

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1461/83

21/13-83

P17-82-923

И.Л.Боголюбский

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СФЕРИЧЕСКИ-
И ЦИЛИНДРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ
СОЛИТОНОВ В АНИЗОТРОПНОМ
ФЕРРОМАГНЕТИКЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

1982

I. После получения локализованного частицеподобного решения (солитона) в рамках не одномерных нелинейных моделей возникает принципиально важный для физической интерпретации вопрос динамической устойчивости солитона. Для его решения в различных моделях весьма эффективным оказался метод пробных функций (ПФ), сохраняющих инварианты задачи ("заряд", число квазичастиц и т.п.) (см. /1/). Этот метод позволяет исследовать модели, для которых известные теоремы (см., например, /2/) не могут быть прямо применены. В настоящей работе мы с помощью указанной техники исследуем динамическую устойчивость сферически- и цилиндрически-симметричных солитонов в анизотропном ферромагнетике Гейзенберга (АФГ), тем самым расширяя сферу применения этой методики на случай векторных полей.

Сферически-симметричные (SS) солитоны в АФГ были найдены в работе /3/, там же были приведены физические соображения, на основании которых были сделаны выводы о зоне динамической устойчивости SS-солитонов в АФГ.

В рассматриваемой модели постоянный по модулю вектор намагниченности $\vec{M} = \vec{\mu} M_0$, $|\vec{M}| = M_0$, подчиняется уравнению Ландау-Лифшица /4/ (см. также /5/):

$$\dot{\vec{\mu}}_t = \vec{\mu} \times \Delta \vec{\mu} + (\vec{\mu} \times \vec{n}) (\vec{\mu} \cdot \dot{\vec{n}}), \quad (1)$$

где единичный постоянный вектор \vec{n} направлен вдоль оси анизотропии. Используя для компонент вектора $\vec{\mu}$ представление

$$\mu_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad \mu_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad \mu_z = \cos \theta, \quad (2)$$

можно получить систему уравнений для θ и φ (см. /6,7/):

$$\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sin \theta \cos \theta [1 + (\nabla \varphi)^2] - \nabla^2 \theta, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = 2 \cos \theta (\nabla \theta \cdot \nabla \varphi) + \sin \theta \cdot \nabla^2 \varphi$$

(использованы безразмерные переменные, связанные с размерными через постоянную α обменного взаимодействия и константу β магнитной анизотропии).

Уравнение (1) и система (3) имеют важные для дальнейшего интеграла движения: энергию

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} [(\nabla\theta)^2 + \sin^2\theta (\nabla\varphi)^2] + \frac{1}{2} \sin^2\theta \right\} d^n x \quad (4)$$

и число квазичастиц - "магнонов" $n/3$

$$N = \int (1 - \cos\theta) d^n x \quad (5)$$

(n - размерность пространства).

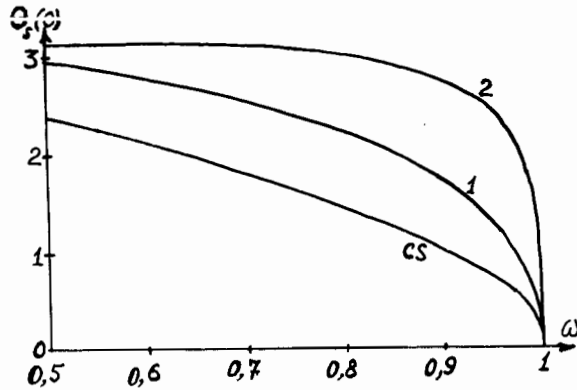
Мы будем изучать устойчивость неподвижных ss и cs (цилиндрически-симметричных) солитонов, у которых $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = const$. При этом

θ является функцией только координат и подчиняется одномерному уравнению

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{n-1}{z} \frac{d\theta}{dz} - \frac{1}{2} \sin 2\theta + \omega \sin\theta = 0, \quad \theta'(0) = 0, \quad (6)$$

$\theta(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$; достаточно изучить область параметра ω : $0 < \omega < 1$.

Наибольший интерес представляет основная мода солитонов (безузловое, знакопостоянное решение $\theta(z)$, энергетически более выгодное по сравнению с "возбужденными" узловыми решениями). Зависимость амплитудного значения $\theta(0)$ как функция ω получается в результате численного решения (6) на ЭВМ (например, методом стрельбы); для ss -солитонов, найденных в [3], эта важная для дальнейшего зависимость представлена на рисунке (помечена цифрой 1).



2. Опишем общую схему метода ПФ для солитонов в ферромагнетике. Пусть солитон при выбранном значении ω определяется функцией $\theta_s(z; \omega)$ с соответствующими значениями инвариантов $H_s(\omega)$ и $N_s(\omega)$. Рассмотрим "промежуточную" ПФ:

$$\theta_1(z; \omega, a, c) = \theta_s(z; \omega) + c \cdot \exp[-(az)^2/2], \quad (7)$$

$$c \ll \theta_s(0).$$

С помощью масштабного преобразования $z \rightarrow bz$ построим ПФ $\theta_2(z; \omega, a, c, b) = \theta_1(bz; \omega, a, c)$. Найдем $N[\theta_2(z; \omega, a, c, b)]$:

$$N[\theta_2(z)] = \int (1 - \cos\theta_1(R)) d^n(Rb^{-1}) = b^{-n} N[\theta_1(z)], \quad (8)$$

и определим величину коэффициента b , исходя из требования

$$N[\theta_2(z)] = b^{-n} N[\theta_1(z)] = N_s(\omega), \quad (9)$$

т.е.

$$b(c, a) = (N[\theta_1(c, a)] / N_s)^{1/n}. \quad (10)$$

Формулу (4) перепишем в виде $H[\theta] = H_1[\theta] + H_2[\theta]$, где

$$H_1(\theta) = \frac{1}{2} \int (\nabla\theta)^2 d^n x, \quad H_2 = \frac{1}{2} \int \sin^2\theta d^n x. \quad (11)$$

Тогда

$$H[\theta_2] = b^{2-n} H_1[\theta_1] + b^{-n} H_2[\theta_1]. \quad (12)$$

Для исследования устойчивости рассмотрим величину

$$(\Delta^2 H)_N = \{ H[\theta_2(a, c, b)] + H_2[\theta_2(a, -c, b)] - 2H_s(\omega) \} c^{-2}. \quad (13)$$

Если окажется, что для изучаемой величины ω найдется область значений a , т.ч. $(\Delta^2 H)_N < 0$, это будет означать, что солитон при данном ω не доставляет минимума функционалу H (формула (4)) при фиксированном значении N (формула (5)). Тем самым будет показано, что солитон динамически неустойчив. И наоборот, если для всего исследованного интервала параметра b будет получено, что $(\Delta^2 H)_N > 0$, это будет явным указанием на динамическую устойчивость солитона.

В заключение этого раздела отметим, что, сравнивая величину $H[\theta_2(c)] = H_N(c)$ при не малых c со значением H_s , можно получить представление о профиле энергетической поверхности (при фиксированном N) в конечной, не малой окрестности солитона, а следовательно, и о его динамической устойчивости "в большом". Это является важным достоинством метода ПФ.

3. Обратимся к численному исследованию устойчивости в малом ss -солитонов в АФГ. Расчеты проводились на основе формул п.2 при $n=3$ для значений ω , распределенных по всему интервалу $(0, 1)$, причем наибольшее количество расчетов было выполнено для значений $\omega \in [0.9, 0.92]$, поскольку, как оказалось, именно на этом отрезке лежит точка ω_{cr} , разделяющая зоны устойчивости и неустойчивости.

При $\omega=0.92$ для величины $\theta_s(0)$ имеем значение $\theta_s(0) \approx 1.5425$. Расчеты на устойчивость были выполнены для величин параметра $a=0.1k$, $k=0, 1, \dots, 8$. Функция $(\Delta^2 H)_N$ оказалась знакопеременной:

при $a = 0,4$ $(\Delta^2 H)_N < 0$, при остальных дискретных значениях a $(\Delta^2 H)_N > 0$. Итак, при $\omega = 0,92$ SS -солитон в АФГ неустойчив.

При $\omega = 0,915$ $\theta_s(0) \approx 1,58$. Расчеты были выполнены при тех же значениях a ; для всех этих значений зафиксировано $(\Delta^2 H)_N > 0$, что указывает на устойчивость SS -солитона.

Для значений $\omega > 0,92$ SS -солитоны оказываются неустойчивыми: $(\Delta^2 H)_N$ меняет знак при изменении a , а при $\omega < 0,915$ - устойчивыми: $(\Delta^2 H)_N > 0$ при всех a .

На отрезке $[0,915, 0,92]$, содержащем значение ω_{ck} , был выполнен более подробный анализ; в частности, использовалась более частая сетка значений $a = 0,3 + 0,03 \cdot k$. Минимум $(\Delta^2 H)_N$ как функции дискретного a достигался для $\omega \in [0,915, 0,92]$ при $a = 0,42$. С помощью линейной интерполяции окончательно найдено, что $\omega_{ck} \approx 0,919$. Соответствующая величина $\theta_{sck}(0) \approx 1,550$.

Отметим, что найденное нами значение ω_{ck} хорошо согласуется с заключениями о границе зон устойчивости и неустойчивости "в малом" для SS -солитонов в АФГ, сделанными в [3].

Мы хотели бы отметить, что полученное нами значение $\theta_{sck} \approx 1,55$ весьма близко к $\pi/2$. Более того, не исключена возможность, что истинное значение θ_{sck} , не искаженное неточностью расчетов, есть $\pi/2$. В связи с этим укажем, что число $\pi/2$ уже встречалось как амплитудная граница устойчивости пульсонов (осциллирующих солитонов) в рамках уравнения синус-Гордона в SS -геометрии [8]. Как и в [8], так и в настоящей модели число $\pi/2$ выделено как максимум функции потенциального рельефа (в данной работе $U(\theta) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta$). В обоих случаях зона устойчивости примыкает к минимуму $U(\theta)$, не совпадающему с "основным" минимумом $\theta = 0$, выделенным граничными условиями: $\theta(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$.

4. Помимо основной моды SS -солитонов в АФГ мы получили первое "возбужденное" решение - SS -солитон с одним узлом функции $\theta(z)$. Для этого уравнение (6) с $n=3$ было решено с граничными условиями $\theta'(0) = 0$, $\theta(\infty) = 0$, причем выбиралось решение, ровно один раз пересекающее ось z . Зависимость $\theta_s(0)$ от ω для первого узлового решения представлена на рисунке (помечена цифрой 2).

Энергия в расчете на одну квазичастицу - "магнон", $h = H/N$, для "возбужденных" солитонов больше, чем для солитонов основной моды. Поэтому узловые солитоны являются динамически неустойчивыми, что можно показать описанным выше методом ПФ, выбирая возмущения солитона гауссовой формы. Такие колоколообразные возмущения узловых солитонов распадаются быстрее всего, поскольку имеют наибольший инкремент (см. [16]).

5. Представляет интерес сравнение динамической устойчивости SS - и CS -солитонов в данной модели; CS -солитоны ранее не были найдены в численных расчетах. В данной работе рассматриваются только безузловые решения. Методика нахождения CS -солитонов в основном совпадает с SS -случаем ($n=3$). Зависимость $\theta_s(0)$ от ω представлена на рисунке (отмечена буквами CS). При всех допустимых ω ($0 < \omega < 1$) значение $\theta_s(0)$ для CS безузловых солитонов меньше, чем для аналогичных SS -солитонов.

Для исследования динамической устойчивости CS -солитонов воспользуемся при $n=2$ общей методикой, развитой в п.2. Минимальное значение ω , для которого в расчетах отмечена область параметра a , где $(\Delta^2 H)_N < 0$, есть $\omega = 0,74$ (соответствующая величина $\theta_s(0) = 1,6635$). При этом отрицательные значения $(\Delta^2 H)_N$ зафиксированы для $a = 0,42$; $0,45$; $0,48$, причем минимальное - для $a = 0,45$. При $\omega = 0,72$ ($\theta_s(0) = 1,733$) для всех a $(\Delta^2 H)_N > 0$, причем минимум величины $(\Delta^2 H)_N$ снова зафиксирован при $a = 0,45$. Используя линейную интерполяцию, легко оценить, что $(\Delta^2 H)_N$ становится знакопеременной функцией параметра a при $\omega_{ck} \approx 0,737$ (соответствующее $\theta_{sck}(0) \approx 1,67$).

Таким образом, область устойчивости CS -солитонов оказалась меньше как по частоте, $0 < \omega < 0,737$ (для SS -случая $0 < \omega < 0,918$), так и по величине $\theta_s(0)$, $1,67 < \theta_s(0) < \pi$ (для SS -солитонов $1,55 < \theta_s(0) < \pi$).

Автор признателен профессорам Е.П. Жидкову и В.Г. Маханькову за интерес к работе и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

- а) Bogolubsky I.L. Phys.Lett., 1979, A73, p. 87;
б) Боголюбский И.Л. ТМФ, 1980, 43, вып.3, с.378;
в) Боголюбский И.Л. ОИЯИ, P2-81-82I, Дубна, 1981.
- Вахитов Н.Г., Колоколов А.А. Известия вузов, радиофизика, 1979, т.ХVI, вып.7, с.1020;
Makhankov V.G. Phys. Reports, 1978, 35, p.1;
Friedberg R., Lee T.D., Sirlin A. Phys. Rev., 1976, D13, p. 2739.
- Иванов Б.А., Косевич А.М. ЖЭТФ, 1977, 72, с.2000.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Sov. Phys., 1935, 9, с.157;
Ландау Л.Д. Труды, т.1, "Наука", Москва, 1969, стр.127.
- Takhtajan L.A. Phys. Lett., 1977, A64, p.235;
Боровик А.Е. Письма в ЖЭТФ, 1978, 28, с.629;
Sklyanin E.K. LOMI Preprint E-3-1979, Leningrad, 1979.

6. Косевич А.М., Иванов Б.А., Ковалев А.С. В сборнике: Нелинейные волны /под редакцией А.В. Гашонова-Грехова/. 1979, "Наука", Москва, стр.45.
7. Иванов Б.А., Косевич А.М., Бабич И.М. Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с.777.
8. Боголюбский И.Л., Маханьков В.Г. Письма в ЖЭТФ, 1977, 25, с.120; Bogolubsky I.L. Phys. Lett., 1977, A61, No4, p.205.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 декабря 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
Д2-81-543	Труды VI Международного совещания по проблемам квантовой теории поля. Алушта, 1981	2 р. 50 к.
Д10,11-81-622	Труды Международного совещания по проблемам математического моделирования в ядерно-физических исследованиях. Дубна, 1980	2 р. 50 к.
Д1,2-81-728	Труды VI Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 60 к.
Д17-81-758	Труды II Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1981.	5 р. 40 к.
Д1,2-82-27	Труды Международного симпозиума по поляризационным явлениям в физике высоких энергий. Дубна, 1981.	3 р. 20 к.
Р18-82-117	Труды IV совещания по использованию новых ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1981.	3 р. 80 к.
Д2-82-568	Труды совещания по исследованиям в области релятивистской ядерной физики. Дубна, 1982.	1 р. 75 к.
Д9-82-664	Труды совещания по коллективным методам ускорения. Дубна, 1982.	3 р. 30 к.
Д3,4-82-704	Труды IV Международной школы по нейтронной физике. Дубна, 1982.	5 р. 00 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

**ТЕМАТИЧЕСКИЕ КАТЕГОРИИ ПУБЛИКАЦИЙ
ОБЪЕДИНЕННОГО ИНСТИТУТА ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Индекс	Тематика
1.	Экспериментальная физика высоких энергий
2.	Теоретическая физика высоких энергий
3.	Экспериментальная нейтронная физика
4.	Теоретическая физика низких энергий
5.	Математика
6.	Ядерная спектроскопия и радиохимия
7.	Физика тяжелых ионов
8.	Криогеника
9.	Ускорители
10.	Автоматизация обработки экспериментальных данных
11.	Вычислительная математика и техника
12.	Химия
13.	Техника физического эксперимента
14.	Исследования твердых тел и жидкостей ядерными методами
15.	Экспериментальная физика ядерных реакций при низких энергиях
16.	Дозиметрия и физика защиты
17.	Теория конденсированного состояния
18.	Использование результатов и методов фундаментальных физических исследований в смежных областях науки и техники
19.	Биофизика

Боголюбский И.Л.
Об устойчивости сферически- и цилиндрически-симметричных солитонов в анизотропном ферромагнетике Гейзенберга

P17-82-923

Для исследования динамической устойчивости сферически- и цилиндрически-симметричных солитонов в анизотропном ферромагнетике Гейзенберга /АФГ/ применен метод пробных функций, сохраняющих интеграл движения - число квазичастиц - "магнонов". Получены решения для цилиндрически-симметричных солитонов в АФГ. Найдено, что граница устойчивости по амплитуде солитонов лежит вблизи $\theta_{max} = \pi/2$, то есть точки, в которой потенциальный рельеф имеет максимум как в сферически-, так и в цилиндрически-симметричной модели.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Bogolubsky I.L.
On Stability of Spherically and Cylindrically Symmetric Solitons in Anisotropic Heisenberg Ferromagnet

P17-82-923

The trial function method retaining the integral of motion-the number of quasiparticles - "magnons" is used to investigate dynamical stability of spherically and cylindrically symmetric solitons in anisotropic Heisenberg ferromagnet (AHF). Cylindrically symmetric solitons in AHF are found. It has been found that the stability boundary in soliton amplitude is located near $\theta_{max} = \pi/2$, i.e., near the point where potential relief has a maximum value both in spherically and in cylindrically symmetric models.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод О.С.Виноградовой.