объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-83-622

В.А.Загребнов

МЕТОД АППРОКСИМИРУЮЩЕГО ГАМИЛЬТОНИАНА ДЛЯ МОДЕЛИ ДИККЕ С УЧЕТОМ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА БОЗОННЫХ МОД И A^2-ЧЛЕНА

Направлено в журнал
"Zeitschrift für Physik B:
Condensed Matter"

1983

I. Введение

Различные варианты модели Дикке обсуждаются в настоящее время в качестве моделей, описывающих взаимодействие материи с излучением и фазовый переход в сверхизлучающее состояние, см.,например,[1]. Первоначальный вариант модели Дикке предназначался для описания взаимодействия квантового электромагнитного излучения с системой N двухуровневых атомов, помещенных в резонатор $\Lambda \subset \mathbb{R}^{\nu}(\mathbb{Z}^{\nu})$, настроенный на одну или несколько частот[2], обсуждение см. в[3,4]. Таким образом, вначале модель Дикке служила для понимания динамических процессов (сверхизлучение, спиновое эхо и т.п.[3-5]), интерес к ее термодинамическим свойствам возник после работ[6,7]. В этих работах было впервые строго доказано, что плотность свободной энергии модели Дикке может быть вычислена в термодинамическом пределе $\lim_{\Lambda \nearrow \mathbb{R}^{\nu}(\mathbb{Z}^{\nu})} \equiv t\text{-}\lim$ точно и что модель описывает фазовый переход в сверхизлучающее состояние, см.также[8].

С другой стороны, как было показано в работах[9,10], обобщение метода Н.Н. Боголюбова (мл.)[11] на случай взаимодействий, содержащих неограниченные по норме операторы, дает строгий подход к исследованию большого класса гамильтонианов типа гамильтониана Дикке. Этот подход позволяет рассмотреть достаточно общий случай взаимодействия излучения с веществом, включающий в себя, например, трансляционные (фононные) степени свободы взаимодействующих с излучением атомов, см.[12-15].

Большинство других вариантов модели Дикке по существу сводятся к перечисленным выше и имеют одну общую особенность: в них рассматривается лишь конечное число фотонных (бозонных) мод. Однако, как было замечено в работе[16], это ограничение может быть существенным при доказательстве существования фазового перехода в сверхизлучающее состояние, если учесть диамагнитное влияние A^2 -члена, которым обычно пренебрегают. В работах[16,17] утверждалось, что фазовый переход в этом случае запрещен правилом сумм Томаса-Райха-Куна, см.,например,[18].

С другой стороны, в работе[19] было показано, что такая ситуация может иметь место,только если во взаимодействии атомов с излучением присутствуют CR -члены. Это замечание породило длинную дискуссию вокруг "проблемы A^2 -члена" в модели Дикке с различными аргументами за и против существования фазового перехода в сверхизлучающее состояние, см.,например,[20-25].

Здесь невозможно упомянуть все работы в этом направлении^{x}.

Недавно в работе[30] было показано, что те аргументы и приближения, которые используются при переходе от полного гамильтониана взаимодействия излучения с веществом к гамильтониану Дикке, приводят к нарушению правила сумм Томаса-Райха-Куна.

Новые аргументы против возможности фазового перехода в сверхизлучающее состояние были выдвинуты в работах[31,32]. **В этих работах** приведены аргументы общего характера, запрещающие такой фазовый переход для системы атомов в резонаторе, если только взаимодействие происходит опять с конечным числом поперечных электромагнитных мод.

Это означает, что важной и актуальной задачей является исследование нетривиальной модели с бесконечным числом бозонных мод (в работе[33] была рассмотрена модель Дикке с бесконечным числом мод, взаимодействие в которой эффективно стремится к нулю в термодинамическом пределе). Оценки, полученные в рамках МАГ^{xx} для моделей с конечным числом мод (см. [I, гл.П] или[9,10]), позволяют формально стремить число мод к бесконечности в термодинамическом пределе, как некоторую (меньше единицы) степень объема системы, либо рассмотреть сразу бесконечное число мод, однако с константами взаимодействия, которые достаточно быстро стремятся к нулю с номером моды: этот интересный пример впервые исследован в работе[34], см. также[35]. Как заметили Хепп и Либ[7], стремление числа мод к бесконечности может привести к возникновению инфракрасной проблемы (например, при квантовании в "ящике" с ультрафиолетовым обрезанием), которая, по их мнению, должна сильно "смягчаться" при включении в рассмотрение A^2 -члена.

Эти вопросы послужили мотивировкой для написания настоящей работы. В ней предложена точно решаемая модель Дикке с учетом A^2 -члена и числом мод, пропорциональным объему резонатора.

<u>З а м е ч а н и е I.I</u>

Влияние A^2 -члена на инфракрасные расходимости исследовалось в работе[36]. Было показано, что эти расходимости полностью уничтожаются A^2 -членом, если атомы вещества образуют правильную (например, кубическую) решетку. Модель Дикке на решетке уже рассматривалась ранее в работах[12-14], см. также[37].

<u>З а м е ч а н и е I.2</u>

Модель Дикке с бесконечным (в термодинамическом пределе) числом мод и нетривиальным взаимодействием, но без A^2 -члена исследовалась в работах[38-40]. Вначале было доказано, что в термодинамическом пределе плотность свободной энергии существует и соответствует квазисвободному (**хартри-фоковскому**) состоянию[38], авторами была выдвинута гипотеза, что это квазисвободное состояние является точным решением полной вариационной проблемы для рассматриваемой ими модели. Позже, в работе[39], было установлено, что предельные гиббсовские состояния для этой модели являются локально нормальными.

В настоящей работе рассматривается модель, которая является некоторым обобщением модели, предложенной в[38-40], и которая, кроме того, содержит A^2 -член. Доказано, что она является точно решаемой, причем установлена справедливость выдвинутой в[38] гипотезы.

---

^{x} Обзор работ по этой теме потребовал бы довольно много места и в настоящее время был бы очень полезен. Мы упомянем в этой связи лишь работы [26-29] .

^{xx}МАГ - метод аппроксимирующего гамильтониана.

2. <u>Модельный гамильтониан</u>

Гамильтониан, описывающий взаимодействие бозонного поля с материей в "ящике" $\Lambda\subset \mathbb{R}^{\nu}(\mathbb{Z}^{\nu})$, имеет следующий общий вид:

$$H_\Lambda=\sum_{k\in M_\Lambda}\omega_k b_k^* b_k + g\sum_{k\in M_\Lambda}\omega_k^{-1}(b_k+b_{-k}^*)(b_k^*+b_{-k})+H_\Lambda(L^\#)+ \qquad (2.I)$$

$$+\sum_{k\in M_\Lambda} g_k (b_k^* L_k + b_k L_k^*) .$$

Здесь $\{b_k^\#\}_{k\in M_\Lambda}$ - бозонные операторы, соответствующие модам со спектром $\{\omega_k\}_{k\in M_\Lambda}$, а операторы $\{L_k^\#\}_{k\in M_\Lambda}$ вместе с гамильтонианом $H_\Lambda(L^\#)$ описывают материю.

<u>П р и м е р I</u>. Гамильтониан Фрелиха

Пусть $k=Q$ (т.е. число мод $|M_\Lambda|=1$), $g=0$, $g_Q=\lambda_Q|\Lambda|^{-1/2}$,

$$L_Q=\sum_{q,\sigma} a_{q+Q,\sigma}^* a_{q,\sigma} \; ;$$

$$H_\Lambda(L^\#)=\sum_{q,\sigma}(\epsilon_q-\mu)\, a_{q,\sigma}^* a_{q,\sigma} \; . \qquad (2.2)$$

Здесь $\{a_{q,\sigma}^\#\}_{q\in B}$ - ферми-операторы электронов, μ -химический потенциал, а спектр электронов обладает свойством $\epsilon_q=\epsilon_{q+Q}$. Объем "ящика" Λ или число узлов решетки, содержащихся в нем, мы обозначаем $|\Lambda|$. Гамильтониан (2.1), (2.2) описывает электрон-фононное взаимодействие с выделенной модой $k=Q$ для металла с одной зоной B. Это взаимодействие, как известно, приводит к пайерлсовскому фазовому переходу металл-изолятор для наполовину заполненной зоны /41/. Более сложный случай, когда гамильтониан $H_\Lambda(L^\#)$ включает в себя также член взаимодействия БКШ, рассмотрен в работах /42/.

<u>Пример 2</u>. Модель мазера Дикке

Пусть $k = 1,2,\dots,M$ ($|M_\Lambda| = M$), $g = e^2/4mc^2$, $g_k = \lambda_k |\Lambda|^{-1/2}$,

$$L_k = \sum_{j=1}^{N} (\sigma_j^- + \mu_k \sigma_j^+) ,$$
$$H_\Lambda(L^\#) = \epsilon \sum_{j=1}^{N} \sigma_j^z + H_\Lambda(\sigma) . \qquad (2.3)$$

Здесь $\{\sigma_j^\alpha\}_{\alpha=x,y,z}$-матрицы Паули, $\sigma_j^\pm = \sigma_j^x \pm i\sigma_j^y$, а гамильтониан $H_\Lambda(\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$|f_\Lambda[H_\Lambda(\sigma)]| \leq a_1 , \ \frac{1}{|\Lambda|} \| [H_\Lambda(\sigma), L_k^\#] \|_{\mathfrak{H}_L^\Lambda} \leq a_2 . \qquad (2.4)$$

$f_\Lambda[\cdot]$ -плотность свободной энергии, а $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_L^\Lambda}$ -операторная норма в пространстве состояний спиновых переменных $\mathfrak{H}_L^\Lambda$.

<u>Пример 3</u>. Модель Джекобсона-Стивенса

В этом случае $g=0$, $\mu_k = 0$ и $H_\Lambda(\sigma) = 0$, см. (2.1),(2.3) и /43/.

Дадим теперь точное определение модели, которая будет рассматриваться в настоящей работе. Пусть $\mathfrak{H}_B^\Lambda$ и $\mathfrak{H}_L^\Lambda$ - пространства состояний, соответствующие полю и материи. Тогда рассмотрим гамильтониан

$$H_\Lambda = \sum_{k\in M_\Lambda} \omega_k b_k^* b_k \otimes \mathbb{1} + g \sum_{k\in M_\Lambda} \omega_k^{-1} (b_k + b_{-k}^*)(b_k^* + b_{-k}) \otimes \mathbb{1} +$$
$$+ \mathbb{1} \otimes H_\Lambda(L) + \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k\in M_\Lambda} \varkappa_k (b_k \otimes L_k^* + b_k^* \otimes L_k) \qquad (2.5)$$

с $|M_\Lambda| = \alpha|\Lambda|$, $\alpha > 0$, который действует в тензорном произведении $\mathfrak{H}^\Lambda = \mathfrak{H}_B^\Lambda \otimes \mathfrak{H}_L^\Lambda$. Здесь $\omega_k > 0$, $g \geq 0$, $\varkappa_k \in \mathbb{R}^1$, для решеточных систем $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$, $\alpha = 1$.

<u>Замечание 2.1</u>

В гамильтониане (2.5) мы пренебрегли зависимостью констант взаимодействия $\{\varkappa_k\}_{k\in M_\Lambda}$ от положения атомов. Такое упрощение соответствует либо приближению жесткой решетки, либо приближению длинных волн для непрерывной системы.

Будем предполагать, что гамильтониан (2.5) удовлетворяет следующим условиям, которые обычно выполняются для модельных систем, см. [1, гл. II и III] и примеры 1-3:

$$(i)\ \frac{1}{|\Lambda|} \| L_k^\# \|_{\mathfrak{H}_L^\Lambda} \leq c_1 ; \quad (ii)\ \frac{1}{|\Lambda|} \| [L_k^\#, L_{k'}^\#] \|_{\mathfrak{H}_L^\Lambda} \leq c_2 ;$$
$$(iii)\ \frac{1}{|\Lambda|} \| [L_k^\#, [L_{k'}^\#, L_{k''}^\#]] \|_{\mathfrak{H}_L^\Lambda} \leq c_3 ; \qquad (2.6)$$
$$(iv)\ \frac{1}{|\Lambda|} \| [L_k^\#, [H_\Lambda(L), L_{k'}^\#]] \|_{\mathfrak{H}_L^\Lambda} \leq c_4 ; \ (v)\ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k\in M_\Lambda} \frac{\varkappa_k^2}{\omega_k} \leq c_0 .$$

<u>Замечание 2.2</u>

Следуя работе /10/, нетрудно проверить, что гамильтониан (2.5) является полуограниченным снизу самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^\Lambda$, см. также /44/.

3. <u>Аппроксимирующий гамильтониан и предварительные оценки</u>

Используя каноническое унитарное преобразование Боголюбова $U_\Lambda = \bigotimes_{k\in M_\Lambda} U_k$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_B^\Lambda$:

$$B_k = U_k b_k U_k^* = \alpha_k b_k + \beta_k b_{-k}^* ; \ |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1 , \qquad (3.1)$$

преобразуем гамильтониан H_Λ к виду

$$\mathcal{H}_\Lambda(b_k^\#) = H_\Lambda(U_k b_k^\# U_k^*) = U_\Lambda H_\Lambda U_\Lambda^* ;$$

$$H_\Lambda(b_k^\#) = \mathcal{H}_\Lambda(B_k^\#) = \sum_{k\in M_\Lambda} (\Omega_k B_k^* B_k \otimes \mathbb{1} + \rho_k \otimes \mathbb{1}) + \mathbb{1} \otimes H_\Lambda(L) +$$
$$+ \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{k\in M_\Lambda} \varkappa_k (B_k \otimes \mathcal{L}_k^* + B_k^* \otimes \mathcal{L}_k) ; \qquad (3.2)$$

$$\Omega_k = (\omega_k^2 + 4g)^{1/2} ; \ \rho_k = \frac{1}{2}(\Omega_k - \omega_k) ;$$
$$\mathcal{L}_k = \alpha_k L_k - \beta_k L_k^* ; \qquad (3.3)$$
$$\alpha_k^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_k + 2g/\omega_k}{\Omega_k} + 1\right) ; \ \beta_k^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_k + 2g/\omega_k}{\Omega_k} - 1\right) .$$

Теперь, используя общую идеологию МАГ (см. [1, гл.II]), построим аппроксимирующий гамильтониан для (3.2).

Введем вспомогательный гамильтониан, содержащий член с источниками для бозонов $\{B_k^\#\}_{k\in M_\Lambda}$:

$$\mathcal{H}_\Lambda(z)=\mathcal{H}_\Lambda-\sum_{k\in M_\Lambda}\{(z_k B_k^*+z_k^* B_k)\otimes\mathbb{1}+\rho_k\otimes\mathbb{1}\}, \qquad (3.4)$$

и представим гамильтониан (3.4) тождественно в виде

$$\mathcal{H}_\Lambda(z)=\mathcal{H}^0_\Lambda(z,\eta)+\mathcal{H}^1_\Lambda(z,\eta)\ ;$$

$$\mathcal{H}^0_\Lambda(z,\eta)=\sum_{k\in M_\Lambda}\Omega_k\Big(B_k^*-\frac{z_k^*}{\Omega_k}+\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}\eta_k^*\Big)\Big(B_k-\frac{z_k}{\Omega_k}+\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}\eta_k\Big)\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_\Lambda(L)- \qquad (3.5)$$

$$-\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\Big\{\Big(\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}\eta_k\otimes\mathcal{L}_k^*+\text{э.с.}\Big)+\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}|\eta_k|^2\Big\}-\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\Big\{(\varkappa_k z_k\otimes\mathcal{L}_k^*+\text{э.с.})+\frac{|z_k|^2}{\Omega_k}\Big\}\ ;$$

$$\mathcal{H}^1_\Lambda(z,\eta)=\sum_{k\in M_\Lambda}\varkappa_k\Big\{\Big(B_k^*+\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}\eta_k^*-\frac{z_k^*}{\Omega_k}\Big)\otimes\Big(\frac{\mathcal{L}_k}{|\Lambda|}-\eta_k\Big)+\text{э.с.}\Big\}\ . \qquad (3.6)$$

Нашей задачей является доказательство того, что при определенном выборе параметров $\{\bar\eta_k^\#\}_{k\in M_\Lambda}$ гамильтониан $\mathcal{H}^0_\Lambda(z,\bar\eta)$ является термодинамически эквивалентным исходному гамильтониану $\mathcal{H}_\Lambda(z)$ в том смысле, что плотности свободных энергий, определяемые этими гамильтонианами в термодинамическом пределе $t\text{-}\lim=\lim_{\Lambda\nearrow\mathbb{R}^\nu(\mathbb{Z}^\nu)}$, совпадают.

Пусть $f_\Lambda[\mathcal{H}]$ – плотность свободной энергии, соответствующая гамильтониану $\mathcal{H}$ (β^{-1} –температура):

$$f_\Lambda[\mathcal{H}]=-(\beta|\Lambda|)^{-1}\ln\operatorname{Tr}\exp(-\beta\mathcal{H}),$$

а $\langle\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ –термодинамическое среднее, определяемое этим гамильтонианом. Тогда, используя неравенство Боголюбова, получаем

$$0\leqslant\inf_{(\eta)}f_\Lambda[\mathcal{H}^0_\Lambda(z,\eta)]-f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]\leqslant f_\Lambda\Big[\mathcal{H}^0_\Lambda\Big(z,\Big\{\Big\langle\frac{\mathcal{L}_k^\#}{|\Lambda|}\Big\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\Big\}_{k\in M_\Lambda}\Big)\Big]- \qquad (3.7)$$

$$-f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]\leqslant-\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\varkappa_k\Big\{\Big\langle(B_k-\langle B_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)})\otimes\Big(\frac{\mathcal{L}_k^*}{|\Lambda|}-\Big\langle\frac{\mathcal{L}_k^*}{|\Lambda|}\Big\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\Big)+\text{э.с.}\Big\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\Big\}.$$

Здесь использована унитарная эквивалентность гамильтонианов $\mathcal{H}_\Lambda(z)$ и $\tilde{\mathcal{H}}_\Lambda(z)$, см. (3.4):

$$\tilde{\mathcal{H}}_\Lambda(z)=\mathcal{U}_\Lambda\mathcal{H}_\Lambda(z)\mathcal{U}_\Lambda^*\ ;\quad \mathcal{U}_\Lambda B_k^\#\mathcal{U}_\Lambda^*=B_k^\#-z_k^\#/\Omega_k\ . \qquad (3.8)$$

Тогда из (3.4) и (3.8) получаем

$$\partial_{z_k^\#}f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]=\partial_{z_k^\#}f_\Lambda[\tilde{\mathcal{H}}_\Lambda(z)]\ , \qquad (3.9)$$

или более детально:

$$-\langle B_k^\#\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}=\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}\Big\langle\frac{\mathcal{L}_k^\#}{|\Lambda|}\Big\rangle_{\tilde{\mathcal{H}}_\Lambda(z)}-\frac{z_k^\#}{\Omega_k}=\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}\Big\langle\frac{\mathcal{L}_k^\#}{|\Lambda|}\Big\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}-\frac{z_k^\#}{\Omega_k}\ . \qquad (3.10)$$

Замечание 3.I

О доказательстве неравенства Боголюбова см., например, [I, гл. П, § I].

Обозначим $\Delta_\Lambda(z)\equiv\inf_{(\eta)}f_\Lambda[\mathcal{H}^0_\Lambda(z,\eta)]-f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]$ и определим операторы

$$\delta B_k^\#=B_k-\langle B_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\ ;\quad \delta\mathcal{L}_k^\#=\frac{\mathcal{L}_k^\#}{|\Lambda|}-\Big\langle\frac{\mathcal{L}_k^\#}{|\Lambda|}\Big\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\ .$$

Тогда правую часть неравенства (3.7) можно оценить следующим образом:

$$0\leqslant\Delta_\Lambda(z)\leqslant-\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\varkappa_k\langle\delta B_k\delta\mathcal{L}_k^*+\delta B_k^*\delta\mathcal{L}_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\Big(|\Lambda|^{\delta}\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}\langle\delta\mathcal{L}_k^*\delta\mathcal{L}_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}+|\Lambda|^{-\delta}\Omega_k\langle\delta B_k^*\delta B_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\Big), \qquad (3.11)$$

где $0<\delta<1$. Теперь оценим термодинамические средние в правой части (3.II).

В качестве первого шага воспользуемся неравенством Жинибра /45/:

$$\langle\delta B_k^*\delta B_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\leqslant\langle\delta B_k^*\delta B_k+\delta B_k\delta B_k^*\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\leqslant 2\,(\delta B_k,\delta B_k)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}+ \qquad (3.12)$$

$$+\{\beta\,(\delta B_k,\delta B_k)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\langle[\delta B_k,[\mathcal{H}_\Lambda(z),\delta B_k^*]]\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\}^{1/2}\ .$$

Здесь внутреннее произведение $(.,.)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}$ определено следующим образом:

$$(A,B)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}=\beta^{-1}\int_0^\beta d\tau\,\langle e^{\tau\mathcal{H}_\Lambda(z)}A\,e^{-\tau\mathcal{H}_\Lambda(z)}B\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\ , \qquad (3.13)$$

тогда

$$[\delta B_k,[\mathcal{H}_\Lambda(z),\delta B_k^*]] = \Omega_k \ ,$$

$$(\delta B_k,\delta B_k)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} = -|\Lambda|\beta^{-1}\partial_{z_k}\partial_{z_k^*} f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)] \ , \qquad (3.14)$$

аналогично имеем

$$\langle \delta\mathcal{Z}_k^*\delta\mathcal{Z}_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} \leq 2\,(\delta\mathcal{Z}_k,\delta\mathcal{Z}_k)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} +$$

$$+ \left\{\beta\,(\delta\mathcal{Z}_k,\delta\mathcal{Z}_k)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\langle[\delta\mathcal{Z}_k,[\mathcal{H}_\Lambda(z),\delta\mathcal{Z}_k^*]]\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\right\}^{1/2} . \qquad (3.15)$$

С помощью унитарного преобразования (3.8) легко проверить, что

$$|\Lambda|\left(-\beta^{-1}\partial_{z_k}\partial_{z_k^*} f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]\right) = |\Lambda|\left(-\beta^{-1}\partial_{z_k}\partial_{z_k^*} f_\Lambda[\tilde{\mathcal{H}}_\Lambda(z)]\right) =$$

$$= (\delta\mathcal{Z}_k,\delta\mathcal{Z}_k)_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} - |\Lambda|(\beta\Omega_k)^{-1} \ . \qquad (3.16)$$

Л е м м а 3.I

Пусть выполнены условия (i)-(v) в (2.6). Тогда существует такая вещественная непрерывная функция $Q(|z|)$, что

$$\left|\langle[\delta\mathcal{Z}_k,[\mathcal{H}_\Lambda(z),\delta\mathcal{Z}_k^*]]\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)}\right| \leq \frac{Q(|z|)}{|\Lambda|} \ . \qquad (3.17)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о

Из (I.6) и (3.3) получаем

$$0 \leq \langle \mathcal{Z}_k\mathcal{Z}_k^*\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} = \frac{\omega_k + 2g/\omega_k}{\Omega_k}\langle L_k L_k^*\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} -$$

$$-\frac{g}{\omega_k\Omega_k}\langle L_k^2 + L_k^{*2}\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda(z)} \leq \frac{\omega_k}{2\Omega_k}c_1^2|\Lambda|^2 \ . \qquad (3.18)$$

Таким образом, в (3.I8) не возникает инфракрасной проблемы при $\omega_k \to 0$, а сама оценка совпадает с соответствующей оценкой для операторов $\{L_k^\#\}_{k\in M_\Lambda}$. Тогда оставшаяся часть доказательства является почти дословным повторением рассуждений из [I, гл.П, § 2.4^0, лемма 2.I и 2.2] для аналогичного случая. ☐

С л е д с т в и е 3.I

Из соотношений (3.II)-(3.I7) для величины $\Delta_\Lambda(z)$ получаем следующую оценку:

$$0 \leq \Delta_\Lambda(z) \leq \sum_{k\in M_\Lambda}\Big\{\Big(\frac{2\varkappa_k^2}{\beta\Omega_k|\Lambda|^{1-\delta}} + \frac{2\Omega_k}{\beta|\Lambda|^\delta}\Big)\partial_{z_k}\partial_{z_k^*}(-f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]) +$$

$$+ |\Lambda|^{-1/3}\Big(\frac{\varkappa_k^2\,Q(|z|)^{1/2}}{\Omega_k|\Lambda|^{1-\delta}} + \frac{\Omega_k^{3/2}}{\beta|\Lambda|^\delta}\Big)\Big(\partial_{z_k}\partial_{z_k^*}(-f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)])\Big)^{1/2}\Big\} + \qquad (3.19)$$

$$+ \frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\Big\{|\Lambda|^\delta\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}\Big(\frac{2}{\beta\Omega_k|\Lambda|} + \frac{Q(|z|)^{1/2}}{(\beta\Omega_k)^{1/2}|\Lambda|^{3/2}}\Big)\Big\} \ .$$

4. Основная теорема

Основное утверждение настоящей работы основано на следующем общем предложении:

П р е д л о ж е н и е 4.I

Пусть $\{\Delta_\Lambda(z)\geq 0\}_\Lambda$ и $\{f_\Lambda(z)\}_\Lambda$ – два семейства вещественно значных функций комплексных переменных $z = \{z_1,\ldots,z_s\}\in\mathbb{C}^s$, такие, что для любых Λ (например, $\Lambda\subset\mathbb{R}^\nu(\mathbb{Z}^\nu)$) и всех $z\in\mathbb{K}$, где

$$\mathbb{K} = \{z\in\mathbb{C}^s:\ |z_k|\leq K\ ;\ k=1,2,\ldots,s\} \ , \qquad (4.1)$$

выполняются следующие условия:

(а) если $z_k = r_k e^{i\varphi_k}$ ($k = 1,2,\ldots,s$), тогда существуют константы $R_k > 0$, такие, что (условия Липшица)

$$|\Delta_\Lambda(z_1,\ldots,z_k,\ldots,z_s) - \Delta_\Lambda(z_1,\ldots,z_k',\ldots,z_s)| \leq$$

$$\leq R_k|r_k - r_k'| + \sqrt{r_k r_k'}\ |\phi_k - \phi_k'| \ ; \qquad (4.2)$$

(б) функции $\{f_\Lambda(z)\}_\Lambda$ дважды дифференцируемы и

$$\partial_{z_k}\partial_{z_k^*} f_\Lambda(z) \leq 0 \ , \qquad |\partial_{z_k^\#} f_\Lambda(z)| \leq Q_k \ ;\ k=1,2,\ldots,s \ , \qquad (4.3)$$

где $\{Q_k\}_{k=1}^s$ – неотрицательные константы;

(в) для некоторого $\varkappa\in(0,1)$ и произвольного $z\in\mathbb{K}$ имеет место неравенство

$$0 \leq \Delta_\Lambda(z) \leq \sum_{k=1}^s a_\Lambda(k)\{-\partial_{z_k}\partial_{z_k^*} f_\Lambda(z)\} + \sum_{k=1}^s b_\Lambda(k)\{-\partial_{z_k}\partial_{z_k^*} f_\Lambda(z)\}^\varkappa + \sigma_\Lambda^\circ \ , \qquad (4.4)$$

где $\{a_\Lambda(k)\}_{k=1}^s$, $\{b_\Lambda(k)\}_{k=1}^s$ – два семейства неотрицательных функций, таких,

что
$$t\text{-}\lim a_\Lambda(k) = t\text{-}\lim b_\Lambda(k) = 0 \quad ; \quad b_\Lambda(k)/a_\Lambda(k) < \infty \quad .$$

Тогда имеем следующую оценку:
$$0 \leqslant \Delta_\Lambda(z) \leqslant \sigma_\Lambda^\circ + \sigma_\Lambda^1 ,$$
$$\sigma_\Lambda^1 = \sum_{k=1}^{s} \left\{ 2\, a_\Lambda(k) \left(\frac{4R_k Q_k}{a_\Lambda(k)} \right)^{1/2} + b_\Lambda(k) \left(\frac{4 R_k Q_k}{a_\Lambda(k)} \right)^{\varkappa/2} \right\} , \qquad (4.5)$$
для всех
$$z \in \mathbb{K}_\Lambda = \{ z \in \mathbb{C}^s : |z_k| \leqslant K - \ell_\Lambda(k) ; k = 1,2,\dots,s \} \subset \mathbb{K} ; \qquad (4.6)$$
$$\ell_\Lambda(k) = \left(\frac{a_\Lambda(k) Q_k}{R_k} \right)^{1/2} .$$

З а м е ч а н и е 4.I

Предложение 4.I является обобщением одного результата А.Н.Колмогорова, см./46/ или [47, гл. I, § 3], который широко используется в МАГ, см. [II,48] и [I, гл. I, § 6].

Д о к а з а т е л ь с т в о

В книге [I, гл.I, § 2,4°, лемма 2.2] содержится подробное доказательство для $\sigma_\Lambda^\circ = 0$, в том числе и для случая $t\text{-}\lim b_\Lambda(k)/a_\Lambda(k) = \infty$. Доказательство для случая $\sigma_\Lambda^\circ \neq 0$ требует лишь небольших очевидных изменений и проводится в полной аналогии со случаем $\sigma_\Lambda^\circ = 0$. □

Мы воспользуемся предложением 4.I для $f_\Lambda(z) = f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]$ и $\Delta_\Lambda(z) = \inf_{(\eta)} f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda^\circ(z,\eta)] - f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)]$, причем $s = |M_\Lambda|$. Заметим теперь, что σ_Λ° очевидным образом определяется из (3.I9), а с помощью (3.9), (3.I0) вместе с определением $\Delta_\Lambda(z)$ можно убедиться в том, что
$$R_k \leqslant \frac{4}{|\Lambda|} \left(\frac{\varkappa_k}{\Omega_k} c_1 + \frac{K}{\Omega_k} \right) ;$$
$$Q_k \leqslant \frac{1}{|\Lambda|} \left(\frac{\varkappa_k}{\Omega_k} c_1 + \frac{K}{\Omega_k} \right) ; \qquad (4.7)$$
$$-\partial_{z_k} \partial_{z_k^*} f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda(z)] \geqslant 0 .$$

Положим $s = |\Lambda|$ и $\varkappa = 1/2$, тогда из (3.I9), (4.5) и (4.7) получаем для σ_Λ^1 следующую оценку (при $|\Lambda| \to \infty$):
$$\sigma_\Lambda^1 \leqslant \begin{cases} \dfrac{A_1}{|\Lambda|} \sum\limits_{k \in M_\Lambda} |\Lambda|^{-(1-\gamma)/2} \dfrac{\varkappa_k}{(\beta \Omega_k)^{1/2}} \left(\dfrac{\varkappa_k}{\Omega_k} c_1 + \dfrac{K}{\Omega_k} \right) , & 1/2 < \gamma < 1 ; \\ \dfrac{A_2}{|\Lambda|} \sum\limits_{k \in M_\Lambda} |\Lambda|^{-\gamma/2} \left(\dfrac{\Omega_k}{\beta} \right)^{1/2} \left(\dfrac{\varkappa_k}{\Omega_k} c_1 + \dfrac{K}{\Omega_k} \right) , & 0 < \gamma < 1/2 ; \end{cases} \qquad (4.8)$$

константы A_1, A_2 восстанавливаются с помощью формулы (4.5) и оценок (4.7).

Основной результат работы является следствием оценок (4.5), (4.8) и формулируется следующим образом:

Т е о р е м а 4.I

Пусть гамильтониан (2.5) удовлетворяет условиям (2.6). Тогда он термодинамически эквивалентен аппроксимирующему гамильтониану
$$H_\Lambda^\circ(z=0, \bar{\eta}_\Lambda) = U_\Lambda^* \Big(\mathcal{H}_\Lambda^\circ(z=0, \bar{\eta}_\Lambda) + \sum_{k \in M_\Lambda} \rho_k \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \Big) U_\Lambda \qquad (4.9)$$
в том смысле, что
$$t\text{-}\lim \{ f_\Lambda[H_\Lambda] - f_\Lambda[H_\Lambda^\circ(z=0, \bar{\eta}_\Lambda)] \} = 0 . \qquad (4.10)$$
Здесь семейство параметров $\{\bar{\eta}_\Lambda\}_{\Lambda \subset \mathbb{R}^\nu(\mathbb{Z}^\nu)}$ определяется из условия
$$\inf_{(\eta)} f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda^\circ(z=0, \eta)] = f_\Lambda[\mathcal{H}_\Lambda^\circ(z=0, \bar{\eta}_\Lambda)] . \qquad (4.11)$$

З а м е ч а н и е 4.2

Условие (v) в (2.6) контролирует в оценке (3.I9) инфракрасную и ультрафиолетовую проблемы. Заметим, что для случая $q > 0$ инфракрасная проблема отсутствует.

З а м е ч а н и е 4.3

В работе/9/ для модели Дикке (2.I) с конечным числом мод $|M_\Lambda| = M$, $g_k = \lambda_k |\Lambda|^{-1/2}$, $g = 0$ (см. раздел 2, пример 2) была получена оценка
$$0 \leqslant \Delta_\Lambda(z) \leqslant D(z) |M_\Lambda| (\sup_k |\lambda_k|)^{3/4} |\Lambda|^{-1/4} . \qquad (4.12)$$

Таким образом, результат теоремы 4.I невозможно извлечь непосредственно из (4.I2), например, с помощью подстановки: $\lambda_k \to \varkappa_k |\Lambda|^{-1/2}$, $|M_\Lambda| \to \alpha |\Lambda|, \alpha > 0$, которая соответствует переходу от модели (2.I) к нашей модели (2.5) с $g = 0$. Более точное рассмотрение оценки (4.I2) показывает/34/, что можно рассмотреть случай $|M_\Lambda| = \infty$ при дополнительном условии на убывание констант взаимодействия $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, см. раздел 5, замечание 5.2.

5. Термодинамика

В качестве иллюстрации мы рассмотрим здесь простейший вариант модели Дикке с бесконечным числом мод и A^2 -членом, когда CR - члены во взаимодействии отсутствуют: $\mu_k=0$, см. (2.3). (Для $\omega_k=\omega$, $g=0$ и $\varkappa_k=\varkappa$ эта модель впервые рассматривалась в /38-40/. В этом случае (см. раздел 2, пример 2) имеем

$$H_\Lambda(L^\#)=\epsilon\sum_{j=1}^{|\Lambda|}\sigma_j^z\ ;\quad L_k^\#=\sum_{j=1}^{|\Lambda|}\sigma_j^\mp\ . \tag{5.I}$$

Условия (i)-(iv) в (2.6) для этих операторов выполнены. Поэтому с помощью теоремы 4.I для плотности свободной энергии в термодинамическом пределе получаем

$$t\text{-}\lim f_\Lambda[H_\Lambda]=t\text{-}\lim\Big(\inf_{(\eta)} f_\Lambda[\mathcal{H}^\circ_\Lambda(z=0,\eta)+\sum_{k\in M_\Lambda}\rho_k\mathbb{1}\otimes\mathbb{1}]\Big)=$$

$$=t\text{-}\lim\Big\{-\beta^{-1}\ln 2ch\tfrac{1}{2}\beta E_\Lambda(\bar\eta^\#_\Lambda)+\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\Big(\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}|\bar\eta_k|^2+\rho_k\Big)\Big\}, \tag{5.2}$$

$$E_\Lambda(\bar\eta^\#_\Lambda)=\Big[\epsilon^2+4\Big\{\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}(\alpha_k-\beta_k)Re\,\bar\eta_k\Big\}^2+4\Big\{\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}(\alpha_k+\beta_k)Im\,\bar\eta_k\Big\}^2\Big]^{1/2}.$$

Если ввести переменные $\xi_k=(\alpha_k-\beta_k)^{-1}Re\,\eta_k$, $\zeta_k=(\alpha_k+\beta_k)^{-1}Im\,\eta_k$, тогда уравнения самосогласования (см. (3.3) и (4.II)) имеют вид

$$\xi_k=E_\Lambda^{-1}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}\xi_k\frac{\omega_k}{\Omega_k}th\tfrac{1}{2}\beta E_\Lambda\ ;$$

$$\zeta_k=E_\Lambda^{-1}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k}\zeta_k\Big(\frac{\omega_k^2+4g}{\Omega_k\omega_k}\Big)th\tfrac{1}{2}\beta E_\Lambda\ . \tag{5.3}$$

Следовательно, из условия (v) в (2.6) вытекает независимость решений уравнений (5.3) от индекса k , т.е. в термодинамическом пределе $t\text{-}\lim\bar\xi_k=\bar\xi$, $t\text{-}\lim\bar\zeta_k=\bar\zeta$.

Из уравнений (5.3) следует, что решения могут быть лишь двух типов: $\{\bar\xi\neq0,\bar\zeta=0\}$ или $\{\bar\xi=0,\bar\zeta\neq0\}$. Легко проверить, что $\inf_{(\eta)} f_\Lambda[\mathcal{H}^\circ_\Lambda]$ реализуется на решении $\{\bar\xi=0,\bar\zeta\neq0\}$, если $g>0$. Тогда условие существования нетривиального решения (параметра порядка $\bar\eta$) принимает в $t\text{-}\lim$ следующую форму:

$$\Gamma=t\text{-}\lim|\epsilon|^{-1}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\frac{\varkappa_k^2}{\omega_k}>1\ ,$$

$$\beta>\beta_c=\frac{2}{|\epsilon|}\,arcth\,\Gamma\ , \tag{5.4}$$

β_c^{-1} - критическая температура.

Если $g=0$, тогда $\Omega_k=\omega_k$ и уравнение для параметра порядка $\bar\eta$ имеет вид

$$|\eta|=t\text{-}\lim E_\Lambda^{-1}\frac{1}{|\Lambda|}\sum_{k\in M_\Lambda}\frac{\varkappa_k^2}{\omega_k}|\eta|\,th\tfrac{1}{2}\beta E_\Lambda\ .$$

Следовательно, для критической температуры β_c^{-1} получается такое же выражение, что и случае $g>0$.

Замечание 5.I

Этот результат есть не что иное, как подтверждение хорошо известного тезиса Джилмора-Боудена /19/, который они сформулировали для модели Дикке с одной бозонной модой: изменение критических параметров для фазового перехода в модели Дикке с A^2 -членом происходит только при учете CR -членов ($\mu_k\neq0$) во взаимодействии /49/.

Замечание 5.2

В работе /34/ впервые была предложена и исследована модель (2.I) с $g_k=\lambda_k|\Lambda|^{-1/2}$, $g=0$ и бесконечным числом мод: $|M_\Lambda|=\infty$, при условии, что

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|}{\omega_k^{1/2}}\leq R<\infty\ , \tag{5.5}$$

вместо (v), (2.6) для нашей модели: $g_k=\varkappa_k|\Lambda|^{-1}$, $g\geq0$, $|M_\Lambda|=\alpha|\Lambda|$. Как было отмечено в /34/, при условии (5.5) случай $|M_\Lambda|=\infty$ по существу не отличается от случая $|M_\Lambda|=M$; это относится как к технике доказательства МАГ, так и к сходству термодинамического поведения в этих двух случаях.

Основываясь на результатах теоремы 4.I и гл. П, § 3 из /I/, получаем следующее утверждение:

Теорема 5.I

Пусть гамильтониан H_Λ определен соотношениями (2.5) и (5.I), тогда

$$t\text{-}\lim\left\{\left\langle\frac{\mathcal{L}_k^{\#}}{|\Lambda|}\right\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda}-\left\langle\frac{\mathcal{L}_k^{\#}}{|\Lambda|}\right\rangle_{\mathcal{H}^\circ_\Lambda(\bar\eta_\Lambda)}\right\}=0\,;$$

$$t\text{-}\lim\left\{|\langle B_k^{\#}\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda}|-\frac{\varkappa_k}{\Omega_k}|\bar\eta_k^{\#}|\right\}=0\,. \tag{5.6}$$

З а м е ч а н и е 5.3

Аналогично для термодинамических средних бозе-подсистемы получаем

$$t\text{-}\lim\langle B_k^* B_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda}=(e^{\beta\Omega_k}-1)^{-1}+t\text{-}\lim\frac{\varkappa_k^2}{\Omega_k^2}|\bar\eta_k|^2\,. \tag{5.7}$$

З а м е ч а н и е 5.4

Из теоремы 5.I, как и в случае конечного числа мод, следует, что для каждого $k\in M_\Lambda$ имеем

$$t\text{-}\lim\left\langle\frac{L_k^{\#}}{|\Lambda|}\right\rangle_{H_\Lambda}=\begin{cases}0\,, & \beta\le\beta_c\,,\\ \neq 0\,, & \beta>\beta_c\end{cases}$$

и этот предел непосредственно связан с семейством параметров порядка $\{\bar\eta_k\}_{k\in M_\Lambda}$, см. (3.3), (5.6) и (5.7). Однако,в отличие от случая конечного числа мод при $\beta>\beta_c$, не происходит бозе-конденсации (см. (3.I) и (5.7)):

$$\langle b_k^* b_k\rangle_{H_\Lambda}=\langle B_k^* B_k\rangle_{\mathcal{H}_\Lambda}\,. \tag{5.8}$$

Следовательно, фазовый переход при $\beta=\beta_c$ проявляется здесь только в отклонении от бозевского закона распределения ниже β_c^{-1}, см.(5.7) и (5.8), и появлении аномальных средних, см. (5.6).

З а м е ч а н и е 5.5

Как отмечено в работах[50-52], отклонение от бозевского распределения при $\beta>\beta_c$ можно рассматривать как обобщенную бозе-конденсацию. Наш случай (5.7) соответствует обобщенной бозе-конденсации типа Ш согласно классификации работы[52].

6. Заключительные замечания

Основной целью настоящей работы являлось доказательство того, что МАГ может быть использован для точного решения еще одного варианта модели Дикке с бесконечным числом мод. Мы лишь кратко коснулись в разделе I деликатного вопроса физической обоснованности использования модели Дикке с A^2 – членом и отсылаем читателя к интересной

работе[30], где содержится более подробное обсуждение этого вопроса.

Я благодарен Естественнонаучному теоретическому центру (ЕТЦ), Лейпциг, за гостеприимство, которое способствовало написанию этой работы, а также А.Ульману и А.Конелю за приглашение в ЕТЦ. Я очень признателен своим коллегам и особенно В.Н.Плечко и Н.С.Тончеву за полезные обсуждения вопросов, затронутых в настоящей работе, и ценные замечания.

Л и т е р а т у р а

I. Боголюбов Н.Н.(мл.), Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Курбатов А.М., Тончев Н.С. Метод аппроксимирующего гамильтониана в статистической физике. Изд-во Болгарской АН, София,I98I.

2. Dicke R.H. Phys.Rev., 1954, 93, p. 99.
3. Haken H. Handbuch der Physik XXV, 2C Springer Verlag, Berlin,1970.
4. Loudon R. The Quantum Theory of Light. Clarendon Press, Oxford, 1973.
5. Stenholm S. Phys.Rept., 1973, 6C, p.88.
6. Hepp K., Lieb E.H. Ann. of Phys., 1973, 76, p. 360.
7. Hepp K., Lieb E.H. Phys.Rev., 1973, A8, p. 2517.
8. Wang Y.K., Hioe F.T. Phys.Rev., 1973, A7, p. 831.
9. Бранков Й.Г., Загребнов В.А., Тончев Н.С. ТМФ, I975, 22, с.20.
10. Загребнов В.А., Бранков Й.Г., Тончев Н.С. ДАН СССР, I975, 225,с.7I.
11. Боголюбов Н.Н.(мл.)Метод исследования модельных гамильтонианов. "Наука", М., I974.
12. Klemm A., Zagrebnov V.A. Physica, 1977, 86A, p. 400.
13. Klemm A., Zagrebnov V.A. Physica, 1978, 92A, p.499.
14. Klemm A., Zagrebnov V.A., Ziesche P. J. of Phys. A, 1977, 10, p. 1987.
15. Kudryavtsev I.K., Shumovsky A.S. Optica Acta, 1979, 26, p. 827.
16. Kzążewski K., Wódkiewicz K., Żakowicz W. Phys.Rev.Lett., 1975, 85, p. 432.
17. Kzążewski K., Wódkiewicz K. Phys.Rev. A, 1976, 13, p. 1967.
18. Gasiorowicz S. Quantum Physics. Wiley, New York,1974.
19. Gilmore R., Bowden C.M. J. Math.Phys., 1976, 17, p. 1617.
20. Sadreev A.F., Slivinsky A.P. Phys.Lett., 1976, 56A, p.437.
21. Orszag M. J. of Phys. A, 1977, 10, 1995.
22. Provost J.P., Rocca F., Valleé G., Sirugue M. Physica, 1976,85A, p. 202.

23. Слюсарев В.А., Янкелевич Р.П. ТМФ, 1979, 40, с. 124.
24. Yamanoi M. J. of Phys. A, 1979, 12, p. 1591.
25. Pfeifer P. J. of Phys. A, 1981, 14, p. L129.
26. Gilmore R. Physica, 1977, 86A, p. 137.
27. Попов В.Н., Федотов С.А. ТМФ,1982, 51, с.73.
28. Садреев А.Ф. ТМФ, 1982, 50, с. 286.
29. Kudenko V.A., Slivinsky A.P., Zaslavsky G.M. Phys.Lett., 1975, 53A, p. 114.
30. Van Hemmen J.L. Z.Physik B, 1980, 38, p. 279.
31. Bialynicki-Birula I., Rzążewski K. Phys.Rev. A, 1979, 19, p.301.
32. Gawędzki K., Rzążewski K. Phys.Rev. A, 1981, 23, p. 2134.
33. Davies E.B. Commun. Math.Phys., 1973, 34, p. 237.
34. Bogolubov N.N. (Jr), Plechko V.N. Physica, 1976, 82A, p.163.
35. Курбатов А.М., Санкович Д.П. ТМФ, 1980, 42, с.392.
36. Wreszinski W.F. J. Math.Phys., 1980, 21, p. 305.
37. Кудрявцев И.К., Мелешко А.И., Шумовский А.С. Квантовая электроника, 1979, 6, с. 2573.
38. Fannes M., Sisson P.N.M., Verbeure A., Wolfe J.C. Ann. of Phys., 1976, 98, p.38.
39. Fannes M., Spohn H., Verbeure A. J. MathPhys., 1980, 21, p.355.
40. Sisson P.N.M., Verbeure A., Wolfe J.C. Ann. Société Scient. de Bruxelles, 1975, 89, p. 552.
41. Brankov J.G., Tonchev N.S., Zagrebnov V.A. Physica, 1979, 79A, p. 125.
42. Brankov J.G., Tonchev N.S. Physics, 1976, 84A, p. 371, p. 534.
43. Liu K.C. Solid State Commun., 1982, 44, p. 1087.
44. Arai A. J. Math. Phys., 1981, 22, p. 534.
45. Ginibre J. Commun. Math.Phys., 1968, 8, p. 26.
46. Колмогоров А.Н. Ученые зап. МГУ (сер.мат.), 1939, 30, с. 3.
47. Бурбаки Н. Функции действительного переменного."Наука", М., 1965.
48. Боголюбов Н.Н.(мл.), Садовников Б.И. Некоторые проблемы статистической механики. "Высшая школа", М., 1975.
49. Van Hemmen J.L., Rzążewski K. Phys.Lett., 1980, 77A, p. 211.
50. Van den Berg M., Lewis J.T. Commun. Math.Phys., 1981, 81, p.475.
51. Van den Berg M., Lewis J.T. Physica, 1982, 110A, p.550.
52. Van den Berg M. J. Math.Phys., 1983, 23, p.1159.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 августа 1983 года.

Загребнов В.А. Р17-83-622
Метод аппроксимирующего гамильтониана для модели Дикке с учетом бесконечного числа бозонных мод и A^2-члена

Метод аппроксимирующего гамильтониана /МАГ/ обобщен на случай модели, указанной в названии работы. Это позволяет точно вычислить плотность свободной энергии модели и некоторые термодинамические средние. Показано, что для взаимодействия в приближении бегущей волны модель описывает фазовый переход в сверхизлучающее состояние.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Zagrebnov V.A. P17-83-622
The Approximating Hamiltonian Method for an Infinite-Mode Dicke Maser Model with the A^2-Term

A new Dicke-type maser model is proposed. It involves infinite /in the thermodynamic limit/ modes and A^2-term. The approximating Hamiltonian method /AHM/ is shown to be valid for the exact calculation of the free energy per particle and some thermodynamic averages for this model in the thermodynamic limit. The model persists in a superradiant phase transition at least for the rotating-wave approximation in the interaction.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод автора