объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-83-171

В.Е.Гришин, В.К.Федянин

АНИЗОТРОПНЫЕ СОЛИТОНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ С РАЗМЕРНОСТЬЮ n > 1 В ТЕОРИЯХ С АБЕЛЕВОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ КАЛИБРОВОЧНОЙ ГРУППОЙ

Направлено в журнал "Physica D"

1983

Согласно теореме Деррика-Хоббарта[1,2] наличие стационарных точек при масштабных преобразованиях $x_\mu \to \lambda x_\mu$, $\phi_\lambda = \phi(\lambda x_\mu)$ обеспечивает существование решений в пространстве определенной размерности /n = 1,2,3,.../. В частности, включение в лагранжиан $(\phi^a)^4$ с изоскалярным полем электромагнитного поля A_μ обусловливает существование устойчивых минимумов у энергии и локализованных решений в пространстве с размерностью $n = 3$[3,4]. Заметим, что существование стационарных решений в пространстве с $n > 1$, возможно и в теориях с абелевой глобальной калибровочной симметрией / U/1/-группа/. Так, включая в лагранжиан высшие степени производных по полю $N > 2$*, можно получить устойчивые стационарные решения в пространстве с $n > 1$.

1. В развитии этой идеи рассмотрим действие

$S = -\int L(\phi, \phi^*, \partial_\mu\phi, \partial_\mu\phi^*)\, d^{n+1}x$ в $n+1$-мерном псевдоевклидовом пространстве с лагранжианом

$$-L = |\partial_\mu\phi|^2 - m^2|\phi|^2 + g_1|\phi|^{2N} + g_2 \cdot G^{1/2}(x,y),$$

или /1/

$$-L = L_1(|\phi|^{2N}) + g_2 \cdot G^{1/2}(x,y),$$

где $G(x,y)$ - источник нелокальных токов[6], который имеет вид:

$$G(x,y) = \int D(x, x_1) \cdot D_c^1(x_1 - x_2) \cdot D(x_2, x_3) \ldots$$

$$\ldots D(x_{N-3}, x_{N-2}) \cdot D_c^{N-2}(x_{N-2} - x_{N-1}) \cdot D(x_{N-1}, y)\, dx_1 \ldots dx_{N-1} \cdot dy, \quad /2/$$

$$D(x_i, x_{i+1}) = J_\mu(x_i) \cdot D_c^i(x_i - x_{i+1}) \cdot J_\mu(x_{i+1}),$$

где $D_c^i(x_i - x_{i+1})$ - причинный пропагатор, описывающий взаимодействие между локальными токами $J_\mu(x_i)$, $J_\mu(x_{i+1})$. Если положить $D_c^i(x_i - x_{i+1}) = \delta(x_i - x_{i+1})$, то приходим к локальному взаимодействию токов. В этом случае источник токов /2/ принимает вид

---
*Высшие степени нелинейности по полям были ранее рассмотрены в работе[5].

$$G(x,x) = \int J_\mu(x) \cdot \delta(x - x_1) \ldots J_\mu(x_{N-1}) \cdot \delta(x_{N-1} - y) \times$$

$$\times dx_1 dx_2 \ldots dx_{N-1} \cdot dy = [J_\mu(x) \cdot J_\mu(x)]^{N/2}.$$

Таким образом, в "локальном" пределе имеем для /1/:

$$-L = L_1(|\phi|^{2N}) + g_2(J_\mu \cdot J_\mu)^{N/2}. \qquad /1a/$$

Из вариационного принципа для /1a/

$$\delta S = -\delta(\int L \cdot d^{n+1}x) = 0$$

получаем уравнение движения

$$\hat{K} \cdot \phi = N(g_1|\phi|^{2(N-1)} \cdot \phi + \frac{g_2}{2}(J_\mu \cdot J_\mu)^{\frac{N}{2}-1} \frac{\delta(J_\mu \cdot J_\mu)}{\delta\phi^*}). \qquad /3/$$

где $\hat{K} = g_{\mu\nu}\dfrac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + m^2$ - оператор Клейна-Гордона в $n+1$ - мерном пространстве, $N = 2,3,4,\ldots$; $n = 1,2,3,\ldots$;

$$\frac{\delta(J_\mu \cdot J_\mu)}{\delta\phi^*} = |\partial_\mu\phi|^2 - \phi^*(\partial_\mu\phi)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\phi^2 \cdot g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\phi^* - \frac{1}{2}|\phi|^2 g_{\mu\nu}\partial_{\mu\nu}\phi.$$

Здесь

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}, \qquad Sp\, g_{\mu\nu} = g_{aa} = -(n-1),$$

$$J_\mu = \frac{i}{2}(\phi^*\partial_\mu\phi - \phi\partial_\mu\phi^*).$$

Обобщая подход[7] /см. 6/ в[7], рассмотрим /1a/ и /3/ на классе функций

$$\phi(\theta,\psi) = \rho(\theta)\cdot e^{i\psi}\ , \qquad /4/$$

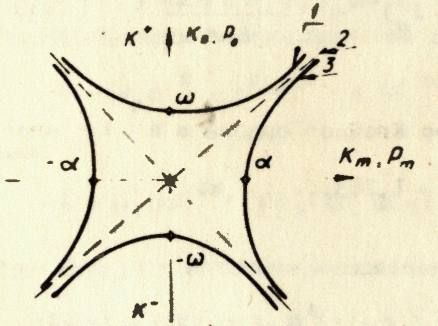
где $\theta = k_\mu x_\mu = k_0 x_0 - k_i x_i$, $\psi = p_\mu \cdot x_\mu = p_0 x_0 - p_i \cdot x_i$ – гиперплоскости в пространстве с размерностью $n+1$, $n = 1,2,\dots$. Векторы $k_\mu = (k_0, k_m)$ и $p_\mu = (p_0, p_m)$ удовлетворяют следующим требованиям:

1/ $p_\mu \cdot p^\mu = p_0 \cdot p_0 - p_m \cdot p_m = \omega^2 \geq 0$, p_μ – времениподобный вектор;

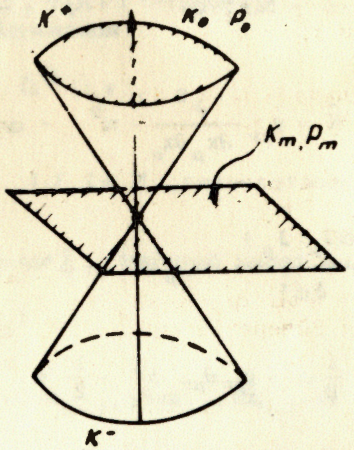
2/ $k_\mu \cdot k^\mu = k_0 \cdot k_0 - k_m \cdot k_m = -a^2 < 0$, k_μ – пространственно-подобный вектор с индефинитной метрикой;

3/ $k_\mu \cdot p^\mu = k_0 \cdot p_0 - k_m \cdot p_m = 0$.

Поверхности $p_\mu \cdot p^\mu = \omega^2$, $k_\mu \cdot k^\mu = -a^2$ представляют собой $n+1$ - мерные гиперсферы, заключенные между световыми конусами $p_\mu \cdot p^\mu = 0$, $k_\mu \cdot k^\mu = 0$ /см. рис.1а,б,в/. При подстановке /4/ в /1а/ и /3/ с учетом условий 1/, 2/, 3/ получаем лагранжиан взаимодействия



а/



б/

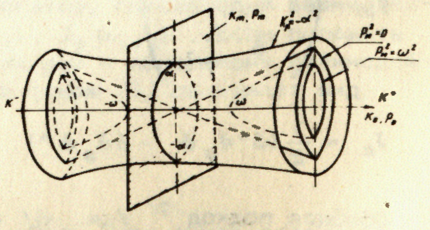

в/

Рис.1. а/ 1 – времениподобная псевдосфера положительного радиуса, $p_\mu p_\mu = \omega^2$. 2 – псевдосфера нулевого радиуса /световой конус/, $p_\mu p_\mu = 0$, $k_\mu \cdot k_\mu = 0$. 3 – пространственноподобная псевдосфера мнимого радиуса, $k_\mu k_\mu = -a^2$. б/Изотропный световой конус $k_\mu k_\mu = 0$, $p_\mu \cdot p_\mu = 0$. в/Система вложенных псевдосфер в совмещенных координатных осях $[(k_0 p_0)\ ,\ (k_0 p_0)]$. Псевдосфера $p_\mu^2 = \omega^2$ представляет собой двухполостный гиперболоид: Псевдосфера $k_\mu^2 = -a^2$ представляет собой однополостный гиперболоид $(k_\mu^2 = k_0^2 - k_m \cdot k_m = -a^2)$.

$$-L = k_\mu^2 \cdot \rho_\theta^2 + U(\rho),$$

где $\qquad /5/$

$$U(\rho) = -(m^2 - p_\mu^2)\cdot\rho^2 + (g_1 + g_2 (p_\mu^2)^{N/2})\,\rho^{2N}\ ,$$

$$p_\mu^2 = p_\mu \cdot p^\mu, \quad k_\mu^2 = k_\mu \cdot k^\mu,$$

и соответствующее уравнение движения вида

$$k_\mu^2 \cdot \rho_{\theta\theta} + (m^2 - P_\mu^2)\cdot\rho = N(g_1 + g_2 (p_\mu^2)^{N/2})\,\rho^{2N-1}\ . \qquad /6/$$

Уравнение /6/ можно получить из лагранжиана /5/, используя уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$\pi = \frac{\partial L}{\partial \rho_\theta}\ , \quad \pi_\theta = \frac{\partial L}{\partial \rho} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}\ , \qquad /7/$$

$$-2\cdot k_\mu^2 \cdot \rho_{\theta\theta} + U'(\rho) = 0\ .$$

Гамильтониан $H = H(\pi,\rho)$ можно получить из лагранжиана /5/, используя, как обычно, преобразование Лежандра

$$H = \pi\cdot\rho_\theta - L = \left(\frac{-1}{4k_\mu^2}\right)\cdot\pi^2 + U(\rho), \qquad /8/$$

где $\pi = \partial L/\partial\rho_\theta = -2k_\mu^2 \cdot \rho_\theta$ – канонический квазиимпульс. Уравнения Эйлера-Лагранжа /6/, /7/ аналогичны уравнениям Гамильтона:

$$\pi_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \rho} = -\frac{\partial U}{\partial \rho}\ , \quad \rho_\theta = \frac{\partial H}{\partial \pi}\ . \qquad /9/$$

Согласно теореме Деррика-Хобарта [1,2] необходимым условием существования солитонов является наличие минимумов у энергии при масштабных преобразованиях координат в полевой функции $x_\mu \to \lambda x_\mu$, $\phi_\lambda = \phi(\lambda x_\mu)$. Нам удобнее при масштабных преобразованиях использовать введенные выше, в /4/, векторы k_μ, p_μ, так как они имеют произвольную нормировку и гамильтонианы /8/, $H = H(k_\mu^2, p_\mu^2)$ отражает зависимость при масштабных преобразованиях от векторов k_μ, p_μ. Рассмотрим энергию

$$E = \int H(k_\mu x_\mu)\cdot dx_1 \wedge dx_2 \ \dots \wedge dx_n \ \equiv \ \int H(\theta)\, d^n x\ , \qquad /10/$$

где $d^n x = dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n$ - элемент n-мерного объема. При этом будет удобно работать в системе с полным импульсом, равным нулю $(k_0 = 0)$,

$$k_\mu \cdot x_\mu \big|_{k_0 = 0} = -k_i \delta_{im} \cdot x_\mu \equiv -s, \qquad \text{где} \quad \delta_{im} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В силу /5/, /8/ имеем $H(-s) = H(s)$. Так как векторы $k_\mu = (k_0, k_m)$, $p_\mu = (p_0, p_m)$ имеют произвольную нормировку $k_\mu^2 = -a^2$, $p_\mu^2 = \omega^2$, мы можем выбрать $a^2 = \omega^2 = \lambda^2$, где $k_\mu = (0, \lambda_n)$ и $p_\mu = (\lambda_n, 0)$ отнормированы на величину λ:

$$k_\mu^2 = -\lambda_n^2 = -\lambda^2, \quad p_\mu^2 = \lambda_n^2 = \lambda^2. \qquad /11/$$

Интеграл /10/ /n-кратный интеграл/ согласно /9/ можно привести к одномерному интегралу

$$E = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{k_i x_i \geq 0,\ 0 \leq s = \sum k_i x_i < \infty} H(s)\, d^n x = \frac{1}{\Gamma(n) \cdot \prod_i k_i} \int_0^\infty H(z) \cdot z^{n-1} \cdot dz. \qquad /12/$$

При масштабных преобразованиях объем n-мерного симплекса имеет вид:

$$\Omega_n = \overbrace{\int \ldots \int}^{n}_{k_i x_i > 0,\ s = \sum k_i x_i \leq s'} d\Omega_n = \overbrace{\int \ldots \int}^{n} d^n x = \frac{1}{\Gamma(n) \prod_i k_i} \int_0^{s'} z^{n-1} \cdot dz, \qquad /13/$$

или

$$\Omega_n \big|_{k_i = \lambda_i = \lambda} = \frac{1}{\Gamma(n) \cdot \lambda^n} \int_0^{s'} z^{n-1} \cdot dz = \frac{(s')^n}{\lambda^n \cdot n!}. \qquad /14/$$

С учетом /14/ поведение энергии /12/ при масштабных преобразованиях $x_\mu \to \lambda x_\mu$, $\phi_\lambda = \phi(\lambda x_\mu)$ представим следующим образом:

$$E_\lambda = \frac{1}{\Gamma(n)} (\lambda^{2-n} \cdot T + \lambda^{-n} \cdot U_1 + \lambda^{N-n} \cdot U_2), \qquad /15/$$

где

$$T = \int (\rho_z^2 + \rho^2) \cdot z^{n-1} \cdot dz > 0,$$

$$U_1 = \int (-m^2 \rho^2 + g_1 \cdot \rho^{2N}) \cdot z^{n-1} \cdot dz,$$

$$U_2 = g_2 \int \rho^{2N} \cdot z^{n-1} \cdot dz.$$

Из условия экстремальности по λ находим

$$\frac{dE_\lambda}{d\lambda} = \frac{1}{\Gamma(n)} ((2-n) \cdot \lambda^{1-n} \cdot T - n \cdot \lambda^{-(n+1)} \cdot U_1 + \lambda^{N-n-1} \cdot (N-n) \cdot U_2) = 0$$

и при $\frac{dE_\lambda}{d\lambda}\big|_{\lambda=1} = 0$ получаем вириальное соотношение между T, U_1, U_2

$$(2-n) \cdot T - n \cdot U_1 + (N-n) \cdot U_2 = 0. \qquad /16/$$

Из условия минимума по λ, $\frac{d^2 E_\lambda}{d\lambda^2}\big|_{\lambda=1} \geq 0$, используя /16/, получаем соотношение

$$2(2-n) \cdot T + (N-n) \cdot N \cdot U_2 \geq 0. \qquad /17/$$

Анализируя неравенство /17/, мы можем найти условия существования минимумов у функционала /15/. В случае знакопеременных потенциалов $U_2 > 0$ или $U_2 < 0$ выражение /17/ дает минимумы функционала энергии при следующих условиях:

1/ для $g_2 > 0$:

- а/ $n < 2$, $N \geq 2$, неравенство выполняется для всех T, U_2;
- б/ $n > 2$, $N > n$, $U_2 \geq \frac{2(n-2) \cdot T}{N(N-n)}$;
- в/ $n = 2$, $N > 2$, $\forall T$, U_2;

2/ для $g_2 < 0$:

- а/ $n < 2$, $N \geq 2$, $T \geq \frac{(N-n) N \cdot |U_2|}{2 \cdot (2-n)}$;
- б/ $n > 2$, $n > N$, $|U_2| \geq \frac{2(n-2) \cdot T}{(n-N) \cdot N}$;
- в/ $n > 2$, $N = 2$, $|U_2| \geq T$.

Возвращаясь к полученным выше уравнениям /6/, /7/ и используя произвольную нормировку векторов k_μ, p_μ $(k_\mu^2 = -a^2,\ p_\mu^2 = \omega^2)$, перепишем /7/ в виде

$$a^2 \frac{d^2\rho}{d\theta^2} + \frac{\partial U}{\partial \rho} = 0 . \qquad /7'/$$

Вводя переменную $\tilde\theta = a^{-1}\cdot\theta$, а также используя соотношения

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 = 2\frac{d^2\rho}{d\theta^2}\frac{d\rho}{d\theta}, \qquad \frac{dU}{d\theta} = \frac{\partial U}{\partial \rho}\frac{d\rho}{d\theta},$$

имеем

$$\left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2 + U(\rho) = C(E), \qquad /18/$$

где C(E) - константа, зависящая от энергии, как от параметра. Очевидно, что /18/ есть интеграл движения. Общий интеграл решения /18/ запишется в виде

$$\Theta - \Theta_0 = \int \frac{d\rho}{\sqrt{C(E) - U(\rho)}} . \qquad /19/$$

Решения /19/ можно выписать в явном виде, если известны корни полинома $P_{2N} = C - U(\rho) = C + B\rho^2 - A\cdot\rho^{2N}$, $B = m^2 - P_\mu^2$, $A = g_1 + g_2(P_\mu^2)^{N/2}$, т.е. если известны точки поворота ρ_{min}, ρ_{max} для "классического движения" в поле эффективного потенциала

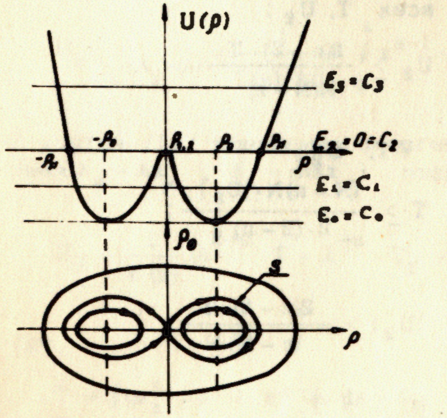


Рис.2. Представление потенциала $U(\rho) = \rho^2(A\cdot\rho^{2(N-1)} - B)$ на фазовой плоскости (ρ_θ, ρ); здесь $C_i(E_i) = E_i$ - фиксированные уровни энергии, $\rho_{1,2} = 0$, $\rho_N = \pm\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{1}{2(N-1)}}$ корни для потенциала $U(\rho) = 0$. Минимум потенциала достигается при $U(\pm\rho_0) = E_0$, где $\rho_0 = \left(\frac{B}{NA}\right)^{\frac{1}{2(N-1)}}$, $E_0 = -B\left(\frac{B}{NA}\right)^{\frac{1}{N-1}} \times (1 - 1/N)$.

$U(\rho) = -B\cdot\rho^2 + A\cdot\rho^{2N}$. Как видно из /рис.2/, при $C = C_1, C_3 \neq 0$ решения выражаются через специальные функции, конкретный вид которых будет определяться степенью полинома P_{2N}, а также наличием корней /точек поворота/.

В частности при $C = C_2 = 0$, мы получаем солитонное решение. В этом случае интеграл /19/ переписывается в следующем виде:

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{1}{2}\int z^{-1}(B - A\cdot z^{N-1})^{-1/2}\cdot dz,$$

где $z = \rho^2$. Вводя переменную $\tilde z = z^{N-1}$, получаем решение

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{1}{2(N-1)}\int (B - A\cdot\tilde z)^{-1/2}\cdot\tilde z^{-1}\cdot d\tilde z = \qquad /20/$$

$$= \frac{1}{2(N-1)\cdot B}\cdot \ln\frac{\sqrt{u} - \sqrt{B}}{\sqrt{u} + \sqrt{B}}, \qquad u = B - A\cdot\tilde z .$$

Подставляя в /20/, $\tilde z = z^{N-1}$, $\rho^2 = z$, $\tilde\theta = \theta/a$, найдем окончательно солитонное решение для составляющей ρ в виде

$$\rho_s(\sigma) = \rho_0\cdot \mathrm{sech}^{1/(N-1)}(\sigma/\Delta), \qquad /21/$$

где

$$\rho_0^{2(N-1)} = (m^2 - p_\mu^2)/(g_1 + g_2(p_\mu^2)^{N/2}),$$

$$\Delta = 1/(N-1)\cdot(m^2 - p_\mu^2)^{1/2} .$$

Здесь

$$\sigma = \theta/a = \tilde k_\mu\cdot x_\mu, \quad k_0^2 - k_i k_i = -a^2, \quad a = \sqrt{k_i k_i - k_0^2} .$$

Вектор $\tilde k_\mu = \left(\frac{k_0}{a}, \frac{k_m}{a}\right)$ нормирован.

$$\tilde k_\mu\cdot\tilde k_\mu = \frac{1}{a^2}(k_0^2 - (k_i k_i)) = -1 .$$

Мы можем ввести n + 1-мерную "лоренцеву скорость"

$$V_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_k \operatorname{ch}\beta,\ \epsilon_0 \operatorname{sh}\beta\right), \quad \text{где} \quad \epsilon_\mu = (\epsilon_k, \epsilon_0);$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_k \operatorname{ch}\beta = \frac{k_k}{\sqrt{k_i k_i - k^2}}, \quad \epsilon_0 \cdot \operatorname{sh}\beta = \frac{k_0}{\sqrt{k_i k_i - k^2}}. \qquad /22/$$

Векторы ϵ_μ, ϵ_ν определяют ортонормированный базис в n + 1-мерном пространстве $\epsilon_\mu \cdot \epsilon_\nu = \delta_{\mu\nu}$ $/\mu = 0,1,2,\dots n/$.

$$\epsilon_\mu \epsilon_\mu = \epsilon_i \epsilon_i - \epsilon_0^2 = n - 1, \quad \epsilon_i \delta_{ik} \epsilon_k = n, \quad \epsilon_0^2 = 1. \qquad /23/$$

"Пространственная" скорость V /n - скорость/ будет определяться как

$$\operatorname{th}\beta = \frac{\operatorname{sh}\beta}{\operatorname{ch}\beta} = V, \qquad /24/$$

где $\operatorname{ch}\beta$ получается из /22/ и /23/ следующим образом:

$$\frac{1}{n}\epsilon_i \delta_{ik} \epsilon_k \operatorname{ch}^2\beta = \frac{k_i \delta_{ik} k_k}{a^2},$$

или $\operatorname{ch}\beta = \sqrt{k_i k_i}\ a$.

Отсюда V /n - скорость/ имеет вид

$$V = \operatorname{th}\beta = \frac{k_0}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2}}. \qquad /25/$$

Так как $\lim\limits_{k_0 \to \infty} V = \lim \dfrac{k_0}{\sqrt{k_0^2 + a^2}} = 1$, значения скорости V находятся в пределах $0 \le V < 1$. Лоренцева скорость /22/ нормирована на +1:

$$V_\mu \cdot V^\mu = \frac{1}{n}\epsilon_i \delta_{ik} \cdot \epsilon_k \operatorname{ch}^2\beta - \epsilon_0^2 \operatorname{sh}^2\beta = 1,$$

и ортогональна вектору $\tilde{k}_\mu = (\epsilon_0 \operatorname{sh}\beta,\ \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_i \operatorname{ch}\beta)$:

$$V_\mu \cdot \tilde{k}_\mu = \frac{\operatorname{ch}\beta \cdot \operatorname{sh}\beta}{\sqrt{n}}(\epsilon_k - \epsilon_i) \cdot \epsilon_0 = 0.$$

В выражении /22/ роль лоренц-фактора играет параметр a. Так, при n = 1 /одномерный случай/ имеем

$$V_\mu = \left(\frac{k_1}{a}, \frac{k_0}{a}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (k_0/k_1)^2}}, \frac{(k_0/k_1)}{\sqrt{1 - (k_0/k_1)^2}}\right).$$

или

$$V_\mu = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}}\right) \equiv (\gamma, \gamma v), \quad v = \frac{k_0}{k_1},$$

и формулы /21/-/25/ переходят в соответствующие формулы для n = 1 /7,8/. Так, например, из /21/ для n = 1 имеем

$$\sigma = \theta a = \tilde{k}_\mu x_\mu = \tilde{k}_0 x_0 - \tilde{k}_1 x_1, \quad k_\mu = \frac{1}{a}(k_0, k_1) = (v\gamma, \gamma),$$

$$\left(\gamma = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\right), \text{ или } \quad \sigma = \tilde{k}_\mu x_\mu = \gamma(x - vt) -$$

одномерная характеристика /7/. Энергия солитонного решения /21/ в поле "эффективного гамильтониана" /8/ естественно равна нулю. Действительно, подставив /8/, /21/ в /12/, получим:

$$E = \frac{\rho_0^2 (a\Delta)^n}{\Gamma(n) \cdot \prod_i k_i}\left(\frac{(I_1 - I_2)}{\Delta^2 (N - 1)^2} - (m^2 - p_\mu^2)(I_1 - I_2)\right) = 0.$$

Мы учли, что $\dfrac{1}{\Delta^2 (N - 1)^2} = m^2 - p_\mu^2$, где

$$I_1 = \int_0^\infty (Bz)^{n-1} \cdot \operatorname{ch}^{-2/(N-1)}(Bz) \cdot d(Bz),$$

$$I_2 = \int_0^\infty (Bz)^{n-1} \cdot \operatorname{ch}^{-2N/(N-1)}(Bz) \cdot d(Bz).$$

Так как при $C(E) = 0$ мы получаем солитонное решение /21/, то константу $C(E)$ в /18/ для интеграла движения можно отождествить с "эффективной" энергией солитона $C(E) = E$. Кроме решения в общей форме

$$\phi(\theta,\psi) = \rho_0 \cdot \operatorname{sech}^{1/(N-1)}(\sigma/\Delta) \cdot e^{i\psi} \qquad /26/$$

при $E = 0$, где $\rho_0^{2(N-1)} = (m^2 - p_\mu^2)/(g_1 + g_2(p_\mu^2)^{N/2})$. $\Delta = 1/(N-1)(m^2 - p_\mu^2)^{1/2}$, $\sigma = \theta/a = \dfrac{\theta}{\sqrt{\Sigma k_i k_i - k_0^2}}$ – гиперплоскость в $(n+1)$ -пространстве, мы можем получить частные решения в виде эллиптических функций для нейлинейности $N = 2$, но уже в произвольной размерности n. Представляя интеграл /19/

$$\sigma = \int \frac{d\rho}{\sqrt{E - U(\rho)}}, \quad \sigma = \frac{\theta}{a},$$

в виде

$$\sqrt{A} \cdot \sigma = \int^{\rho(\sigma)} \frac{d\rho}{(\rho_1 - \rho)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3)(\rho - \rho_4)} = g\,\mathrm{sn}^{-1}(\sin\xi, k),$$

найдем решения при $E_0 < E < 0$

$$\rho(\sigma) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_4 \end{pmatrix} \mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{A}}{g}(1+k)\cdot\sigma,\ k_1\right), \quad \begin{pmatrix} \rho_2 \le \rho \le \rho_1 \\ \rho_4 \le \rho \le \rho_3 \end{pmatrix}. \qquad /27/$$

Здесь введены следующие обозначения: $\rho_1 = -\rho_4$, $\rho_2 = -\rho_3$ – корни

$$P_4 = -A\rho^4 + B\cdot\rho^2 + E = 0,$$

$$\rho_1^2 = \frac{B + (B^2 + 4A\cdot E)^{1/2}}{2A}, \quad \rho_2^2 = \frac{B - (B^2 + 4AE)^{1/2}}{2A},$$

$$B = m^2 - p_\mu^2, \quad A = g_1 + g_2 p_\mu^2, \quad g = 2/(\rho_1 + \rho_2).$$

Модуль и дополнительный модуль эллиптической функции выражаются формулами

$$k^2 = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\right)^2, \quad k_1 = \frac{2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{(\rho_1^2 + \rho_2^2)^{1/2}}{\rho_1}.$$

"Полные" решения /27/ для уравнения /3/ при $E < 0$ для $N = 2$ представляются в виде

$$\phi(\sigma,\psi) = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{A}}{g}(1+k)\cdot\sigma,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) \cdot e^{i\psi}. \qquad /28/$$

Решения /28/ при $k = 0$, $k_1 = \dfrac{2\sqrt{k}}{1+k} = 0$ $(\rho_1 = \rho_2)$ переходят в "n-мерные плоские волны"

$$\phi(\psi) = \lim_{k\to 0} \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_4 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{dn}\left(\frac{\sqrt{A}}{g}(1+k)\sigma,\ \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) \cdot e^{i\psi} = \pm\left(\frac{m^2 - p_\mu^2}{2(g_1 + g_2 p_\mu^2)}\right)^{1/2} \cdot e^{i\psi}.$$

Как и в работах [7,8], при $k = 1$ /$\rho_2 = 0$/ получаем "n-солитоны":

$$\phi(\sigma,\psi) = \pm\rho_1\Big|_{E=0} \cdot \mathrm{dn}\left(\frac{2\sqrt{A}}{g}\sigma,\ 1\right) = \qquad /29/$$

$$= \pm\left(\frac{m^2 - p_\mu^2}{g_1 + g_2 p_\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{ch}^{-1}\left((m^2 - p_\mu^2)^{1/2}\cdot\sigma\right) \cdot e^{i\psi}.$$

В случае $E \ge 0$ "полные решения" для уравнения /3/ при $N = 2$ имеют вид "n-мерных коноидальных волн".

$$\phi(\sigma,\psi) = \pm\tilde{\rho}_1 \cdot \mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{A}}{g}\sigma, k\right) \cdot e^{i\psi}, \qquad /30/$$

$$B = m^2 - p_\mu^2, \quad A = g_1 + g_2 \cdot p_\mu^2, \quad g = 1/\tilde{A}\cdot\tilde{B},$$

$$\tilde{A}^2 = (\tilde{\rho}_1 - b_2)^2 + a_1^2, \quad \tilde{B}^2 = (\tilde{\rho}_2 - b_1)^2 + a_1^2,$$

$$b_1 = z + \bar{z}, \quad a_1^2 = -\frac{(z - \bar{z})^2}{4},$$

$$z = i\left[\frac{(B^2 + 4AE)^{1/2} - B}{2A}\right]^{1/2}, \qquad \text{при } (B^2 + 4AE)^{1/2} > B$$

$$z^* \equiv \bar{z} = -z, \quad \tilde{\rho}_{1,2} = \pm\left[\frac{B + (B^2 + 4AE)^{1/2}}{2A}\right]^{1/2},$$

$$k^2 = \frac{B + (B^2 + 4AE)^{1/2}}{2\sqrt{B^2 + 4AE}}.$$

В предельном случае $E = 0$ / $k^2 = 1$/ решения /30/ вырождаются в солитоны /29/:

$$\lim_{k^2 \to 1} \phi(\sigma, \psi) = \pm\tilde{\rho}_1 \Big|_{E=0} \cdot \mathrm{cn}\left(\frac{\sqrt{A}}{g}\sigma, 1\right) \cdot e^{i\psi} =$$

$$= \pm\left(\frac{m^2 - p_\mu^2}{g_1 + g_2 p_\mu^2}\right)^{1/2} \cdot \mathrm{ch}^{-1}\left(\sqrt{m^2 - p_\mu^2} \cdot \sigma\right) \cdot e^{i\psi}.$$

С помощью теоремы Нетер, рассматривая определенные симметрии лагранжиана /1a/, можно получить законы сохранения [10]. Исходя из вариационного принципа имеем:

$$\delta S = -\int [\bar{\delta} L + \mathrm{div}(L \cdot \delta x_\mu)]\, d^{n+1} x.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение Ли:

$$\bar{\delta} L + \mathrm{div}(L \cdot \delta x_\mu) = 0,$$

$$\bar{\delta} L = \frac{\delta L}{\delta \phi} \bar{\delta}\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \bar{\delta}\phi\right) + \text{к.с.}, \qquad /31/$$

где $\delta L/\delta\phi = \partial L/\partial\phi - \partial_\mu(\partial L/\partial\phi_{,\mu})$ - лагранжева производная,

$$\bar{\delta}\phi = \delta\phi - \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} \cdot \delta x_\mu$$ - вариация формы.

Уравнение /31/ может быть записано в виде

$$\frac{\delta L}{\delta \phi} \bar{\delta}\phi + \text{к.с.} = -\partial\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \bar{\delta}\phi + \text{к.с.} + L\delta x_\mu\right). \qquad /32/$$

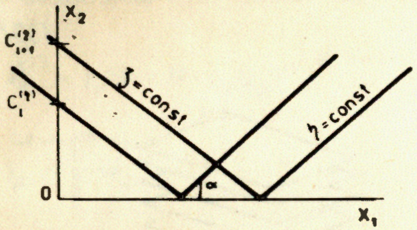


Рис.3. Двумерные характеристики $\sigma = \xi, \eta$, где $\{\xi, \eta\} = \mathrm{const}$/ $\xi = t_i - k_1 x_1 - k_2 x_2$, , $\eta = t_i - k_1 x_1 + k_2 x_2$, $t_i = (k_0 x_0)_i$) представляются на плоскости (x_1, x_2) прямыми $x_2^{(\xi)} = -\mathrm{tg}\alpha \cdot x_1 + C_1^{(\xi)}$, $x_2^{(\eta)} = \mathrm{tg}\alpha \cdot x_1 + C_1^{(\eta)}$, где $C_i^{(\xi)} = -\xi/k_2 + t_i/k_2$, $C_i^{(\eta)} = \eta/k_2 - - t_i/k_2$, $\mathrm{tg}\alpha = k_1/k_2$. .

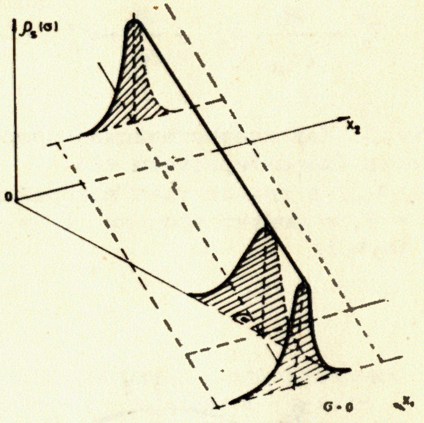


Рис.4. Вид плоскостного солитона в случае $n = 2$.

Рассмотрим инвариантность лагранжиана относительно градиентных преобразований $\phi' = e^{i\lambda} \cdot \phi$, $\lambda = \mathrm{const}$, а также относительно трансляций $x'_\mu = x_\mu + a_\mu$, которым соответственно отвечают инфинитезимальные преобразования $\delta\phi = i\lambda\phi$ – бесконечно малый поворот ($\lambda = \mathrm{const}$) и $\delta x_\mu = a_\mu$ - сдвиг на константу. Из выражения /32/ имеем:

$$\frac{\delta L}{\delta \phi}(i\lambda\phi - a_\nu \cdot \phi_{,\nu}) + \text{к.с.} = -\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}}(i\lambda\phi - a_\nu \phi_{,\mu}) + \text{к.с.} \qquad /33/\right.$$

$$\left. + \qquad + L \cdot a_\mu\right).$$

В случае, если ϕ - решение, или $\delta L/\delta\phi = 0$, из /33/ следует дифференциальный закон сохранения $\partial_\mu I_\mu = 0$, где I_μ - обобщенный нетеров ток /суперток/,

$$I_\mu = -i\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \phi \cdot \lambda + \text{к.с.} + \left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \phi_{,\nu} + \text{к.с.} - L \cdot \delta_\nu^\mu\right) a_\nu =$$

$$= J_\mu^{(1)} \cdot \lambda + T_\mu^\nu \cdot a_\nu.$$

Ток I_μ представляет собой сумму обычного тока

$$J_\mu^{(1)} = -i\left(\frac{\partial L}{\partial \phi_{,\mu}} \phi - \frac{\partial L}{\partial \phi^*_{,\mu}} \phi^*\right) \qquad /34/$$

и тензора энергии импульса

$$\phi_0^2 = \frac{m^2 - p_\mu^2}{g_1 + g_2 \cdot p_\mu^2}, \quad B = m^2 - p_\mu^2, \quad \sigma = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{-k_\mu^2}},$$

$$\theta = k_\mu x_\mu = k_0 x_0 - k_n x_n, \quad n = 1,2,3, \ldots$$

Для решения с $E < 0$ при предельном переходе $E \to E_0 = -B\left(\frac{B}{NA}\right)^{\frac{1}{N-1}}\left[1 - \frac{1}{N}\right]$

вырождаются в плоские " n -волны".

$$\phi(\psi) = \tilde{\phi}_0 \cdot e^{i\psi}.$$

$$\tilde{\phi}_0 = \left(\frac{m^2 - p_\mu^2}{2(g_1 + g_2 p_\mu^2)}\right)^{1/2}. \quad B = m^2 - p_\mu^2,$$

$$A = g_1 + g_2 \cdot p_\mu^2, \quad \psi = p_\mu x_\mu.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Derrick G.M. J.Math.Phys., 1964, 5, p. 1952.
2. Hobart R.H. Proc.Phys.Soc., 1965, 85, p. 6110.
3. t'Hooft G. Nucl.Phys.B., 1974, v. 79, No.1, p. 276-284.
4. Поляков А.М. Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, в.6, с. 430.
5. Makhankov V.G. Comp.Phys.Comm., 1980, v. 21 (1), p. 1-49.
6. Швингер Ю. Частицы - источники поля. "Мир", М., 1973.
7. а)Fedyanin V.K., Grishin V.E. JINR, E17-81-804, Dubna;
   б)Гришин В.Е., Федянин В.К. ТМФ, 1983, т.54, №3, с. 469-476.
8. Гришин В.Е., Федянин В.К. ОИЯИ, Р17-81-059, Дубна, 1981.
9. Abrampwitz P.A., Stegan I.A. Handbook of Mathematical Functions, National Burean of Standards, Washington, 1964; Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, Физматгиз, 1971.
10. Коноплева, Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля, Атомиздат, 1980.

Рукопись

Гришин В.Е., Федянин В.К. Р17-83-171

Анизотропные солитоны в пространстве с размерностью $n > 1$ в теориях с абелевой глобальной калибровочной группой

Получены решения в виде "изомерных n -солитонов", определенных на эквипотенциальных гиперплоскостях $\sigma = k_\mu x_\mu$ в пространстве n -измерений /при $x_0 = \text{const}$/, т.е. на плоскостях σ_i, имеющих постоянное значение функции ρ_i $\rho(\sigma_i) = C_i$. Такой класс солитонов, определенных на n -мерных гиперплоскостях, представляет собой аналог n -мерных анизотропных солитонов. Возможна физическая интерпретация таких решений в случае $n = 1,2,3$. Кроме того, данная модель допускает решения в виде эллиптических функций, для описания которых достаточно знать точно корни полинома $P_{2N} = E - U(\rho)$.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1983

Grishin V.E., Fedyanin V.K. P17-83-171

Anisotropic Solitons in a Space of Dimension $n > 1$ in Theories with the Abelian Clobal Gauge Group

Solutions are found in the form of "isomeric n-solitons" defined on equipotential hyperplanes, $\sigma = k_\mu x_\mu$, of an n-dimensional space (at $x_0 =$ const), i.e. in the planes σ_i, where the function ρ_i is a constant, $\rho(\sigma_i) = C_i$. This class of solitons is an analog of n-dimensional anisotropic solitons. A physical interpretation of such solutions is possible for $n = 1,2,3$. This model admits also solutions in terms of elliptic functions for which it is enough to know exactly the roots of the polynomial $P_{2N} = E - U(\rho)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1983

Перевод О.С.Виноградовой.