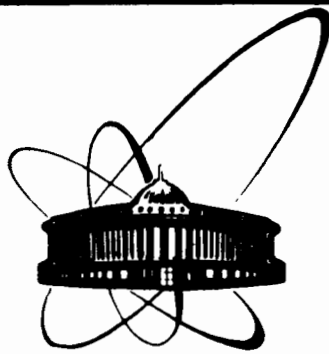


3/8 - 83



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

5010/83

P17-83-528

В.Е.Гришин, В.К.Федянин

ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДЕЛИ φ^4
В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ЯКОБИ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ИХ
МЕТОДОМ ФАЗОВОЙ ПЛОСКОСТИ

Направлено в журнал
"Теоретическая и математическая физика"

1983

ВВЕДЕНИЕ

При исследовании поведения решений нелинейных динамических уравнений с произвольной нелинейностью степенного вида $|\phi|^{2 \cdot N}$ оказалось эффективным использование метода фазовой плоскости [1,2,4]. Так, в частности, в модели с лагранжианом $L = -L_1(|\phi|^{2N}) - g_2 \cdot (J_\mu \cdot J_\mu)^{N/2}$ на классе функций специального вида $\tilde{\phi}(\theta, \psi) = \phi(\theta) \cdot e^{i\psi}$ /где $\theta = k_\mu \cdot x_\mu$, $\psi = p_\mu \cdot x_\mu$ - лоренц-инвариантные скалярные произведения в $n+1$ -мерном псевдоевклидовом пространстве/ мы приходим фактически к задаче исследования поведения квазиодномерной системы на фазовой плоскости $\{\pi \equiv \phi_\theta, \phi\}$. На данной фазовой плоскости $\{\pi, \phi\}$ будут существовать различные топологические семейства траекторий /орбит/. Для топологически эквивалентных семейств траекторий имеется гомеоморфизм пространств параметров и непрерывно зависящее от параметров семейство гомеоморфизмов фазового пространства, переводящее семейство ориентированных фазовых кривых одного семейства при каждом значении параметра в семейство ориентированных фазовых кривых другого семейства при соответствующем значении параметра. Решения $\phi(E)$, соответствующие определенному семейству гомеоморфизмов фазового пространства, непрерывно переходят друг в друга при непрерывном изменении параметра E . Очевидно, что данные отображения определяют гомеоморфизм прямых произведений фазового пространства на пространство значений параметров, т.е. $\Pi(\pi, \phi)_E \in \mathcal{O}\tilde{N}(\phi, E)$.

Возможны, однако, и другие обобщения классической механики, порождаемые более тонкой аналогией. Мы видим, что принцип Гамильтона дает возможность компактно и инвариантно сформулировать уравнения движения. Например, возможны такие случаи, при

которых интеграл для траектории $F(\phi, E) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{E - U(\phi)}}$ приводится

к эллиптическому и решение выражается через эллиптические функции Якоби. Свойством этих интегралов и их связи с эллиптическими функциями посвящена обширная литература. Целью данной работы является исследование разнообразных по своим топологическим характеристикам /точки поворота, точки бифуркации/ решений, полученных в виде эллиптических функций на фазовой плоскости $\{\pi, \phi\}$ для некоторого вариационного параметра E . Исследуются вырожденные решения /солитоны, кинки/ на сепаратрисах S с точками бифуркаций, а также решения с $E = E_{\min}$ /вакуумные решения/.

1. В работе /1/ была рассмотрена модель с лагранжианом вида:

$$L = -L_1 (|\tilde{\phi}|^{2N}) - g_2 \cdot (J_\mu \cdot J_\mu)^{N/2} \quad /1/$$

на классе функций $\tilde{\phi}(\theta, \psi) = \phi(\theta) \cdot e^{i\psi}$, где $\theta = k_\mu \cdot k_\mu$, $\psi = p_\mu \cdot x_\mu$ /здесь

метрика та же, что и в /1/: $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \dots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$,

$$\text{Sp } g_{\mu\nu} = g_{\alpha\alpha} = -(n-1), \quad \mu = 0, 1, 2, \dots, n;$$

$$L_1 = |\partial_\mu \tilde{\phi}|^2 - m^2 |\tilde{\phi}|^2 + g_1 |\tilde{\phi}|^{2N},$$

$$J_\mu = \frac{i}{2} (\tilde{\phi}^* \partial_\mu \tilde{\phi} - \tilde{\phi} \cdot \partial_\mu \tilde{\phi}^*).$$

Если учесть условие ортогональности векторов k_μ, p_μ - $k_\mu \cdot p_\mu = k_0 \cdot p_0 - k_m \cdot p_m = 0$ /где p - времениподобный вектор $p_\mu \cdot p^\mu = p_0^2 - p_m \cdot p_m > 0$, k_μ - пространственноподобный вектор с индефинитной метрикой $k_\mu \cdot k^\mu = k_0^2 - k_m \cdot k_m = -a^2 < 0$, выражение /1/ на классе функций $\tilde{\phi}(\theta, \psi) = \phi(\theta) \cdot e^{i\psi}$ редуцируется в лагранжиан взаимодействия

$$L = -k_\mu^2 \cdot \phi_\theta - U(\phi),$$

$$U(\phi) = -(m^2 - p_\mu^2) \cdot \phi^2 + (g_1 + g_2 \cdot (p_\mu^2)^{N/2}) \cdot \phi^{2N}, \quad /2/$$

$$p_\mu^2 \equiv p_\mu \cdot p^\mu, \quad k_\mu^2 \equiv k_\mu \cdot k^\mu.$$

Гамильтониан $H = H(\pi, \phi)$ можно получить из /2/, используя преобразование Лежандра

$$H = \pi \cdot \phi_\theta - L = \frac{1}{4} \pi^2 + U(\phi), \quad /3/$$

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \phi_\theta} = 2 \cdot \phi_\theta.$$

Множитель $(-k_\mu^2)$ исключается масштабным преобразованием

$$\theta \rightarrow \lambda \theta, \quad \phi^\lambda = \phi(\lambda \theta), \quad (\lambda = \frac{1}{\sqrt{-k_\mu^2}}).$$

Отсюда имеем

$$\phi_\theta \rightarrow \phi_\theta \frac{d\tilde{\theta}}{d\theta} = \lambda \phi_\theta, \quad \text{где } \tilde{\theta} = \frac{\theta}{\sqrt{-k_\mu^2}}.$$

Для гамильтониана /3/ можно написать соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} + H\left(\frac{\partial S}{\partial \phi}, \phi\right) = 0, \quad (\pi = \frac{\partial S}{\partial \phi}), \quad /4/$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)^2 + U(\phi) = 0. \quad /4^*/$$

Уравнение с полным действием, записанным в виде

$$S(E, \phi, \theta) = W(E, \phi) - E \cdot \theta, \quad /5/$$

легко разделяется.

Используя /5/, для уравнения /4^*/ имеем:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial W}{\partial \phi}\right)^2 + U(\phi) = E, \quad /6/$$

где параметр E есть интеграл движения.

Уравнение /6/ может быть проинтегрировано:

$$W(E, \phi) = \int \pi \cdot d\phi, \quad \pi = 2\sqrt{E - U(\phi)}, \quad /7/$$

и, следовательно, для полного действия имеем выражение

$$S(E, \phi, \theta) = 2 \int \sqrt{E - U(\phi)} \cdot d\phi - E \cdot \theta. \quad /8/$$

Так как нас будет интересовать траектория движения как функция $\phi = \phi(\theta)$, то целесообразно вычислять не полное действие S - /8/,

а лишь ее частные производные $\beta = \frac{\partial S}{\partial E}$. Для определения β согласно

/8/ имеем:

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \frac{d\phi}{\sqrt{E - U(\phi)}} - \theta \equiv F(\phi, E) - \theta, \quad /9/$$

где β, E - некоторые вариационные параметры.

Если известен интеграл $F(\phi, E) = \theta + \beta$, то можно найти обратную функцию * /траекторию движения/ $\phi = F^{-1}(\theta + \beta, E)$, которая удовлетворяет редуцированному уравнению

* В дальнейшем будет показано, в каких случаях находится инверсная функция $\phi = F^{-1}(\theta + \beta, E)$.

$$\partial_{\theta}^2 \cdot \phi + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$$

/здесь сделан переход $\theta \rightarrow \frac{\theta}{\sqrt{-k_{\mu}^2}}$ /, полученному из лагранжиана

/2/. Аналогично "полная траектория" $\tilde{\phi}(\theta, \psi) = F^{-1}(\theta + \beta, E) \cdot e^{i\psi}$ будет удовлетворять уравнению движения

$$\hat{K} \cdot \tilde{\phi} = N \cdot (g_2 |\tilde{\phi}|^{2(N-1)} \tilde{\phi} + g_2 \cdot (J_{\mu} \cdot J_{\mu})^{N/2-1} \cdot \frac{\delta(J_{\mu} \cdot J_{\mu})}{\delta \tilde{\phi}^*},$$

вытекающему из искомого лагранжиана /1/. /Здесь $\hat{K} = \partial_0^2 - \Delta_{nn} + m^2$. Дифференциальный оператор $\hat{K} = [\square + m^2]$ действует на полевую функцию $\tilde{\phi}(\theta, \psi) = \phi(\theta) \cdot e^{i\psi}$ следующим образом:

$$(\square + m^2) \phi(\theta) \cdot e^{i\psi} = (g_{\mu\nu} \cdot \partial_{\mu} \partial_{\nu} + m^2) \cdot \phi(\theta) \cdot e^{i\psi} =$$

$$= (g_{\mu\nu} \cdot k_{\mu} k_{\nu} \cdot \phi_{\theta\theta} + 2ik_{\mu} \cdot p_{\mu} \cdot \phi_{\theta} -$$

$$- g_{\mu\nu} p_{\mu} \cdot p_{\nu} \cdot \phi + m^2 \cdot \phi) \cdot e^{i\psi},$$

при условии, что $k_{\mu} \cdot p_{\mu} = 0$, получаем

$$(\square + m^2) \phi(\theta) \cdot e^{i\psi} = (k_{\mu}^2 \cdot \phi_{\theta\theta} - p_{\mu}^2 \cdot \phi + m^2 \cdot \phi) \cdot e^{i\psi},$$

$$\frac{\delta(J_{\mu} \cdot J_{\mu})}{\delta \tilde{\phi}^*} = |\partial_{\mu} \tilde{\phi}|^2 \cdot \tilde{\phi}^* (\partial_{\mu} \tilde{\phi})^2 + \frac{1}{2} \tilde{\phi}^2 g_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} \tilde{\phi}^* -$$

$$- \frac{1}{2} |\tilde{\phi}|^2 g_{\mu\nu} \partial_{\mu\nu} \tilde{\phi}.$$

Для окончательного решения свяжем параметры β, E с начальными условиями.

Поставим задачу о нахождении траектории движения:

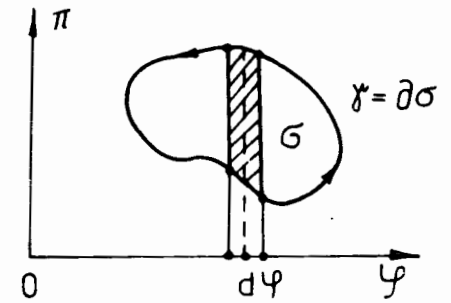
$$\phi = F^{-1}(\theta + \beta, E), \quad \pi = \frac{\partial S}{\partial \phi} = 2 \cdot \sqrt{E - U(\phi)} \quad /10/$$

с начальными данными

$$\phi|_{\theta=\theta_0} = \phi_0, \quad \pi|_{\theta=\theta_0} = \pi_0 = \left(\frac{\partial S}{\partial \phi}\right)_0 = 0.$$

Из условия $\pi_0 = 2 \sqrt{E - U(\phi)} = 0$ определяются точки поворота /корни $\phi_n = \phi(E)$ уравнения $E - U(\phi) = 0$ / , поэтому в случае финитного движения амплитуда колебаний A будет определяться параметром E , $A(E) = \phi_n(E)$. Параметр β в /10/ задает начальную

Рис.1. Интеграл от формы $\omega^1 = \pi \cdot d\phi$ на границе $\partial\sigma$ замкнутой траектории равен площади, заключенной внутри кривой γ .



точку траектории (ϕ_0, β) , поэтому в дальнейших расчетах за начало отсчета можно положить $\beta = 0$.

В выражении /6/ параметр E есть интеграл движения, представляющий собой среднюю энергию для H в /3/ по коллективной переменной θ . Действительно, для средней энергии $\langle H \rangle$ согласно /3/ имеем

$$\langle H \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T H(\theta) \cdot d\theta = \frac{1}{T} \int_0^T E \cdot d\theta = E,$$

в случае финитного движения E есть средняя энергия по периоду T на замкнутых траекториях.

Интеграл $I(E) = \oint_{\gamma} \pi \cdot d\phi = 2 \oint_{\gamma} \sqrt{E - U(\phi)} d\phi$ сохраняется точно на замкнутых орбитах в фазовом пространстве $\{\pi, \phi\}$ /рис.1/.

Форма 1-й степени $\omega^1 = \pi \cdot d\phi$ является относительно инвариантом Пуанкаре и представляет собой элемент ориентированной площади в фазовом пространстве $\{\pi, \phi\}$. Таким образом, $I(E) = \oint_{\gamma} \omega^1$ есть абсолютный интегральный инвариант и представляется как площадь, заключенная под кривой γ /рис.1/.

2. Перейдем к интегрированию /9/ в эллиптических функциях и проанализируем поведение решений на фазовой плоскости (π, ϕ) . Как правило, интеграл /9/ берется в эллиптических функциях /2,3,4/, если $E - U(\phi)$ есть многочлен третьей или четвертой степени по полю ϕ . Инверсная функция $\phi = F^{-1}(\theta + \beta, E)$ в этих случаях получается относительно просто /4/.

Получим решения для интеграла

$$\theta - \theta_0 = \int \frac{d\phi}{\sqrt{E - U(\phi)}}, \quad (\theta = \tilde{k}_{\mu} \cdot x_{\mu}, \quad \tilde{k}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-k_{\mu}^2}} (k_0, k_n)) \quad /11/$$

при различном выборе констант a и b в потенциале $U(\phi)$. Заметим, кстати, что при $E=0$ для потенциала в /11/ $U = a \cdot \phi^{2N} - |b| \cdot \phi^2$ с произвольной нелинейностью $N(a > 0, b < 0)$ интеграл /11/ берется в квадратурах /2,4/. Действительно,

$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2} \int z^{-1} \cdot (|b| - a \cdot z^{N-1})^{-1/2} \cdot dz,$$

где $z = \phi^2$, вводя переменную $\tilde{z} = z^{N-1}$, получаем решение

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2(N-1)} \int (|b| - a\tilde{z})^{-1/2} \cdot \tilde{z}^{-1} \cdot d\tilde{z} = \\ &= \frac{1}{2(N-1) \cdot |b|} \ln \frac{\sqrt{u} - \sqrt{|b|}}{\sqrt{u} + \sqrt{|b|}}, \end{aligned}$$

$$U = |b| - a\tilde{z}.$$

Обратное преобразование в последнем выражении $\phi_s = \phi(\theta)$ дает решение в виде анизотропного солитона /2,4/ для пространства с размерностью $n > 1$:

$$\phi_s(\sigma) = \phi_0 \cdot \operatorname{sech}^{1/(N-1)}(\sigma/\Delta),$$

где

$$\phi_0 = \left(\frac{|b|}{a}\right)^{1/2(N-1)}, \quad \Delta = 1/(N-1) \cdot |b|^{1/2},$$

$$\sigma = \frac{\theta}{a} = \tilde{k}_\mu \cdot x_\mu, \quad (a = \sqrt{k_i^2 - k_0^2}),$$

вектор $\tilde{k}_\mu = (\frac{k_0}{a}, \frac{k_i}{a})$ нормирован: $\tilde{k}_\mu \cdot \tilde{k}_\mu = \frac{1}{a^2} (k_0^2 - k_i k_i) = -1$.

Получим решения в виде эллиптических функций Якоби для потенциала в /11/ /при $N = 2$, $U(\phi) = b\phi^2 + a\phi^4$. Вид $U(\phi)$ и поведение траекторий на фазовой плоскости $\{\pi, \phi\}$ при различном выборе знаков констант a, b дается на рис.2-5:

I. $a < 0, b < 0$ /рис.2/; II. $a < 0, b > 0$ /рис.3/;
III. $a > 0, b > 0$ /рис.4/; IV. $a > 0, b < 0$ /рис.5/.

Для дальнейшего рассмотрения нам удобно классифицировать все решения следующим образом:

I. К этому классу относятся все траектории, у которых отсутствуют точки поворота в конечной области фазового пространства (π, ϕ) /кривая с $E = E_1$, рис.2/;

II. К этому классу относятся траектории, у которых имеется одна точка поворота /кривая с $E = E_3$, рис.2/;

III. В этом классе содержатся траектории с двумя точками поворота /случай финитного движения/; при этом все траектории замкнуты, рис.4,5/.

3. Перейдем к детальному анализу случаев /I-IV/:

I. В случае $a < 0, b < 0$ /рис.2/ многочлен $E - U(\phi)$ имеет вид $E - U(\phi) = E + |b| \cdot \phi^2 + |a| \cdot \phi^4$. Мы имеем две разновидности траекторий: для $E > 0$ отсутствуют точки поворота в конечной области фазового пространства (π, ϕ) /кривая с $E = E_1$, рис.2/; для $E < 0$ имеется одна точка поворота: ϕ_1 или ϕ_2 /кривая с $E = E_3$, рис.2/.

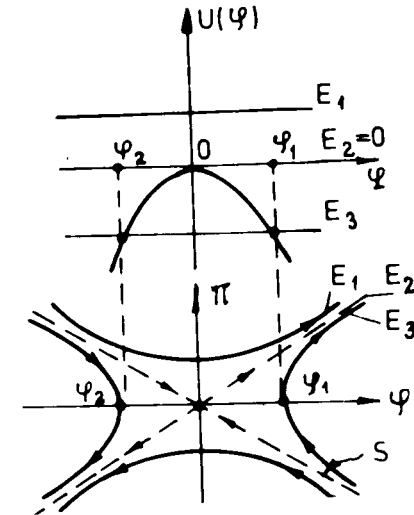


Рис.2. Вид потенциала $U(\phi) = -|a| \cdot \phi^4 - |b| \phi^2$ и картина фазовой плоскости (π, ϕ) в случае $a < 0, b < 0$.

Интеграл /11/ для $E > 0$ запишем в виде:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{\phi^4 + 2\tilde{b}^2 \cdot \phi^2 + \tilde{E}^4}} = g \cdot \operatorname{cn}^{-1}(\cos\psi, k),$$

где

$$\psi = \cos^{-1} \left(\frac{y^2 - \tilde{E}^2}{y^2 + \tilde{E}^2} \right), \quad \operatorname{cn} \sigma = \cos\psi,$$

$$\tilde{b}^2 = \frac{|b|}{2|a|}, \quad \tilde{E}^4 = \frac{E}{|a|}.$$

Используя последние соотношения, находим инверсную функцию

$$\phi = F^{-1}(\sigma, E),$$

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{E}{|a|}} \frac{1}{\operatorname{tn}(\sigma/2, k) \cdot \operatorname{dn}(\sigma/2, k)},$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{|a|} \cdot (\theta - \theta_0)}{g} = 2 \sqrt[4]{E \cdot |a|} \cdot (\theta - \theta_0), \quad g = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{|a|}{E}},$$

$$k^2 = \frac{\sqrt{E/|a|} - |b|/2 \cdot |a|}{2\sqrt{E/|a|}}, \quad E > \frac{b^2}{4|a|}, \quad a < 0, \quad b < 0.$$

Очевидно, решение /12/ принадлежит к 1-му классу и представлено на рис.6. Основной особенностью данных решений является наличие нулей и полюсов в выражении /12/.

Так как при $E = E_0 = \frac{b^2}{4|a|}$ $k^2 = 0$, а при $E \rightarrow \infty$ $k^2 \rightarrow 1$,

то модуль k^2 эллиптических функций, входящих в /12/, ограничен: $0 \leq k^2 < 1$. Возникает естественная "запрещенная зона" по энергии

E с шириной $\Delta = E_0 = \frac{b^2}{4|a|}$. При предельном положении $E = E_0 = \frac{b^2}{4|a|}$

($k^2 = 0$) эллиптическая функция в /12/ трансформируется в тригонометрическую:

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{|b|}{2|a|}} \frac{1}{\operatorname{tr}(\sqrt{\frac{|b|}{2|a|}}(\theta - \theta_0))}$$

В случае $E < 0$ многочлен

$$P_4 = E - U(\phi) = |a| \cdot \phi^4 + |b| \cdot \phi^2 - |E|$$

имеет корни $\phi_1 = -\phi_2 = \beta$, $\bar{\phi}_2 = -\bar{\phi}_1^* = i\alpha$, где

$$\beta^2 = (\sqrt{b^2 + 4|a| \cdot |E|} - |b|) / 2 \cdot |a|,$$

$$\alpha^2 = (|b| + \sqrt{b^2 + 4|a| \cdot |E|}) / 2 \cdot |a|,$$

интеграл /11/ для $E < 0$ имеет вид:

$$\int_y^\infty \frac{d\phi}{\sqrt{(a^2 + \phi^2)(\phi^2 - \beta^2)}} = g \cdot \operatorname{sn}^{-1}(\sin \psi, k),$$

где

$$\psi = \operatorname{am} \sigma = \sin^{-1} \sqrt{\frac{a^2 + \beta^2}{a^2 + y^2}}, \quad \sin \sigma = \operatorname{sn} \psi.$$

Инверсная функция для $E < 0$ представляется в следующем виде:

$$\phi = \frac{(\beta^2 + a^2 \cdot \operatorname{cn}^2(\sigma, k))^{1/2}}{\operatorname{sn}(\sigma, k)},$$

$$k^2 = \frac{a^2}{a^2 + \beta^2} = \frac{|b| + \sqrt{b^2 + 4|a| \cdot |E|}}{2\sqrt{b^2 + 4|a| \cdot |E|}}, \quad /13/$$

$$g = \frac{1}{(a^2 + \beta^2)^{1/2}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt[4]{b^2 + 4|a| \cdot |E|}}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{|a|}}{g} (\theta - \theta_0) = \sqrt[4]{b^2 + 4|a| \cdot |E|} \cdot (\theta - \theta_0).$$

Решение /13/ имеет полюса, когда функция $\operatorname{sn}(\sigma, k) = 0$, но не имеет нулей /рис.7/.

Так как данное решение для $E = E_3 < 0$ соответствует траекториям с одной точкой поворота /рис.2, кривая с $E = E_3$ / на фазовой плоскости (π, ϕ) , то, очевидно, оно принадлежит ко 2-му классу.

II. $a < 0, b > 0$. В этом случае, как следует из рис.3, мы имеем 4 решения:

1/ при $E > E_{\max} = \frac{b^2}{4|a|}$ все корни многочлена $E - U(\phi) = |a| \cdot \phi^4 -$

$-b \cdot \phi^2 + E$ комплексные,

$$\phi_1 = \alpha, \quad \phi_1^* = \beta,$$

$$\phi_2 = -\alpha, \quad \phi_2^* = -\beta,$$

где

$$\alpha = \left[\frac{b + i\sqrt{4|a| \cdot E - b^2}}{2|a|} \right]^{1/2} = R^{1/2} \cdot e^{i\xi/2},$$

$$\beta = \left[\frac{b - i\sqrt{4|a| \cdot E - b^2}}{2|a|} \right]^{1/2} = R^{1/2} \cdot e^{-i\xi/2},$$

$$R = \sqrt{\frac{E}{|a|}}, \quad \cos \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \xi)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{b}{2\sqrt{|a| \cdot E}}\right)},$$

$$\sin \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \xi)} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{b}{2\sqrt{|a| \cdot E}}\right)}.$$

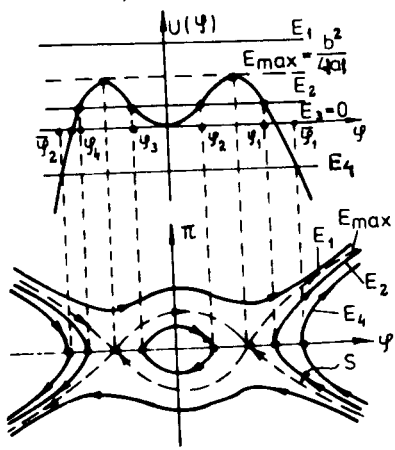


Рис.3. Вид потенциала $U(\phi) = b\phi^2 - |a|\phi^4$ и кривых для траекторий на фазовой плоскости (π, ϕ) в случае соотношения знаков констант $a < 0, b > 0$.

Интеграл /11/ представляется в виде

$$\int_{y_1}^y \frac{d\phi}{\sqrt{[(\phi - b_1)^2 + a_1^2][(\phi - b_2)^2 + a_2^2]}} = g \cdot \text{tn}(\text{tg}\psi, k), \quad /15/$$

где

$$\psi = \text{am}\sigma = \text{tg}^{-1} \left[\frac{y - b_1 + a_1 \varepsilon_1}{a_1 + g_1 \cdot b_1 - g_1 \cdot y} \right], \quad \text{tn}\sigma = \text{tg}\psi.$$

Величины $a_1^2, b_1, a_2^2, b_2, g, g_1$ выражаются через корни /14/ и принимают значения

$$a_1^2 = R \cdot \sin^2 \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{E}{|a|}} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{b}{2\sqrt{|a| \cdot E}} \right), \quad a_2^2 = a_1^2,$$

$$b_1 = R^{1/2} \cdot \cos \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{E}{|a|}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{2\sqrt{|a| \cdot E}} \right)}, \quad b_2 = -b_1, \quad /16/$$

$$g = \frac{1}{R^{1/2}(1 + \cos \xi/2)} = \frac{1}{4 \cdot \sqrt{\frac{E}{|a|}} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{2\sqrt{|a| \cdot E}} \right)} \right)},$$

$$g_1^2 = (1 - \cos \xi/2)/(1 + \cos \xi/2).$$

После обратных преобразований в /15/ и использования /14/ и /16/ решение представляется в окончательном виде:

$$\phi(\sigma, k) = \sqrt{\frac{E}{|a|}} \frac{F + G \cdot \text{tn}(\sigma, k)}{1 + g_1 \cdot \text{tn}(\sigma, k)}, \quad /17/$$

где

$$\sigma = \frac{\sqrt{|a|}(\theta - \theta_0)}{g}, \quad g = \frac{1}{4 \sqrt{\frac{E}{|a|}} (1 + \cos \frac{\xi}{2})},$$

$$F = \cos \frac{\xi}{2} + g_1 \cdot \sin \frac{\xi}{2}, \quad G = g_1 \cdot \cos \frac{\xi}{2} - \sin \frac{\xi}{2},$$

$$k^2 = 4 \cos \frac{\xi}{2} / (1 + \cos \frac{\xi}{2})^2.$$

Так как в выражении $\cos \frac{\xi}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{2\sqrt{|a| \cdot E}} \right)}$ при $E = \frac{b}{4|a|}$, $\cos \frac{\xi}{2} = 1$, а при $E \rightarrow \infty$ $\cos \frac{\xi}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}$, то модуль k^2 для эллиптической функции $\text{tn}(\sigma, k)$ варьируется в пределах $1 \geq k^2 > \frac{8\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})^2}$. Полюса функции /17/ находятся из требования $\text{tn}(\sigma, k) = -1/g_1$, нули определяются выражением

$$\text{tn}(\sigma, k) = -1/g_1.$$

Так как рассматриваемые траектории /рис.3/ при $E = E_1$ не имеют точек поворота в конечной области фазового пространства (π, ϕ) , то, очевидно, решения вида /17/ будут относиться к 1-му классу /рис.6/;

2/ при $E = E_2, b < E_2 < E_{\text{max}} = \frac{b^2}{4|a|}$ /рис.3/ мы получаем все действительные корни для многочлена

$$E - U(\phi) = |a| \cdot \phi^4 - b \cdot \phi^2 + E, \quad \phi_1^2 = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}{2|a|},$$

$$\phi_2^2 = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}{2|a|}, \quad \phi_1 = -\phi_4, \quad \phi_2 = -\phi_3.$$

Здесь имеются две траектории незамкнутые, с одной точкой поворота, ϕ_1 или ϕ_2 /рис.3/, и одна замкнутая, с двумя точками поворота, ϕ_2 и ϕ_3 . Для незамкнутых траекторий $\infty > \phi \geq \phi_1 > \phi_2$ интеграл /11/ представляется в виде /8/

$$\int_y^{\infty} \frac{d\phi}{\sqrt{(\phi^2 - \phi_1^2)(\phi^2 - \phi_2^2)}} = g \cdot \text{sn}^{-1}(\sin\psi, k),$$

где

$$\psi = \text{am}\sigma = \sin^{-1}(\phi_1/y), \quad \text{sn}\sigma = \sin\psi.$$

Инверсная функция в этом случае представляется в виде сингулярного решения /рис.7/:

$$\phi = \left(\frac{\phi_1}{\phi_4} \right) \frac{1}{\text{sn}(\sigma, k)}, \quad /18/$$

где

$$\sigma = \frac{\sqrt{|a|}(\theta - \theta_0)}{g} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}{2}} \cdot (\theta - \theta_0),$$

$$g_1 = \frac{1}{\phi_1} = \sqrt{\frac{2|a|}{b + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}},$$

$$k^2 = \frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} = \frac{\sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E} \sqrt{b^2 + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}}{\phi_1^2}.$$

модуль эллиптической функции. Параметр E варьируется в пределах $0 \leq E \leq \frac{b^2}{4|a|}$. В случае финитного движения для замкнутых

траекторий $\phi_2 \geq \phi \geq \phi_3$ подкоренное выражение интеграла /11/ видоизменяется и /11/ записывается в виде

$$\int_0^y \frac{d\phi}{\sqrt{(\phi_1^2 - \phi^2)(\phi_2^2 - \phi^2)}} = g \cdot \text{sn}^{-1}(\sin\psi, k).$$

Решение на замкнутых траекториях описывается функцией

$$\phi = \phi_2 \cdot \text{sn}(\sigma, k), \quad /19/$$

где

$$\sigma = \frac{\sqrt{|a|}(\theta - \theta)}{g} = \sqrt{\frac{b + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}{2}} (\theta - \theta_0),$$

$$g = \frac{1}{\phi_1} = \sqrt{\frac{2|a|}{b + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E}}},$$

$$k^2 = \frac{\phi_2^2}{\phi_1^2} = \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E})}{(b + \sqrt{b^2 - 4|a| \cdot E})},$$

$$(0 \leq E \leq \frac{b^2}{4|a|}).$$

Решение вида /19/ относится к 3-му классу и представлено на рис.8. Данное частное решение /19/, принадлежащее нашему полному семейству решений II ($a < 0, b > 0$), было ранее получено автором работы /3/.

Особые решения на сепаратрисе S /рис.3/ в виде кинков

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{b}{2|a|}} \cdot \text{th}\left(\sqrt{\frac{b}{2}}(\theta - \theta_0)\right) \quad /20/$$

получаются из решения /19/ как вырожденный случай при $k^2 = 1$

($E = \frac{b^2}{4|a|}$), рис.9. Вырожденное решение /20/ вытекает из связи эллиптических функций Якоби с гиперболическими функциями /для данного случая имеем $\text{sn}(\sigma, 1) = \text{th}\sigma$ /.

4. малые линейные колебания. Возможен другой вырожденный случай: переход в малые колебания.

Решения /19/ можно переписать в виде

$$\phi = \phi_1 \cdot k^2 \text{sn}(\sigma, k).$$

Раскладывая эллиптическую функцию $\text{sn}(\sigma, k)$ по степеням k^2 /при $k^2 \ll 1$ / имеем:

$$\phi = \phi_1 \cdot k^2 \left(\sin\sigma - \frac{k^2}{4} \cos\sigma(\sigma - \sin\sigma \cdot \cos\sigma) \right).$$

Оставляя члены $\phi - \phi(O(k^2))$, получаем переход к малым линейным колебаниям:

$$\phi \approx \phi_1 \cdot k^2 \sin\sigma \quad \text{при } k^2 \ll 1.$$

3/ при $E = E_4 < 0$ /рис.3/ для многочлена

$$E - U(\phi) = |a|\phi^4 - b\phi^2 - |E|$$

имеем два действительных корня, $\bar{\phi}_1 = -\bar{\phi}_2 = \beta$, и два комплексных, $\phi_3 = -\phi_3^* = i\alpha$, где

$$\beta^2 = (b + \sqrt{b^2 + 4|a| \cdot |E|}) / 2 \cdot |a|,$$

$$\alpha^2 = (\sqrt{b^2 + 4|a| \cdot |E|} - b) / 2|a|.$$

Для интеграла /11/ получаем следующее представление:

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{(\alpha^2 + \phi^2)(\phi^2 - \beta^2)}} = g \cdot \text{sn}^{-1}(\sin \psi, k),$$

где

$$\psi = \alpha \sigma = \sin^{-1} \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 + y^2}}, \quad \text{sn} \sigma = \sin \psi.$$

На траектории с одной точкой поворота, $\bar{\phi}_1$ или $\bar{\phi}_2$ /кривая с $E = E_4$, рис.3/, для $\phi_1 \leq \phi < \infty$ /или $-\infty < \phi \leq -\bar{\phi}_2$ / существуют сингулярные решения, описываемые функцией

$$\phi = \frac{(\beta^2 + \alpha^2 \cdot \text{cn}^2(\sigma, k))^{1/2}}{\text{sn}(\sigma, k)}, \quad /21/$$

где $k^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{(b^2 + 4|a| \cdot |E|)^{1/2} b}{2(b^2 + 4|a| \cdot |E|)^{1/2}}$ - модуль эллиптических функций $\text{sn}(\sigma, k)$, $\text{cn}(\sigma, k)$;

$$g = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} = \sqrt{|a| \cdot (b^2 + 4|a| \cdot |E|)^{-1/4}},$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{|a|}}{g} (\theta - \theta_0) = (b^2 + 4|a| \cdot |E|)^{1/4} \cdot (\theta - \theta_0), \quad b > 0, a < 0$$

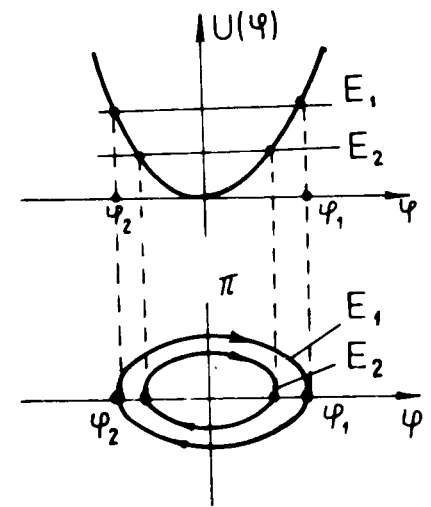
/см. рис.7/.

III. Для потенциала в /11/, когда $a > 0$, $b > 0$, мы имеем замкнутые траектории одного вида /рис.4/. В этом случае многочлен $E - U(\phi) = -a\phi^4 - b\phi^2 + E$ имеет два действительных корня, $\phi_1 = -\phi_2 = \beta$, и два комплексных, $\phi_3 = -\phi_3^* = i\alpha$, где

$$\beta^2 = \frac{(b^2 + 4aE)^{1/2} - b}{2a},$$

$$\alpha^2 = \frac{b + (b^2 + 4aE)^{1/2}}{2a}.$$

Рис.4. Потенциал $U(\phi) = b\phi^2 + a\phi^4$ и замкнутые траектории на фазовой плоскости (π, ϕ) в случае $a > 0, b > 0$.



Для интеграла /11/ имеем соответствующее представление:

$$g \cdot F(\psi, k) = \int \frac{d\phi}{\sqrt{(\alpha^2 + \phi^2)(\phi^2 - \beta^2)}} = g \cdot \text{cn}^{-1}(\cos \psi, k),$$

где

$$\psi = \alpha \sigma = \cos^{-1}(y/\phi), \quad \text{cn} \sigma = \cos \psi;$$

$$g = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2} = \sqrt{a} \cdot (b^2 + 4a \cdot E)^{-1/4}.$$

Решение на замкнутых траекториях для $\phi_2 \leq \phi \leq \phi_1$ /рис.4/ представляется в виде нелинейной /коноидальной/ волны /рис.8/:

$$\phi = \phi_1 \cdot \text{cn}(\sigma, k), \quad /22/$$

здесь

$$\sigma = \frac{\sqrt{a}}{g} (\theta - \theta_0) = \sqrt{b^2 + 4aE} \cdot (\theta - \theta_0),$$

$$k^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\sqrt{b^2 + 4aE} - b}{2 \cdot \sqrt{b^2 + 4aE}}$$

модуль эллиптической функции $\text{cn}(\sigma, k)$.

Запишем /22/ в виде

$$\phi = (a^2 + \beta^2)^{1/2} \cdot k \cdot \text{cn}(\sigma, k).$$

Раскладывая последнее выражение по k /для $k^2 \ll 1$ /, имеем:

$$\phi = (a^2 + \beta^2)^{1/2} \cdot k \cdot (\cos \sigma + \frac{k^2 \cdot \sin \sigma}{4} \cdot (\sigma - \sin \sigma \cdot \cos \sigma)).$$

Используя члены порядка $\phi \sim O(k)$, получаем малые линейные колебания:

$$\phi = (a^2 + \beta^2)^{1/2} \cdot k \cdot \cos \sigma.$$

IV. Для потенциала в /11/ ($a > 0, b < 0$) задача была решена в /2, 4/. Многочлен $E - U(\phi)$ имеет вид $E - U(\phi) = -a\phi^4 + |b| \cdot \phi^2 + E$. Здесь мы выпишем полученные ранее решения в обозначениях данной работы.

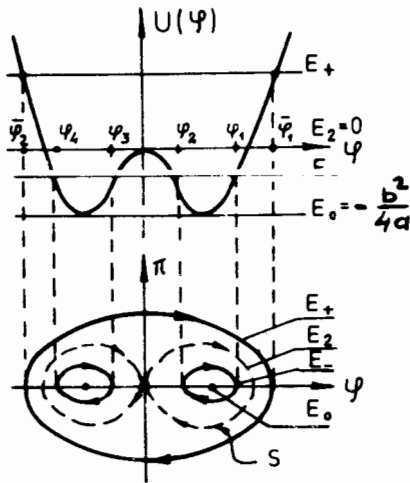


Рис.5. Вид потенциала $U(\phi) = -|b|\phi^2 + a\phi^4$ ($a > 0, b < 0$) и соответствующие ему траектории на фазовой плоскости (π, ϕ) .

Для $E_+ > 0$ /рис.5/ имеется решение:

$$\phi = \bar{\phi}_2 \cdot \text{cn}(\sigma, k) =$$

$$= \pm \left(\frac{|b| + \sqrt{(b^2 + 4a \cdot E_+)}}{2 \cdot a} \right)^{1/2} \cdot \text{cn} \left(\sqrt{\frac{b^2 + 4a \cdot E_+}{4}} (\theta - \theta_0), k \right),$$

/23/

где

$$\bar{\phi}_1 = -\bar{\phi}_2, \quad \bar{\phi}_1^2 = \frac{|b| + \sqrt{b^2 + 4a \cdot E_+}}{2 \cdot a},$$

$$k^2 = \frac{|b| + \sqrt{b^2 + 4a \cdot E_+}}{2 \cdot \sqrt{b^2 + 4a \cdot E_+}}$$

модуль эллиптической функции. Здесь $b < 0, E_+ > 0, a > 0$.

Для $-\frac{b^2}{4a} = E_0 < E_- < 0$ справедливо решение

$$\phi = \left(\frac{\phi_1}{\phi_4} \right) \cdot \text{dn} \left(\frac{\sqrt{a}}{g} (\theta - \theta_0) \cdot (1+k), k_1 \right), \quad /24/$$

где $\phi_1 = -\phi_4, \phi_2 = -\phi_3$ — действительные корни,

$$\phi_1^2 = \frac{|b| + (b^2 - 4a \cdot |E_-|)^{1/2}}{2 \cdot a},$$

$$\phi_2^2 = \frac{|b| - (b^2 - 4a \cdot |E_-|)^{1/2}}{2 \cdot a},$$

$$g = \frac{2}{(\phi_1 + \phi_2)}, \quad k^2 = \left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{\phi_1 + \phi_2} \right)^2 = \frac{\frac{|b|}{a} - 2 \cdot \sqrt{\frac{|E_-|}{a}}}{\frac{|b|}{a} + 2 \cdot \sqrt{\frac{|E_-|}{a}}},$$

$k_1^2 = \frac{4 \cdot k}{(1+k)^2}$ — модуль эллиптической функции. Здесь $b < 0, a > 0,$

$E_- < 0$.

Если мы устремим E сверху и снизу к нулю в /23/, /24/, т.е. $E_+ \rightarrow 0$ ($k^2 \rightarrow 1$), $E_- \rightarrow 0$ ($k_1^2 \rightarrow 1$), получим решение на сепаратрисе S /рис.5, 10/ в виде солитона:

$$\begin{aligned} \phi &= \pm \sqrt{\frac{|b|}{a}} \cdot (\text{cn}(\sqrt{|b|} \cdot (\theta - \theta_0), 1) = \text{dn}(\sqrt{|b|} \cdot (\theta - \theta_0), 1)) = \\ &= \pm \sqrt{\frac{|b|}{a}} \cdot \text{ch}^{-1}(\sqrt{|b|} \cdot (\theta - \theta_0)). \end{aligned}$$

Заметим, что частное решение /23/ из семейства IV в случае потенциала в /11/ ($a > 0, b < 0$) было ранее получено автором работы /5/.

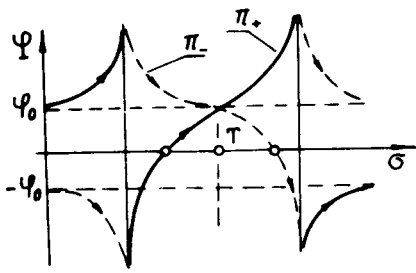


Рис.6. /1/ Класс решений, относящийся к траекториям без точек поворота в конечной области фазового пространства (π, ϕ) .

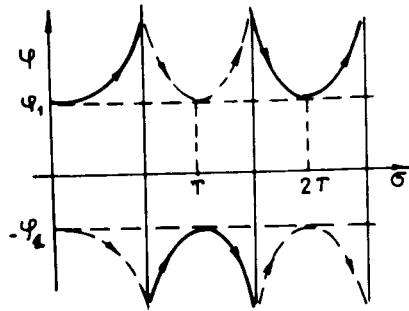


Рис.7. /2/ Класс решений, принадлежащий к траекториям с одной точкой поворота ϕ_1 или $-\phi_1$.

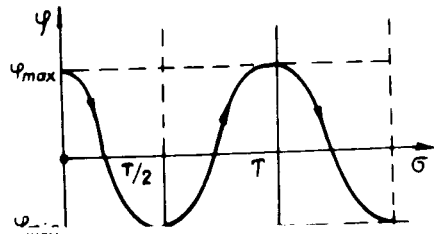


Рис.8. /3/ Класс решений, принадлежащий к замкнутым траекториям /две точки поворота: ϕ_{\min}, ϕ_{\max} /.

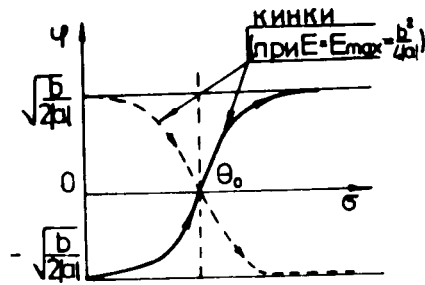


Рис.9. Вырожденные решения на сепаратрисе S в виде кинков для потенциала $U(\phi) = b\phi^2 - |a| \cdot \phi^4$ ($a < 0, b > 0$) при значении вариационного параметра $E = E_{\max} = \frac{b^2}{4|a|}$.

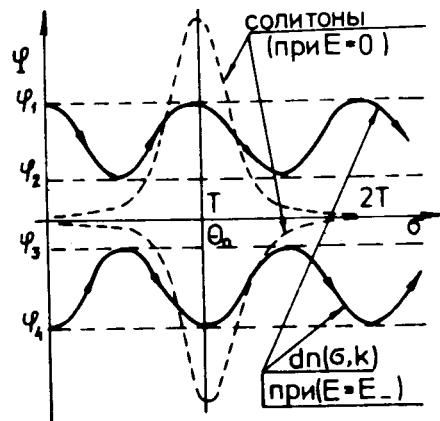


Рис.10. Вырожденные решения на сепаратрисе S в виде солитонов при $E = 0$ для потенциала $U(\phi) = -|b| \cdot \phi^2 + a\phi^4$ ($b < 0, a > 0$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате исследований, проведенных в данной работе, получены решения для модели ϕ^4 при различном соотношении знаков констант гамильтона a и b в виде эллиптических функций Якоби

по коллективной переменной $\sigma = \frac{\theta}{a} = \bar{k}_\mu x_\mu, \bar{k}_\mu = (\frac{k_0}{a}, \frac{k_m}{a}), \mu = 0, 1, 2, \dots, n$.

Построенные решения на сепаратрисах S вырождаются в солитоны или кинки. Наинизшее состояние /вакуум/ будет определяться решением в виде гармонических колебаний /конденсат вакуума/.

В случае малых колебаний вблизи вакуума использование разложения точного решения соответствует результату, получаемому в рамках теории возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гришин В.Е., Федянин В.К. ОИЯИ, Р17-83-171, Дубна, 1983.
2. Fedyanin V.K., Grishin V.E. JINR, E14-81-604, Dubna, 1981.
3. Krumhansl J.A., Schrieffer J.R. Phys.Rev., 1979, B11, p.3535.
4. Гришин В.Е., Федянин В.К. ТМФ, 1983, т.54, № 3, с.469.
5. Курдгеладзе Д.Ф. ЖЭТФ, 1959, вып.6, с.842.
6. Abramowitz M.A., Stegun I.A. Handbook Of Math.Func. National Bureau of Standards, Washington, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 июля 1983 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

ДЗ-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
ДЗ,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Гришин В.Е., Федянин В.К. P17-83-528
Интегрирование модели ϕ^4 в эллиптических функциях Якоби и исследование их методом фазовой плоскости

Для модели ϕ^4 при различных соотношениях знаков констант в гамильтониане получены решения в виде эллиптических функций Якоби. Такие существенно-нелинейные решения, исследуемые на фазовой плоскости, в предельном случае для параметра E на сепаратрисах S переходят в кинки или солитоны. При наименьшем состоянии $E = E_{\min}$ /вакуум/ решения трансформируются в конденсат вакуума /гармонические колебания/. Разложение решений вблизи вакуума соответствует результату, получаемому в рамках теории возмущений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Grishin V.E., Fedyanin V.K. P17-83-528
Integration of ϕ^4 Model in Elliptic Jacobi Functions and Their Study by the Phase Plane Method

For the ϕ^4 model solutions are obtained as Jacobi elliptic functions for different relations of constant signs. Such intrinsically nonlinear solutions, investigated on the phase plane, transform to kinks or solitons in the boundary case for E parameter on separatrices S . At the lowest state $E = E_{\min}$ (vacuum) solutions transform into the vacuum condensate (harmonic oscillations). Solution expansion near vacuum corresponds to the result obtained within the perturbation theory.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой