w \ll \lambda_J \ll \ell$. При этом все величины зависят лишь от x , магнитное поле направлено по оси y , а электрическое - по оси z . Как известно /1,3,5/, распространение в таком ДДП электромагнитных волн и, в частности, солитонов можно описать уравнением

$$L(L^{-1}\phi_x)_x - LC\phi_{tt} - \lambda_J^{-2}(x)\sin\phi(x,t) = \bar{a}\phi_t, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad /2.1/$$

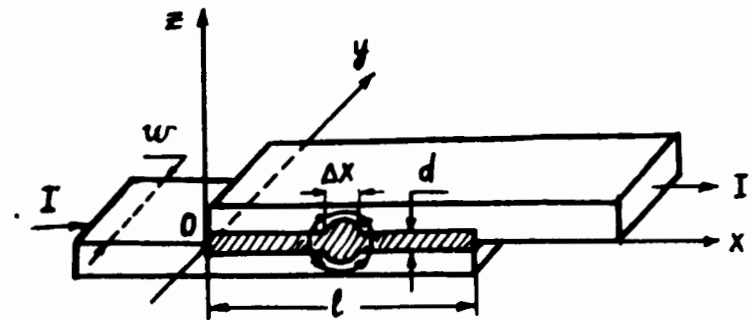


Рис.1

Здесь $\phi = 2\pi\Phi(x, t) / \Phi_0$, $\Phi(x, t)$ - магнитный поток через отрезок $(0, x)$, Φ_0 - квант магнитного потока, $\lambda_J^{-2}(x) = 2e\hbar^{-1} LI_c$; L, C, I_c - соответственно индуктивность, емкость и критический ток Джозефсона, отнесенные к единице длины перехода. Правая часть уравнения описывает диссипативные эффекты, связанные с туннелированием нормальных электронов через изолирующий слой. Можно выбрать геометрию перехода таким образом, чтобы индуктивность была постоянной, а величина $\lambda_J(x)$ заметно изменялась лишь на небольших участках размера $\Delta x < \lambda_J$, где λ_J - постоянное значение джозефсоновской длины на однородных участках. Действительно, туннельный ток I_c экспоненциально убывает при увеличении толщины барьера d , а $L = \mu_0(2\lambda_L + d)w^{-1}$, где λ_L - лондоновская глубина проникновения. Так как $d \ll \lambda_L \ll \lambda_J$, то увеличивая d на участке Δx , можно уменьшить I_c до нуля, сохраняя индуктивность практически постоянной, см. рис. 1. Выберем за единицы длины и времени величины λ_J и $\omega_J^{-1} = \lambda_J(L_0 C_0)^{1/2}$, где L_0, C_0, I_0 - значения L, C, I_c на однородных интервалах, и приближенно представим изменение критического тока Джозефсона на неоднородностях с помощью δ -функций. Тогда уравнение /2.1/ можно записать в виде $(x_0 = 0 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = \ell)$,

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} - [1 - \sum_{i=1}^n \mu_i \delta(x - x_i)] \sin \phi(x, t) = \alpha \phi_t, \quad 0 \leq x \leq \ell. \quad /2.2/$$

Так как нас в дальнейшем интересуют статические распределения $\phi(x)$, мы пренебрегли тем, что затухание $\alpha = \bar{\alpha} \lambda_L^2 \omega_J$ и скорость распространения сигнала $(LC)^{-1/2}$ также могут зависеть от x . Помимо этого, для описания реального перехода в уравнения /2.1/ и /2.2/ необходимо было бы ввести члены $-\phi_{xxt}$ и $-\phi_t \cos \phi^{1/2}$. Мы их также не учитываем, так как они не влияют на статические состояния и не изменяют качественно картину развития состояний во времени. Во всяком случае, /2.2/ можно рассматривать как уравнение нулевого приближения, а все поправки, включая и поправки на конечную ширину неоднородности, считать возмущением.

Энергия, сосредоточенная внутри перехода, в слое толщиной $2\lambda_L + d$, равна сумме энергий электромагнитного поля и джозефсоновских токов. Можно взять такие единицы для электрического и магнитного полей, что $v(x, t) = \phi_t$, $h(x, t) = \phi_x$. Тогда, выразив энергию в единицах $L_0 I_0^2$, представим ее в стандартной форме:

$$\mathcal{E} = \int_0^\ell dx \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \phi'^2 + [1 - \sum \mu_i \delta(x - x_i)] (1 - \cos \phi) \right\}, \quad /2.3/$$

где $\dot{\phi} = \phi_t$, $\phi' = \phi_x$. Из /2.2/ следует, что

$$\mathcal{E} = \dot{\phi}_\ell \phi'_\ell - \dot{\phi}_0 \phi'_0 - \int dx \alpha \phi^2; \quad /2.4/$$

здесь и в дальнейшем приняты обозначения $\phi_i = \phi(x_i, t)$, $\phi'_i = \phi'(x_i, t)$. Уравнение /2.2/ необходимо дополнить граничными условиями при $x = 0$ и $x = \ell$. Для ДДП естественно задать краевые значения магнитного поля:

$$\phi'(0, t) \equiv \phi'_0 = h_0, \quad \phi'(\ell, t) \equiv \phi'_\ell = h_\ell, \quad /2.5/$$

и мы будем считать h_0 и h_ℓ внешними параметрами; о различных реализациях граничных условий на опыте см. /1,5-8,10/. По выражению для энергии легко стандартным способом построить лагранжиан и диссипативную функцию, которые приводят к уравнениям /2.2/. Однако чтобы получать из вариационного принципа и граничные условия, необходимо взять другое выражение для энергии /гамильтониана/, учитывающее энергию внешних источников, необходимых для поддержания поля на краях перехода. В соответствии с общим рецептом /17/ возьмем в качестве обобщенного гамильтониана

$$\mathcal{G} = \mathcal{E} + h_0 \phi_0 - h_\ell \phi_\ell. \quad /2.6/$$

Нетрудно проверить, что

$$\dot{\mathcal{G}} = \dot{h}_0 \phi_0 - \dot{h}_\ell \phi_\ell - \int dx \alpha \dot{\phi}^2, \quad /2.7/$$

и при постоянных значениях h_0 и h_ℓ изменение \mathcal{G} определяется лишь диссипативными членами. Если $h_0 = h_\ell = h_{ex}$, то добавка к энергии в /2.6/ имеет вид $-(\phi_\ell - \phi_0) h_{ex}$, где величина $\phi_\ell - \phi_0 = 2\pi\Phi/\Phi_0$ пропорциональна полной намагниченности перехода. Таким образом, соотношение между \mathcal{G} и \mathcal{E} аналогично соотношению между термодинамическим потенциалом и свободной энергией системы в магнитном поле. Хотя и при $h_0 = h_\ell$ обобщенный гамильтониан \mathcal{G} по физическому смыслу отличается от "настоящего" термодинамического потенциала, используемого для описания термодинамики однородного ДДП в магнитном поле /5/, эта аналогия полезна.

В частности, уравнение для статических состояний ДДП

$$\phi''(x) = [1 - \sum \mu_i \delta(x - x_i)] \sin \phi(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \quad /2.8/$$

и граничные условия /2.5/ вытекают из вариационного принципа $\delta\mathcal{G}|\phi\rangle = 0$, а требование положительной определенности второй вариации, $\delta^2\mathcal{G}|\phi\rangle > 0$, дает условие локальной устойчивости состояния $\phi(x)$. Условие $\delta^2\mathcal{G} > 0$, как известно /18,19/, равносильно требованию положительной определенности краевой задачи

$$-\psi''(x) + [1 - \sum \mu_i \delta(x - x_i)] \psi(x) \cos \phi(x) = \omega^2 \psi(x), \quad \psi'(0) = \psi'(\ell) = 0, \quad /2.9/$$

где $\phi(x)$ - решение задачи $\delta\mathcal{G} = 0$. Это же условие можно получить, подставив в уравнение /2.2/ и в граничное условие /2.5/ возмущенное решение

$$\phi(x, t) = \phi(x) + e^{-\alpha t/2} \sum_n \psi_n(x) (a_n e^{-i\omega_n t} + a_n^* e^{i\omega_n t}) + \dots, \quad /2.10/$$

где $|a_n|$, $|a_n^*| \ll 1$ и $\delta \mathcal{G}\{\phi\} = 0$. В линейном приближении получаем, что ψ_n - собственные функции краевой задачи /2.9/ с собственными значениями $\omega_n^2 = \bar{\omega}_n^2 + a^2/4$. Из /2.4/ видно, что возмущенное решение не будет нарастать, т.е. будет устойчивым лишь при условии, что наименьшее собственное значение ω_0^2 положительно. Кроме того, разложение /2.10/ описывает развитие во времени любого малого возмущения; достаточно выразить a_n , a_n^* через $\phi(\mathbf{x}, 0)$, $\phi_1(\mathbf{x}, 0)$ и известные собственные функции ψ_n . Если $\omega_0^2 > 0$ и $4\omega_0^2 a^{-2} \gg 1$, то ω_0 определяет частоту отклика системы в состоянии $\phi(\mathbf{x})$ на произвольное малое возмущение. Если $\omega_0^2 < 0$,

то состояние неустойчиво, но при $|\bar{\omega}_0^2| = |\omega_0^2| + \frac{a^2}{4} \ll 1$ можно говорить о его "времени жизни" $\Gamma^{-1} \sim (|\bar{\omega}_0| - a/2)^{-1}$. Таким образом, для полной характеристики статического состояния необходимо находить и его собственные частоты ω_n .

При изменении параметров $p = (h_0, h_l, \mathbf{x}_i, \mu_i)$ сами состояния $\phi(\mathbf{x}) \equiv \phi(\mathbf{x}; p)$ и частоты $\omega_n \equiv \omega_n(p)$ меняются непрерывно, а их число меняется скачком, когда одна из частот проходит через нуль*. Точки $p = p_c$ в пространстве параметров, в которых одно из собственных значений $\omega_n(p)$ обращается в нуль, мы в дальнейшем отождествляем с точками бифуркации, а поверхность, определяемую уравнением $\omega_n(p) = 0$, называем поверхностью бифуркаций, или поверхностью катастроф семейства состояний $\phi(\mathbf{x}; p)$. Знание бифуркационных поверхностей позволяет получить качественное представление о состояниях ДДП, а вблизи них можно построить простые разложения самого решения $\phi(\mathbf{x}; p)$, его энергии $\mathcal{G}(p)$ и собственных частот $\omega_n(p)$ в ряды по степеням $p - p_c$. Хотя такая бифуркационная теория возмущений имеет совершенно общий характер, мы не будем останавливаться на общей конструкции, а построим необходимое в дальнейшем разложение по отклонению краевого магнитного поля h_0 от критического значения h_c , при котором некоторая собственная частота обращается в нуль, например, $\omega_0(h_c) = 0$. При этом $\phi(\mathbf{x}; h_0)$, $\mathcal{G}(h_0)$ и $\omega^2(h_0)$ можно разложить по степеням параметра $\epsilon = (h_0 - h_c)1/2$, что соответствует порождению или уничтожению в точке бифуркации двух решений /ср. /20-23//. Представив $\phi(\mathbf{x}; h_0)$ в виде

$$\phi(\mathbf{x}; h_0) = \phi_c(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \chi_n(\mathbf{x}), \quad /2.11/$$

где $\phi_c(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}; h_c)$, можно найти функции $\chi_n(\mathbf{x})$ подстановкой /2.11/ в /2.8/ и /2.5/. Для простоты записи положим $h_l = 0$ и введем для энергии джозефсоновских токов обозначение

*Это следует из общей теории устойчивости и бифуркаций, восходящей к работам А.М.Ляпунова и Э.Шмидта /20,21/. В задачах, подобных нашей, это явление недавно обсуждалось в работах /22,23/.

$$[1 - \sum \mu_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)] (1 - \cos \phi) = V(\phi; \mathbf{x}), \quad /2.12/$$

подчеркивающее общий характер получаемых ниже формул. Тогда уравнение /2.8/ можно представить в форме $\phi'' = V^{(1)}$, где $V^{(n)} = \partial^n V / \partial \phi^n$, а /2.9/ принимает вид

$$\hat{K} \psi = -\psi'' + V^{(2)} \psi = \omega^2 \psi. \quad /2.9a/$$

Нетрудно убедиться, что функции χ_n удовлетворяют уравнениям

$$\hat{K} \chi_1 = 0; \quad \hat{K} \chi_n = f_n(V_c^{(3)}, \dots, V_c^{(n+1)}; \chi_1, \dots, \chi_{n-1}), \quad n \geq 2, \quad /2.13/$$

где $V_c^{(n)} = V^{(n)}(\phi_c; \mathbf{x})$, и граничным условиям

$$\chi_n'(0) = 0, \quad n \neq 2; \quad \chi_2'(0) = 1; \quad \chi_n'(\ell) = 0. \quad /2.14/$$

Заметим, что функции f_n легко вычисляются, например,

$$f_2 = -\frac{1}{2} V_c^{(3)} \chi_1^2, \quad f_3 = -(V_c^{(3)} \chi_1 \chi_2 + \frac{1}{6} V_c^{(4)} \chi_1^3).$$

Так как /2.9/ имеет решение при $\omega^2 = 0$, то существует решение уравнения $\hat{K} \chi_1 = 0$, удовлетворяющее условиям $\chi_1'(0) = \chi_1'(\ell) = 0$ и определенное с точностью до нормировки. Выбрав второе решение этого уравнения $\bar{\chi}_1$ с нормировкой $\bar{\chi}_1'(0) = 1$, можно записать решение уравнений /2.13/ при $n \geq 2$ в виде

$$\chi_n(\mathbf{x}) = c_n \chi_1(\mathbf{x}) - \chi_1^{-1}(0) \int_0^\ell dy [\chi_1(\mathbf{x}) \bar{\chi}_1(y) - \bar{\chi}_1(\mathbf{x}) \chi_1(y)] f_n(y). \quad /2.15/$$

Условие $\chi_n'(\ell) = 0$ для этого решения выполнено, а условия $\chi_2'(0) = 1$, $\chi_n'(0) = 0$, $n > 2$, позволяют фиксировать нормировку χ_1 и последовательно находить неизвестные константы c_n . Из условия $\chi_2'(0) = 1$ следует соотношение

$$\chi_1(0) = \int_0^\ell dx f_2 \cdot \chi_1 \equiv \langle f_2 \chi_1 \rangle = -\frac{1}{2} \langle V_c^{(3)} \chi_1^3 \rangle, \quad /2.16/$$

фиксирующее вещественные функции $\chi_1(\mathbf{x})$ с точностью до знака. Двум выборам знака $\chi_1(0)$ соответствуют два решения, появившихся в точке бифуркации и сливающихся при $\epsilon \rightarrow 0$.

С помощью полученного разложения ϕ нетрудно теперь найти разложения в ряды по ϵ для ω^2 и \mathcal{G} . Для получения разложения ω^2 представим ψ , $V^{(2)}$ и ω^2 в уравнении /2.9a/ в виде рядов по степеням ϵ :

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \psi_{(n)}, \quad \omega^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \omega_{(n)}^2, \quad V^{(2)}(\phi; \mathbf{x}) = V_c^{(2)} + \epsilon V_c^{(3)} \chi_1 + \dots$$

Для $\psi_{(n)}$ нетрудно получить интегральные представления, совершенно аналогичные /2.15/, и из условий $\psi'_{(n)}(0) = 0$ можно последовательно находить $\omega_{(n)}^2$. В первом приближении получаем

$$\omega^2 = -2\epsilon \chi_1(0) < \chi_1^2 >^{-1}, \quad /2.17/$$

так что решение, для которого $\chi_1(0) > 0$, всегда нестабильно.

Разложение для \mathcal{G} можно найти, подставив /2.11/ в /2.6/ и используя /2.13/ и /2.14/. Проще, однако, воспользоваться общими свойствами функции $\mathcal{G}(h_0, h_\ell)$, которую с учетом обозначения /2.12/ перепишем в виде

$$\mathcal{G} = \int_0^\ell dx \left[-\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi; \mathbf{x}) \right] + h_0 \phi_0 - h_\ell \phi_\ell. \quad /2.18/$$

Продифференцировав это выражение по h_0 /или h_ℓ /, с учетом уравнения $\phi'' = V^{(1)}$ и граничных условий легко найти, что

$$\partial \mathcal{G} / \partial h_0 = \phi_0, \quad \partial \mathcal{G} / \partial h_\ell = -\phi_\ell. \quad /2.19/$$

Если $h_0 = h_\ell = h_{ex}$, то $\partial \mathcal{G} / \partial h_{ex} = -(\phi_\ell - \phi_0)$ - в полном соответствии с термодинамической аналогией. С помощью /2.19/ и /2.11/ теперь находим

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_c + \int_{h_0}^{h_c} dh_0 \phi_0 = \mathcal{G}_c + \epsilon^2 \phi_c(0) + \frac{2}{3} \epsilon^{3/2} \chi_1(0) + \dots \quad /2.20/$$

Отсюда видно, что производная $\partial \mathcal{G} / \partial h_0$ непрерывна, а $\partial^2 \mathcal{G} / \partial h_0^2$ обращается при $h_0 \rightarrow h_c$ в бесконечность, так что эта точка бифуркации аналогична точке фазового перехода второго рода. Сравнение /2.20/ и /2.17/ показывает, что состояние с большей энергией ($\chi_1(0) > 0$) всегда неустойчиво, т.к. для него $\omega^2 < 0$. Кроме того, при $h_0 \rightarrow h_c$ для состояния с меньшей энергией $\partial^2 \mathcal{G} / \partial h_0^2 < 0$, а для состояния с большей энергией $\partial^2 \mathcal{G} / \partial h_0^2 > 0$.

Для качественного анализа энергетического спектра связанных состояний и для приближенной оценки их энергий полезно более общее свойство выпуклости функции $\mathcal{G}(h_0, h_\ell)$, выполняющееся для любой ее ветви, соответствующей устойчивым состояниям. Для доказательства достаточно вспомнить, что $\delta \mathcal{G} = 0$, $\partial^2 \mathcal{G} > 0$ для любых вариаций функции ϕ , в частности для $\delta \phi = \rho_0 \delta \phi / \partial h_0 + \rho_\ell \delta \phi / \partial h_\ell$, где ρ_0 и ρ_ℓ - независимые бесконечно малые параметры. С помощью уравнения и граничных условий для ϕ легко найти, что

$$\mathcal{G}\{\phi + \delta \phi\} - \mathcal{G}\{\phi\} = -\frac{\rho_0^2}{2} \frac{\partial \phi_0}{\partial h_0} + \frac{\rho_\ell^2}{2} \frac{\partial \phi_\ell}{\partial h_\ell} + \frac{\rho_0 \rho_\ell}{2} \left(\frac{\partial \phi_0}{\partial h_\ell} - \frac{\partial \phi_\ell}{\partial h_0} \right). \quad /2.21/$$

Так как это выражение положительно, то*

$$\partial^2 \mathcal{G} / \partial h_0^2 = \partial \phi_0 / \partial h_0 < 0, \quad \partial^2 \mathcal{G} / \partial h_\ell^2 = \partial \phi_\ell / \partial h_\ell > 0. \quad /2.22/$$

Согласно /2.19/

$$\partial \phi_0 / \partial h_\ell = \partial^2 \mathcal{G} / \partial h_0 \partial h_\ell = -\partial \phi_\ell / \partial h_0. \quad /2.23/$$

Используя это условие, нетрудно показать, что из /2.21/ и /2.22/ вытекает неравенство

$$(\partial \phi_0 / \partial h_\ell)^2 = (\partial \phi_\ell / \partial h_0)^2 < -(\partial \phi_0 / \partial h_0) (\partial \phi_\ell / \partial h_\ell). \quad /2.24/$$

С учетом /2.22/ и /2.23/ отсюда и следует выпуклость функции $\mathcal{G}(h_0, h_\ell)$.

Как отмечено выше, бифуркационная теория возмущений имеет совершенно общий характер. Например, в работе /24/ /см. также /19// аналогичные разложения были применены для анализа абрикосовских вихрей. Можно сказать, что БТВ является обобщением разложения по параметру порядка вблизи точек фазового перехода. Проведенный анализ показывает, что для качественного понимания устройства связанных состояний в неоднородной системе достаточно определить точки бифуркации и соответствующие состояния ϕ_c . После этого для количественных расчетов можно применить БТВ.

Все сказанное до сих пор очевидно применимо не только к неоднородным ДПП, но и к любым системам, описываемым скалярным полем $\phi(\mathbf{x}, t)$ с потенциалом $V(\phi; \mathbf{x})$, удовлетворяющим естественным физическим ограничениям /ср. /18,19,22,23/ /. Дальнейший анализ относится к ДДП с микронеоднородностями, т.е. потенциал определяется соотношением /2.12/.

3. СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ И БИФУРКАЦИИ В ДДП С МИКРОНЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Как ясно из предыдущего, качественная структура статических состояний следующая. При данных значениях магнитного поля на краях обычно существует несколько состояний, отличающихся величиной и распределением магнитного потока и энергией \mathcal{G} . Некоторые из этих состояний могут оказаться локально устойчивыми, и в принципе возможно, что при данных значениях краевых полей существует более одного устойчивого состояния. Ниже будет показано, что эта интересная с общезначимой и прикладной точки

*При $h_0 = h_\ell = h_{ex}$ отсюда следует $\partial \mathcal{G} / \partial h_{ex} > 0$, т.е. полный поток возрастает при росте внешнего поля. Это условие аналогично известному термодинамическому соотношению $(\partial V / \partial p)_T < 0$, причем $-h_{ex}$ - аналог давления, а Φ - аналог объема.

зрения ситуация реализуется уже для полубесконечного ДДП с одной микронеоднородностью и допускает полное исследование.

Решения уравнения /2.8/ с граничными условиями /2.5/ проще всего построить с помощью первых интегралов на однородных участках

$$\phi'^2/4 = k_i^2 - \cos^2(\phi/2), \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}, \quad /3.1/$$

где k_i - константы интегрирования. Из /3.1/ следует, что общее решение на любом однородном интервале можно записать в виде

$$\cos(\phi/2) = -k_i \operatorname{вп}(x + \ell_i | k_i), \quad /3.2/$$

где $\operatorname{вп}$ - эллиптический синус Якоби^{/25/}, а ℓ_i - константы. Неизвестные k_i , ℓ_i ($i = 0, 1, \dots, n$) определяются из n условий непрерывности $\phi(x)$ в точках x_i , и условий скачка магнитного поля

$$\phi'(x_i + 0) - \phi'(x_i - 0) = -\mu_i \sin \phi(x_i) \quad /3.3/$$

и двух граничных условий /2.5/.

Уравнение, определяющее состояния ДДП, можно получить следующим образом. При любом заданном ϕ_0 значение k_0^2 определяется из /3.1/:

$$k_0^2 = c_0^2 + h_0^2/4, \quad /3.4/$$

где принято обозначение $c_i = \cos(\phi_i/2)$, $s_i = \sin(\phi_i/2)$, $i = 0, 1, \dots, n+1$. По известным ϕ_i , k_i^2 можно определить ϕ_{i+1} , k_{i+1}^2 . Действительно, из /3.2/ следует, что^{/25/}

$$x_{i+1} - x_i = F(\operatorname{Arcsin}(c_i/k_i) | k_i) - F(\operatorname{Arcsin}(c_{i+1}/k_{i+1}) | k_{i+1}), \quad /3.5/$$

где F - эллиптический интеграл первого рода. Из /3.5/ можно найти c_{i+1} по известным c_i и k_i . При $k_i > 1$ удобнее пользоваться соотношением

$$x_{i+1} - x_i = k_i^{-1} [F((\pi - \phi_i)/2 | k_i^{-1}) - F((\pi - \phi_{i+1})/2 | k_i^{-1})], \quad /3.5a/$$

которое получается из /3.5/ с помощью известного преобразования функции F ^{/25/}. Формулу /3.5a/ можно получить и непосредственно из /3.1/:

$$x_{i+1} - x_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \int_{\phi_i}^{\phi_{i+1}} d\phi [\phi'(\phi)]^{-1} = k_i^{-1} \int_{c_i}^{c_{i+1}} dc [(1 - c^2)(1 - k_i^{-2} c^2)]^{-1/2}, \quad /3.6/$$

что равно /3.5a/ по определению F ^{/25/}. Представление $x_{i+1} - x_i$ в виде интеграла по c обычно более удобно для численных расче-

тов и качественного анализа и будет часто использоваться в дальнейшем. Значение k_{i+1}^2 определяется теперь из условий /3.1/ и /3.3/:

$$(k_{i+1}^2 - c_{i+1}^2)^{1/2} = (k_i^2 - c_{i+1}^2)^{1/2} - \mu_i s_{i+1} c_{i+1}, \quad /3.7/$$

где корень в правой части следует понимать в алгебраическом смысле. На практике проследить за переменами знака несложно.

Пользуясь соотношениями /3.4/, /3.5/ и /3.7/, можно в конце концов выразить значения k_n^2 и ϕ_{n+1} через свободный параметр ϕ_0 . Подставив эти значения в граничное условие

$$k_n^2 - c_{n+1}^2 = h_n^2/4, \quad /3.8/$$

получаем уравнение для ϕ_0 , которое позволяет найти все возможные состояния. Удобно изображать их на диаграмме в плоскости (ϕ, ϕ') , рис.2. Каждому состоянию соответствует кусочно-непрерывная кривая с началом в (ϕ_0, h_0) и концом в (ϕ_n, h_n) , составленная из кусков, описываемых уравнениями /3.1/. Значения ϕ_i должны удовлетворять соотношениям /3.5/, а значения k_i определяются из /3.7/.

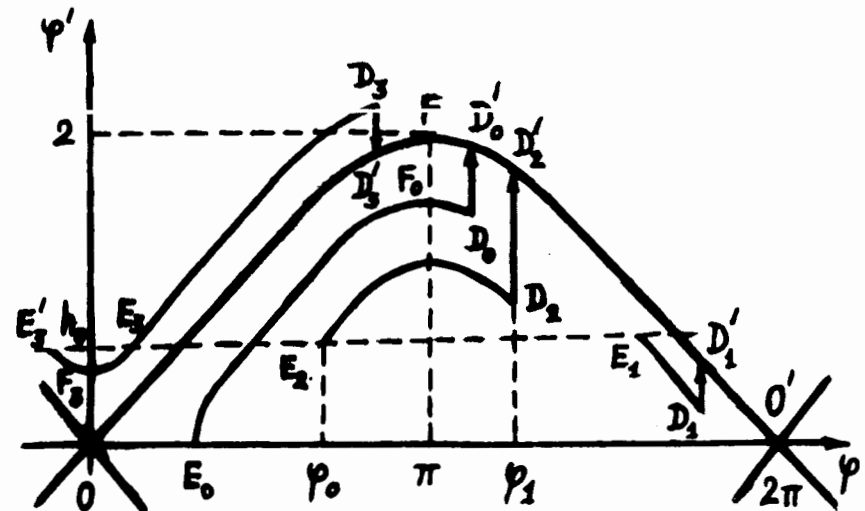


Рис.2

Изучим простейшие связанные состояния. Для бесконечного перехода с одной микронеоднородностью ($x_0 = -\infty$, $x_1 = 0$, $x_2 = +\infty$) существует лишь два статических решения, соответствующих флюксону или антифлюксону, локализованным на неоднородности. Действительно, энергия может быть конечной лишь при условиях

$\cos \phi(\pm\infty) = 1, \phi'(\pm\infty) = 0$, т.е. $(\phi(\pm\infty), \phi'(\pm\infty)) = (2\pi N_{\pm}, 0)$, где N_{\pm} - целые. Так как в эти точки входят лишь линии, соответствующие $k_0 = k_1 = 1$, то должно быть $N_+ - N_- = \pm 1$, причем можно взять $N_- = 0$ и $N_+ = 1$ или $N_- = 1, N_+ = 0$; решения, получаемые сдвигом $\phi \rightarrow \phi + 2\pi N$, физически тождественны. Первому решению соответствует на рис.2 кривая OFO', а второму - ее зеркальное отражение относительно оси ϕ . Из условия $k_0 = k_1 = 1$ следует, что скачок ϕ' в точке $x_1 = 0$ равен нулю и согласно /3.3/ $\phi_1^- = \pi$. Из /3.2/ легко получаем, что

$$\phi(x) = 2 \arccos(\mp \operatorname{th} x) = 4 \arccos e^{\pm x}, \quad /3.9/$$

где верхний знак относится к связанному флюксону. Распределение потока /3.9/ совпадает с известным распределением для свободного покоящегося флюксона в однородном переходе /1/, однако его энергия, как легко найти из /2.3/, равна $\mathcal{E} = 8 - 2\mu_1$. При $\mu_1 > 0$ это меньше минимальной энергии $\mathcal{E}_0 = 8$ свободного флюксона в однородном переходе, что и дает право говорить о связанном состоянии и о притяжении флюксона неоднородностью. Состояние /3.9/ существует при любом значении μ_1 , в том числе и при $\mu_1 < 0$, однако в последнем случае оно нестабильно. Действительно, для распределения /3.9/ $\cos \phi = 1 - 2 \operatorname{sech}^2 x$ и уравнение /2.9/ можно точно решить, сведя его с помощью замены $\psi = e^{-p|x|} v(\operatorname{th} |x|)$ к уравнению Якоби для функции v . Несложное исследование позволяет найти единственное собственное значение, принадлежащее дискретному спектру, и соответствующую собственную функцию

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2} \mu_1 [(1 + (\mu_1/4)^2)^{1/2} - (\mu_1/4)]; \quad \psi_0 = e^{-p_0|x|} (p_0 + \operatorname{th} |x|), \quad /3.10/$$

где $p_0^2 = 1 - \omega_0^2$. При $\omega^2 \geq 1$ расположен непрерывный спектр. Из /3.10/ видно, что при $\mu_1 > 0$ состояние /3.9/ стабильно, а при $\mu_1 < 0$ - нестабильно, т.е. $\mu_1 = 0$ есть точка бифуркации связанных состояний.

Заметим, что при больших значениях $|\mu_i|$ могут возникнуть новые связанные состояния. Например, если $|\mu_1| \geq 2$, то может образоваться состояние типа "флюксон - антифлюксон", у которого в точке x_1 скачком изменяется знак магнитного поля. В дальнейшем рассматриваются лишь притягивающие неоднородности, для которых $0 < \mu_i < 1$. Ограничение $\mu_i < 1$ связано с тем, что реальная неоднородность образуется в результате уменьшения критического тока Джозефсона на отрезке конечной длины Δx , см. рис.1. При аппроксимации этого тока выражением $(1 - \mu_i \delta(x - x_i))$ должно поэтому выполняться неравенство $\Delta x - \mu_i \geq 0$. Так как приближение δ -функцией имеет смысл лишь при достаточно малом Δx , меньшем размера флюксона, то отсюда и следует ограничение на μ_i . Неоднородность большего размера можно, конечно, аппроксимировать несколькими близко расположенными локальными неоднородностями.

Более богатый набор связанных состояний образуется в бесконечном переходе с двумя микрон неоднородностями. Рассмотрим для простоты случай $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и положим $x_0 = -\infty, x_1 = -\Delta, x_2 = \Delta, x_3 = +\infty$. Как и в предыдущем случае, $(\phi(\pm\infty), \phi'(\pm\infty)) = (2\pi N_{\pm}, 0)$, но теперь возможные значения $|N_+ - N_-|$ зависят от Δ . Воспользовавшись симметрией задачи при отражении $x \rightarrow -x$, можно свести ее решение к анализу четырех случаев:

1. $\phi(0) = \pi, \phi(+\infty) = 2\pi, \phi(-\infty) = 0$, т.е. $\Phi = \Phi_0$;
2. $\phi(0) = 0, \phi(\pm\infty) = \pm 2\pi N, N = 1, 2, \dots$, т.е. $\Phi = 2N\Phi_0$;
3. $\phi(0) = -\pi, \phi(+\infty) = 2\pi N, \phi(-\infty) = -2\pi(N+1)$, т.е. $\Phi = (2N+1)\Phi_0$;
4. $\phi(0) = 2 \arccos k_1, \phi(\pm\infty) = 2\pi, \Phi = 0$.

Остальные решения можно получить заменой $\phi' \rightarrow -\phi'$ и физически несущественным сдвигом ϕ . Решение достаточно построить на полу бесконечном интервале $0 \leq x < +\infty$ при известном значении $\phi(0)$. На рис.2 решению первого типа соответствует кривая $F_0 D_0 D_0' O$, решению второго типа при $N = 1$ - кривая $F_3 D_3 D_3' O'$, решению четвертого типа - $E_0 D_0 D_0' O'$ и т.д. Значение k_1^2 определяется из /3.7/, т.е.

$$k_1^2 - 1 = \mu_2 c_2 (1 - c_2^2) (2 + \mu_2 c_2). \quad /3.11/$$

Когда c_2 изменяется в пределах $-1 \leq c_2 \leq +1$, параметр k_1^2 принимает значения в интервале $k_1^2 \leq k_1^2 \leq k_1^2$, где k_1^2 и k_1^2 - соответственно минимум и максимум функции $k_1^2(c_2)$. При $\mu_2 < \frac{1}{2}$ можно пользоваться приближением

$$k_{\pm}^2 = k_1^2(c_{\pm}) = 1 \pm \frac{4\mu_2}{3\sqrt{3}} (1 \pm \frac{\mu_2}{2\sqrt{3}} + \dots), \quad c_{\pm} = \pm (\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{\mu_2}{18} + \dots). \quad /3.12/$$

Вместо того, чтобы решать уравнения /3.5/, удобно просто задавать значение c_2 , определять из /3.11/ значение k_1^2 и вычислять по формулам /3.5/ или /3.6/ $\Delta = (x_2 - x_1) / 2$. Экстремальным значениям Δ соответствуют точки бифуркации. Таким способом легко убедиться, что состояния первого типа и состояния второго типа с потоком $2\Phi_0$ существуют при любом Δ , тогда как другие значения образуются лишь при достаточно большом значении Δ *. Например, связанное состояние флюксона и антифлюксона, т.е. решения четвертого типа /см. $E_0 D_0 D_0' O'$ на рис.2/ не могут существовать.

*Помимо основных состояний первого и четвертого типа, при достаточно больших значениях Δ существуют неустойчивые возбужденные состояния, в которых ϕ' многократно меняет знак в интервале $(-\Delta, \Delta)$, они в дальнейшем не рассматриваются.

воват, если $\Delta < K(k_-) \approx F(\pi/2 | k_-)$. Действительно,

$$\Delta = F(\pi/2 | k_1) - F(\arcsin(c_2/k_1) | k_1) > K(k_1) \geq K(k_-), \quad /3.13/$$

а точное значение минимума Δ , зависящее от μ , легко найти численно.

Собственные частоты изученных состояний проще всего вычислить в приближении, описанном в следующем разделе, хотя при $\phi(\Delta) \sim \pi N$ можно решить и точные уравнения. Общая структура связанных состояний на двух неоднородностях достаточно проста, и мы опустим подробности. Задача о трех и более неоднородностях существенно сложнее и заслуживает специального исследования.

Для полубесконечного перехода ($x_0 = 0, x_1 > 0, x_2 = +\infty$) с заданным значением h_0 также можно получить полное решение задачи о связанных статических состояниях на основе точных уравнений. Физически такой переход реализуется, если $x_2 = l \gg 1, l - x_1 \gg x_1$ и $h_l = 0$. На правом конце положим $\phi(+\infty) = 2\pi$. Хотя уравнение /2.8/ и граничное условие /2.5/ инвариантны при сдвиге $\phi \rightarrow \phi + 2\pi N$, выражение для энергии /2.6/ неинвариантно, $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} + 2\pi N h_0$. Поэтому и необходимо фиксировать значение $\phi(+\infty) = 2\pi N_+$. Наблюдаемые величины /разности энергий при данном h_0 , магнитные поля, токи/ не зависят от выбора N_+ , а при заданном N_+ непрерывно зависят от h_0 .

Поставленную задачу можно решать так же, как и задачу о двух неоднородностях в бесконечном переходе. Очевидно, что $k_1 = 1$, а k_0 определяется по задаваемому значению c_1 формулой /3.11/, в которой надо заменить k_1, c_2, μ_2 на k_0, c_1, μ_1 . Значения c_0 находим по формуле /3.4/, после чего из /3.5/ или /3.6/ вычисляем x_1 . Типичные состояния изображены на рис.2: $E_1 D_1 D_1' O', E_2 D_2 D_2' O', E_3 D_3 D_3' O', E_3' D_3' D_3' O'$. При $h_0 = 0$ и небольших значениях x_1 существует лишь одно стабильное состояние: $\phi(x) \approx 2\pi$. Как следует из формулы /3.13/, в которой $\Delta, k_1, c_2 \rightarrow x_1, k_0, c_1$, при $x_1 > K(k_-)$ может появиться еще одно стабильное связанное состояние в нулевом поле, соответствующее кривой $E_0 D_0 D_0' O'$.

Решения с $|k_0^2 - 1| \ll 1$, в частности все решения при $\mu_1 \ll 1$, можно выразить через элементарные функции, разлагая интеграл в /3.6/ по степеням $(k_0^2 - 1)$. В общем случае они представляются весьма громоздкими формулами, и мы приводим лишь результаты для состояний с малыми $|s_0|$ и $|s_1|$ при $h_0 \rightarrow 0$. Если $|2\pi - \phi_1| < |2\pi - \phi_0|$, то

$$s_0 = \frac{1}{2} h_0 \operatorname{cth}(x_1 + \nu_-) + \dots, \quad s_1 = \frac{1}{2} h_0 \operatorname{ch}(\nu_-) / \operatorname{sh}(x_1 + \nu_-) + \dots; \quad /3.14/$$

$$\mathcal{G} = 2\pi h_0 - \frac{1}{2} h_0^2 \operatorname{cth}(x_1 + \nu_-) + o(h_0^2),$$

а для $|\phi_0|, |\phi_1| \ll 1$

$$s_0 = -\frac{1}{2} h_0 \operatorname{th}(x_1 - \nu_+) + \dots, \quad s_1 = \frac{1}{2} h_0 \operatorname{sh}(\nu_+) / \operatorname{ch}(x_1 - \nu_+) + \dots; \quad /3.15/$$

$$\mathcal{G} = 8 - \frac{1}{2} h_0^2 \operatorname{th}(x_1 - \nu_+) + o(h_0^2),$$

где $\nu_{\pm} = \frac{1}{2} \ln(\pm 1 + 2/\mu)$. Напомним, что для вычисления \mathcal{G} не нужно знать $\phi(x)$, достаточно с помощью /3.1/ заменить интегрирование по x интегрированием по $\cos(\phi/2)$ или $\sin(\phi/2)$ /ср. с /3.6//, после чего /3.14/ и /3.15/ получаются без труда.

Простые и полезные аналитические выражения существуют и для состояний, подобных связанному флюксону в бесконечном переходе, т.е. при $|c_1| \ll 1, |k_0^2 - 1| \ll 1$. С помощью /3.4/, /3.6/ и /3.11/ нетрудно вычислить разложения c_0 и h_0 по степеням c_1 . Если потребовать, чтобы $dh_0/dc_1 = 0$ при $c_1 = 0$, то можно найти точку бифуркации, все характеристики которой выражаются через элементарные функции. Условие $dh_0/dc_1 = 0$ при $c_1 = 0$ дает соотношение между μ_1 и x_1 :

$$\frac{1}{2} \mu_1 = [(1 + \operatorname{ch}^2 x_1) \operatorname{cth} x_1 - 1]^{-1}. \quad /3.16/$$

При этом $h_c = 2 \operatorname{sech} x_1$ и

$$h_0^2 - h_c^2 = \mu_1 c_1^2 [3 \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch}^3 x_1 + \mu_1 (5 + 3 \operatorname{sh}^2 x_1 - 4 \operatorname{sh}^2 x_1)] + o(c_1^2). \quad /3.17/$$

С помощью /3.14/ и /3.11/ теперь нетрудно найти первые члены разложений $\phi(x)$ и \mathcal{G} по степеням $\epsilon = (h_0 - h_c)^{1/2}$ /см /2.11/, /2.20// и убедиться, что решение при $c_1 > 0$ имеет меньшую энергию. Так как $\phi_c(x) = 2 \arccos(-\operatorname{th}(x - x_1))$, то уравнение /2.9/ сводится к уравнению Якоби и можно показать, что наименьшее собственное значение ω_0^2 при $\phi = \phi_c$ равно нулю. Таким образом, состояние с меньшей энергией при $\epsilon \neq 0$ стабильно. Если $\epsilon = 0$ /т.е. $c_1 = 0$ /, то энергия связанного состояния равна

$$\mathcal{G}_c = 4 \left[1 + \operatorname{th} x_1 + \operatorname{sech}(x_1) \arccos(\operatorname{th} x_1) - \frac{1}{2} \mu_1 \right], \quad /3.18/$$

где μ_1 определяется из /3.16/. Когда μ_1 и x_1 не удовлетворяют этому соотношению, бифуркация происходит при $c_1 \neq 0$. Численный расчет по формулам /3.4/, /3.6/ и /3.11/ показывает, что для типичного значения $\mu_1 \sim 1/2$ при $0,5 \leq x_1 \leq 1,5$ бифуркация действительно происходит при малом c_1 и $h_c = 2 \operatorname{sech} x_1$.

Изучим теперь общую картину эволюции статических состояний при изменении c_1 от -1 до +1, не фиксируя значение x_1 , а вычисляя его по формулам /3.5/ или /3.6/. Удобно изображать состояния кривыми на плоскости (x_1, h_0) , соответствующими постоянно-му значению c_1 , рис.3. Вид этих кривых легко уяснить с помощью формулы /3.6/, которая в данном случае имеет вид

$$x_1 = \int_{c_1}^{c_0} dc [(1 - c^2)(k_0^2 - c^2)]^{-1/2}. \quad /3.6a/$$

При заданном c_1 параметр k_0^2 определяется из /3.11/, где $k_1, c_2, \mu_2 \rightarrow k_0, c_1, \mu_1$, а $c_0 = \pm(k_0^2 - r_0^2)^{1/2}$, $r_0 = h_0/2 = h_0/h_m$. см. /3.4/. Дифференцируя /3.6а/ по r_0 , легко убедиться, что при фиксированном c_1

$$dr_0/dx_1 = \mp [(k_0^2 - r_0^2)(r_0^2 - k_0^2 + 1)]^{1/2}, \quad /3.19/$$

$$d^2r_0/dx_1^2 = -r_0(2r_0^2 - 2k_0^2 + 1),$$

т.е. указанные кривые имеют максимум при $r_0^2 = k_0^2$ и минимум при $r_0^2 = k_0^2 - 1$. Полагая в /3.6а/ $c_0 = 0$ и $c_0 = \pm 1$, определим траектории максимумов и минимумов. Они изображены на рис.3 штриховыми линиями, а направление движения при возрастании c_1 указано стрелками. Тонкими сплошными линиями нарисованы типичные кривые $c_1 = \text{const}$, причем кривые с максимумами (M_0, M_1) соответствуют $c_1 < 0$ /состояния $E_1D_1D_1'O', E_2D_2D_2'O'$ на рис.2/, а кривые с минимумами (M_2, M_3, M_4) соответствуют $c_1 > 0$ / $E_3D_3D_3'O'$ или $E_3'D_3D_3'O'$ /. Легко показать, что кривая $c_1 = c_-$ имеет наименьший максимум, а кривая $c_1 = c_+$ - наивысший минимум. Теперь нетрудно понять, что семейство кривых $c_1 = \text{const}$ имеет три огибающих, изображенных жирными линиями. Огибающая V_1V_1' соответствует малым c_1 , для V_2V_2' значение c_1 близко к c_- , а для V_3V_3' - к c_+ . Кривые V_2V_2' и V_3V_3' имеют минимумы M_1 и M_3 при $x_1 \sim 1$. Описанные огибающие и представляют собой бифуркационные кривые. При фиксированном x_1 ниже V_1V_1' имеется два состояния /пересечение кривых M_4 и M_1 /. между

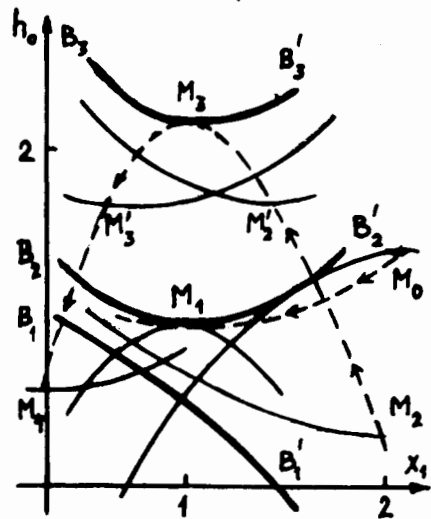


Рис.3

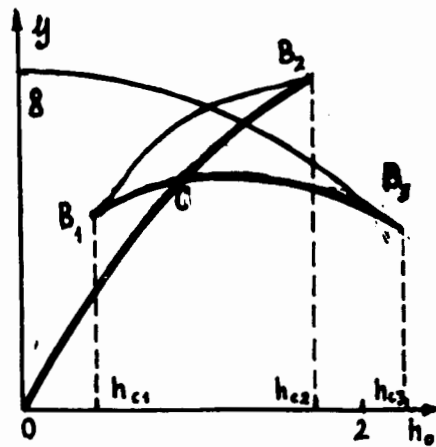


Рис.4

V_1V_1' и V_2V_2' появляется еще два состояния /пересечение кривых M_0 и M_1 /, между V_2V_2' и V_3V_3' остается два состояния. Нетрудно понять, какие состояния стабильны. При $h_0 \rightarrow 0$ состояние, описываемое формулами /3.14/, имеет наименьшую возможную энергию и очевидно стабильно. Поэтому состояния на левой ветви кривой M_0 стабильны вплоть до точки касания с огибающей, а состояния правее точки касания согласно общей теории нестабильны. Выше было показано, что состояния на кривых типа M_2, M_2' стабильны до точек касания к V_1V_1' или V_2V_2' . Из общей теории следует, что состояния на изображенных участках кривых типа M_3, M_4 нестабильны. Чтобы представить зависимость \mathcal{G} от h_0 при заданном x_1 , теперь достаточно найти значения $h_0 = h_{ci}$, вычислить $\mathcal{G}_{ci} = \mathcal{G}(h_{ci})$ и воспользоваться формулами /3.14/, /3.15/, а также общими условиями /2.19/, /2.20/, /2.22/. В результате получаем типичную ($\mu_1 \sim 1/2$) кривую, изображенную на рис.4, где для наглядности допущена деформация, сохраняющая знаки $\mathcal{G}'(h_0)$ и $\mathcal{G}''(h_0)$ и порядок расположения точек h_{ci} . Как указано выше, кривые OB_2 и V_3V_1 на рис.4 соответствуют локально устойчивым состояниям, а V_2V_1 и V_3O' - неустойчивым. Энергия состояний на OC и CB_3 имеет абсолютный минимум, и поэтому они абсолютно /глобально/ устойчивы. Состояния, описываемые V_1C и CB_2 соответствуют лишь локальному минимуму энергии, так что они, вообще говоря, метастабильны. Переходы из состояний V_1C, V_2C в состояния OC, V_3C , при которых полный поток изменяется на величину $-\frac{1}{2}\Phi_0$, могут происходить за счет больших квантовых или

температурных флуктуаций. Хотя процессы такого типа в однородных системах исследовались, выявление всех механизмов перехода и определение соответствующих времен жизни в неоднородной системе представляет собой отдельную, пока не решенную задачу. В заключение заметим, что своеобразная зависимость \mathcal{G} от h_0 аналогична зависимости термодинамического потенциала газа Ван-дер-Ваальса от давления при $T < T_c$, причем состояниям на участках OC и V_3C соответствуют стабильные фазы, а состояниям на CB_2 и CB_1 - метастабильные.

4. КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ

Для вычисления собственных частот найденных выше связанных состояний и для решения более сложных задач здесь предлагается простое приближение, в котором все уравнения содержат лишь элементарные функции. Примем для энергии джозефсоновских токов непрерывно дифференцируемое приближение

$$1 - \cos \phi = \frac{1}{2} (-1)^N (\phi - \pi N)^2 + \frac{1}{8} \pi^2 [1 - (-1)^N] \quad /4.1/$$

на интервалах I_N : $(N - \frac{1}{2})\pi \leq \phi \leq (N + \frac{1}{2})\pi$, N - целое. Тогда для джоуфсоновского тока дифференцированием по ϕ получаем кусочно-линейное "пилообразное" приближение, а для $\cos \phi$ в уравнении /2.9/ еще одним дифференцированием находим кусочно-непрерывную аппроксимацию $\cos \phi \approx (-1)^N$. Предположим для упрощения изложения, что искомое решение $\phi(x)$ монотонно растет, и положим $\phi(\bar{x}_N) = (N - \frac{1}{2})\pi$, $\phi(\bar{x}_{N+1}) = (N + \frac{1}{2})\pi$. Обозначив через \bar{I}_N интервал значений x , при которых $\phi \in I_N$, т.е. $\bar{I}_N = (\bar{x}_N, \bar{x}_{N+1})$, заменим уравнения /2.8/ и /2.9/ приближениями:

$$\phi'' = [1 - \sum \mu_i \delta(x - x_i)] (-1)^N (\phi - \pi N), \quad x \in \bar{I}_N, \quad /4.2/$$

$$-\psi'' + (-1)^N [1 - \sum \mu_i \delta(x - x_i)] \psi = \omega^2 \psi, \quad x \in \bar{I}_N. \quad /4.3/$$

Функции ϕ и ψ и их первые производные непрерывны в точках \bar{x}_N , а на краях ДДП удовлетворяют обычным граничным условиям, см. /2.5/, /2.9/. Приближение /4.1/ можно уточнить, домножив правую часть на некоторое число λ^2 . Очевидная перенормировка значений x , μ_i , h_0 , h_l позволяет сохранить форму уравнений /4.2/, /4.3/ и граничных условий, и поэтому достаточно рассмотреть лишь случай $\lambda = 1$.

Решения уравнения /4.2/ на интервалах \bar{I}_N можно представить в виде

$$(\phi - \pi N) = \frac{1}{2} \pi \{-\text{ch}(x - \bar{x}_N) + a_N \text{sh}(x - \bar{x}_N)\}, \quad /4.4/$$

$$\frac{1}{2} \pi \{\text{ch}(x - \bar{x}_{N+1}) + a'_N \text{sh}(x - \bar{x}_{N+1})\},$$

$$(\phi - \pi N) = \frac{1}{2} \pi \{-\cos(x - \bar{x}_N) + a_N \sin(x - \bar{x}_N)\}, \quad /4.5/$$

$$\frac{1}{2} \pi \{\cos(x - \bar{x}_{N+1}) + a'_N \sin(x - \bar{x}_{N+1})\},$$

где параметры a_N, a'_N играют роль констант k_i^2 в /3.1/; на соответствующих интервалах можно положить $k_i^2 - 1 = (a_N^2 - 1)\pi^2/16$. Если на \bar{I}_N нет неоднородностей, то

$$a_N = a'_N = \text{cth}[(\bar{x}_{N+1} - \bar{x}_N)/2], \quad \text{ctg}[(\bar{x}_{N+1} - \bar{x}_N)/2]. \quad /4.6/$$

Если $x_i \in \bar{I}_N$, то a'_N отличается от a_N . Все параметры a_N, a'_N легко выразить через h_0, h_l и \bar{x}_N . Например, в ДДП с одной неоднородностью значение a_N слева от нее можно выразить через h_0 и $\bar{x}_N < x_1$, используя граничное условие и непрерывность $\phi'(x)$ при $x = \bar{x}_N$. Аналогично находим a'_N справа от неоднородности. Урав-

нения для определения \bar{x}_N получаются из условия непрерывности $\phi(x)$ при $x = x_1$, условия скачка

$$\phi'(x_i + 0) - \phi'(x_i - 0) = (-1)^N (\phi(x_i) - \pi N), \quad x_i \in \bar{I}_N, \quad /4.7/$$

и из соотношений /4.6/ для интервалов, не содержащих x_i . Уравнения для \bar{x}_N очевидно нелинейны, и поэтому наше приближение приводит к линейным уравнениям лишь для решений, целиком сосредоточенных на одном из интервалов \bar{I}_N . Приближенные решения /4.4/ и /4.5/ хорошо описывают зависимость точных решений от x . Если не учитывать решения, содержащие куски с $k_i^2 < 1/2$, то для всех наблюдаемых величин обычно обеспечивается точность ~10%.

Для определения ω^2 и $\psi(x)$ из уравнения /4.3/ удобно положить $f(x) = \psi'(x) / \psi(x)$. Тогда для $x \neq x_i$ при четном N

$$f = q \text{ th}(qx + \theta), \quad x \in \bar{I}_N, \quad /4.8/$$

а при нечетном N

$$f = -p \text{ tg}(px + \theta), \quad x \in \bar{I}_N, \quad /4.9/$$

где $p^2 = 1 - \omega^2$, $q^2 = 1 + \omega^2$. Если $x_i \in \bar{I}_N$, то θ имеет разные значения слева и справа от неоднородности, обозначим их θ_N и θ'_N . Связь между ними определяется условием скачка ψ' , т.е.

$$f(x_i + 0) - f(x_i - 0) = (-1)^{N+1} \mu_i, \quad x_i \in \bar{I}_N. \quad /4.10/$$

На интервале без неоднородностей $\theta_N = \theta'_N$. В граничных точках $f(x_0) = f(x_{n+1}) = 0$; если $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, то $f(x_0) = q$, $f(x_{n+1}) = -q$. Используя /4.8/-/4.10/, можно при заданных значениях \bar{x}_N исключить неизвестные параметры и получить уравнение для ω^2 . После этого легко найти $\psi(x)$ интегрированием /4.8/ и /4.9/.

Таким образом, формулы /4.4/-/4.10/, вместе с граничными условиями и требованиями непрерывности, позволяют найти связанные состояния, определяемые теперь параметрами \bar{x}_N , и вычислить их собственные частоты. Приведем простые нетривиальные примеры. Рассмотрим состояния в полубесконечном переходе, удовлетворяющие условию $\phi_0, \phi_1 \in \bar{I}_1$. Исключая все неизвестные параметры, кроме $\eta = \bar{x}_2 - x_1 + \pi/4$, можно получить для η уравнение

$$r_0 \equiv h_0 / h_m = \cos x_1 [\sin \eta + (\text{tg } x_1 - \mu_1) \cos \eta], \quad /4.11/$$

где $h_m = \pi/\sqrt{2}$ - максимальное значение h_0 , при котором могут существовать статические состояния в однородном переходе /для точных уравнений $h_m = 2$ /. Точки бифуркации $\eta = \eta_c$ определяются условием $dr_0/d\eta = 0$. Исключая из этого уравнения и из /4.11/ значение $\eta = \eta_c$, находим уравнение бифуркационной кривой

$$r_c^2 = (h_c/h_m)^2 = \cos^2 x_1 [1 + (\operatorname{tg} x_1 - \mu_1)^2]. \quad /4.12/$$

Это уравнение приближенно описывает кривую $B_2 B_2'$ на рис.3 и дает приближенное значение h_{c2} при различных x_1 и μ_1 . Из /4.12/ можно также найти положение точки M_2 на бифуркационной кривой

$$\operatorname{tg} x_1 = \frac{1}{2} [\mu_1 + (4 + \mu_1^2)^{1/2}], \quad r_c = \operatorname{ctg} x_1.$$

При $\mu_1 = 1/2$ и $\mu_1 = 1$ по этой формуле получаем $x_1; r_c = /0,91; 0,78/; /0,90; 0,66/$. Численный расчет точных уравнений дает соответственно $/0,78; 0,82/$ и $/1,02; 0,62/$. Таким образом, даже для весьма тонкой характеристики спектра связанных состояний получается неплохое приближение. Описанным выше способом можно получить уравнение для p :

$$\mu_1 = p \operatorname{tg} [p(\bar{x}_2 - x_1) - \arccos(p/\sqrt{2})] + p \operatorname{tg}(px_1). \quad /4.13/$$

Состояние стабильно, если у этого уравнения нет корней $0 < p < 1$. Если положить в /4.13/ $p = 1$, то получится кривая бифуркации, найденная выше из условия $dr_0/d\eta = 0$.

В заключение рассмотрим состояние с $x_0 \in \bar{I}_0$, $x_1 \in \bar{I}_1$. Для двух неизвестных параметров, $\eta_1 = x_1 - \bar{x}_1$ и $\eta_2 = \bar{x}_2 - x_1 + \pi/4$, имеем уравнения

$$\sin \eta_1 \sin \eta_2 + (\cos \eta_1 + \mu_1 \sin \eta_1) \cos \eta_2 = 1/\sqrt{2}. \quad /4.14/$$

$$(r_0 \sqrt{2} + \operatorname{sh} \bar{x}_1) \sin \eta_1 = (\sqrt{2} \cos \eta_2 + \cos \eta_1) \operatorname{ch} \bar{x}_1. \quad /4.15/$$

Первое уравнение позволяет выразить $\cos \eta_2$ через η_1 , и остается одно трансцендентное уравнение, связывающее r_0 , x_1 и η_1 . Бифуркационную кривую / $B_1 B_1'$ на рис.3/ в этом случае проще найти из условия $\omega^2 = 0$. Вычисления по описанной выше схеме приводят к уравнению для p :

$$\mu_1 = p \operatorname{tg} [p(x_1 - \bar{x}_1) - \arccos(qp^{-1} \operatorname{th}(q\bar{x}_1))] + \quad /4.16/$$

$$+ p \operatorname{tg} [p(\bar{x}_2 - x_1) - \arccos(p/\sqrt{2})],$$

где $q^2 = 1 + \omega^2 = 2 - p^2$, и уравнение для бифуркационной кривой получается при $q = p = 1$. В частности, для состояния с $\phi_1 = \pi$ имеем $a'_0 = a_1 = a'_1 = a_2 = 1$ /см. /4.4/, /4.5//, т.е. $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \pi/2$, $\eta_1 = \pi/4$, $\eta_2 = \pi/2$, и из /4.15/ следует, что $\sqrt{2} r_0 = \exp(-x_1 + \pi/4)$. Для этого состояния из /4.16/ при $q = p = 1$ получаем $x_1 - \pi/4 = -\frac{1}{2} \ln \mu_1$. Найденные выражения дают хорошее приближение к точным соотношениям $r_0 = \operatorname{sech} x_1$ и /3.16/.

Таким же способом можно вычислить и другие состояния. При небольших значениях x_1 и μ_1 могут существовать только состояния с полным потоком $\leq \frac{3}{2} \Phi_0$. Легко подсчитать, что существует всего восемь различных типов таких состояний. Уравнения, определяющие все состояния и их собственные частоты, не сложнее, чем /4.13/-/4.16/. Задача о переходе конечной длины приводит к более сложным уравнениям и заслуживает специального исследования.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше было показано, что магнитный поток может локализоваться на неоднородностях, притягивающих флюксоны /в работе /15/ они были названы микросопротивлениями в противоположность микрозаороткам/. При этом образуются связанные состояния деформированных флюксонов, устойчивые относительно малых флуктуаций или даже абсолютно устойчивые. На опыте такие состояния можно сформировать изменением магнитного поля на краю перехода, а соответствующие распределения тока и магнитного поля внутри перехода можно было бы непосредственно наблюдать с помощью упомянутой во введении методики сканирования ДДП сфокусированным лазерным лучом малой мощности /11,12/. При этом распределение тока и поля вдоль перехода непосредственно определяется по вызванным локальным нагревом изменениям максимального полного тока при нулевом напряжении. Если состояния жестко локализовано, т.е. его энергия связи и собственная частота достаточно велики, то возмущение, связанное с освещением перехода, не приведет к заметному искажению исследуемого распределения тока, которое можно теоретически предсказать.

Отметим, что, локально нагревая переход с помощью второго, более мощного сфокусированного лазерного луча, можно было бы попытаться создать микронеоднородность, положение которой легко менять. Тем самым открылась бы возможность непосредственного наблюдения эволюции связанных состояний и их бифуркаций при одновременном изменении положения микронеоднородности и внешнего магнитного поля.

Сканирование жестко локализованных состояний при различных значениях краевого магнитного поля можно также использовать для диагностики переходов с микронеоднородностями. Действительно, выполненный нами анализ показывает, что у каждого ДДП есть индивидуальный "портрет" связанных состояний и в принципе несложно по достаточно богатому набору экспериментальных распределений решить обратную задачу, т.е. найти параметры, характеризующие неоднородности. Положение микронеоднородностей видно при этом буквально "невооруженным глазом" /см. рис.3,5 в работе /12//, и более подробный теоретический анализ необходим лишь для опре-

деления значений μ_i . Более непосредственно находить величину μ_i можно, измеряя собственные частоты связанных состояний; для этого достаточно возбудить собственные колебания и наблюдать их одним из методов, применяемых при изучении движения флюксонов в однородных ДДП /9,10/.

Заметим, что связанные состояния могут существовать и в переходах с отталкивающими неоднородностями /микрозакоротками/; например, солитон может попасть в ловушку между двумя достаточно удаленными друг от друга микрозакоротками /1,2/. Хотя такие состояния также можно находить методами настоящей работы, для их описания обычно достаточно СТВ. Устойчивые состояния в ловушках обычно слабо локализованы и имеют малые собственные частоты, в силу чего их собственные колебания легко возбуждаются и медленно затухают. По этой причине перспективы применения флюксонов, локализованных на микросопротивлениях, представляются более благоприятными. К тому же, как показано выше, даже в очень простой системе можно реализовать два устойчивых состояния /бистабильность/. Ими можно плавно управлять посредством изменения магнитного поля вдали от бифуркаций, а в точке бифуркации возможно резкое переключение /срыв/ в состояние с меньшей энергией. Для детального количественного описания этих явлений необходимо решать нестационарное уравнение с учетом найденных выше статических решений. Исследование нестационарной задачи необходимо и для вычисления вероятности перехода из метастабильного состояния в стабильное. Весьма вероятно, что использование информации о статических состояниях, в том числе и о достаточно долгоживущих неустойчивых, позволит получить простое описание нестационарных процессов, подобное S-матричной теории рассеяния. Связанным состояниям и резонансам S-матрицы будут при этом соответствовать устойчивые и неустойчивые статические распределения, изученные в этой работе.

Авторы благодарны А.Л.Эфросу за полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солитоны в действии. "Мир", М., 1981.
2. Fulton T.A., Dynes R.C., Anderson P.W. Proc. IEEE, 1973, 61, p.28.
3. Vroom R.F., Kotyczka W., Moser A. IBM J.Res.Dev., 1980, 24, p.178.
4. Васенко С.А., Лихарев К.К., Семенов В.К. ЖЭТФ, 1981, 81, с.1444.
5. Кулик И.О., Янсон И.К. Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. "Наука", М., 1970.
6. Иванченко Ю.М., Свидзинский А.В., Слюсарев В.А. ЖЭТФ, 1966, 51, с.194.

7. Кулик И.О. ЖЭТФ, 1966, 51, с.1952.
8. Owen C.S., Scalapino D.J. Phys.Rev., 1967, 164, p.538.
9. Карпман В.И., Рябова Н.А., Соловьев В.В. ЖЭТФ, 1981, 81, с.1327.
10. Lomdahl P.S., Soerensen O.H., Christiansen P.L. Phys.Rev., 1982, B25, p.5737.
11. Chi C.C., Loy M.M.T., Cronemeyer D.C. Appl.Phys.Lett., 1982, 40(5), p.437.
12. Scheuermann M. et al. Phys.Rev.Lett., 1983, 50, p.74.
13. Fogel M.B. et al. Phys.Rev., 1977, B15, p.1578.
14. De Leonardis R.M., Trullinger S.E., Wallis R.F. J.Appl. Phys., 1980, 51, p.1211.
15. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. Письма в ЖЭТФ, 1982, 35, с.470.
16. Filippov A.T., Gal'pern Yu.S. JINR, E17-83-262, Dubna, 1983.
17. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Гостехтеориздат, М.-Л., 1951, т.1.
18. Jackiw R. Rev.Mod.Phys., 1977, 49, p.681.
19. Филиппов А.Т. ЭЧАЯ, 1980, 11, с.735.
20. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. "Наука", М., 1969.
21. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения. "Мир", М., 1974.
22. Расизаде О.Ш. ТМФ, 1981, 48, с.197; 1981, 49, с.36.
23. Jackiw R., Rossi P. Phys.Rev., 1980, D21, p.426.
24. Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. ОИЯИ, P2-10938, Дубна, 1977.
25. Справочник по специальным функциям. /Под ред. М.Абрамовича, И. Стиган/. "Наука", М., 1979.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 сентября 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

D3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
D13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
D1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
D1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, ИРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
D11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
D4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
D4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
D2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
D10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
D1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
D17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
D1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
P18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
D2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
D9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
D3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Гальперн Ю.С., Филиппов А.Т. P17-83-632
Связанные состояния солитонов
в неоднородных джозефсоновских переходах

Теоретически изучены статические связанные состояния магнитного потока в длинных джозефсоновских переходах с локальными неоднородностями. Показано, что для качественного и количественного исследования связанных состояний достаточно определить их в точках бифуркаций, возникающих при изменении внешних параметров и аналогичных точкам фазового перехода. Вне точек бифуркации связанные состояния можно находить с помощью специальной бифуркационной теории возмущений. Подробно проанализированы физически интересные точно решаемые задачи, а для приближенного определения состояний и их бифуркаций предлагается использовать элементарно решаемую кусочно-линейную аппроксимацию уравнения "синус-Гордона" с неоднородностями. Обсуждаются возможности прямого экспериментального наблюдения связанных состояний и их бифуркаций при изменении внешнего магнитного поля и положения неоднородностей.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Preprint Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Fillipov A.T., Galpern Yu.S. P17-83-632
Bound States of Solitons
In Inhomogeneous Josephson Junctions

Static bound states of the magnetic flux in long Josephson junctions with local inhomogeneities are theoretically analysed. We demonstrate that for a qualitative as well as for a quantitative understanding the bound states it is sufficient to calculate them at the bifurcation points in the external-parameter space. These points are similar to phase-transition points, and near them one can obtain the bound states by using a special bifurcational perturbation theory. Some exactly solvable problems of physical interest are analysed in detail, and a piecewise-linear approximation for the "sine-Gordon" equation with inhomogeneities is suggested for an approximate treatment of the bound states and of their bifurcations. A feasibility of a direct experimental observation of the bound states and bifurcations depending on an external magnetic field and positions of inhomogeneities is pointed out.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой