объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-82-329

Б.Н.Валуев

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПОНТАННОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ ИЗИНГА В ПОДХОДЕ ЯНГА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1982

ВВЕДЕНИЕ

Точное решение для двумерной модели Изинга с магнитным полем до сих пор не получено, хотя первый шаг в этом направлении был сделан давно, когда Янг [1] вывел известное онсагеровское выражение для спонтанной намагниченности. В дальнейшем, начиная с работы Монтролла, Поттса и Уорда [2], этот результат был выведен вновь многими авторами, однако все они исходили из выражений для корреляторов, то есть квадратичных по спиновым переменным величин. Согласно Янгу спонтанная намагниченность выражается через матричный элемент оператора, линейного по спиновым переменным /см. формулу /20//. Изучение таких величин является необходимым шагом для решения задачи с полем, если исходить из матричной формулировки. Между тем исследование Янга в этом направлении практически не было продолжено, что частично объясняется его сложностью.

В настоящей работе мы покажем, как упростить вычисления Янга, если использовать подходящую симметризацию матрицы перехода и ставшую теперь обычной технику работы с фермионными операторами.

В подходе Янга исходной является матричная формулировка модели Изинга, в которой статистическая сумма Q выражается в виде следа:

$$Q = \mathrm{Sp}\, V^m, \quad V = V_1 V_2 V_3,$$

$$V_1 = (2\,\mathrm{sh}\, 2a)^{n/2} A, \quad A = \exp(\theta \Sigma X_k), \quad \mathrm{th}\,\theta = e^{-2a}, \qquad /1/$$

$$V_2 = \exp(\Sigma\, Z_k Z_{k+1}), \quad Z_n = Z_0, \quad a > 0,$$

$$V_3 = e^{h\sigma}, \quad \sigma = \Sigma\, Z_k.$$

Решетка предполагается сначала конечной с размерами $m \times n$ и циклическими граничными условиями. Отсутствие пределов у знака суммы здесь и далее означает, что суммирование идет от 0 до $n-1$. Матрицы X_k, Z_k /и далее Y_k/ - это спиновые операторы*, действующие в пространстве размерности 2^n. Так, Z_{k-1} есть прямое произведение $I \times I \times \ldots \sigma_z \times \ldots \times I$ двумерных единичных матриц и матрицы Паули

---

*Матричная формулировка подробно изложена в книге Хуанга [3], откуда заимствована часть обозначений.

σ_z, стоящей на k-м месте. Параметры a, b характеризуют энергию связи соседних спинов решетки, параметр h пропорционален внешнему полю; все они содержат зависимость от температуры T.

Не изменяя значения Q, вместо V можно взять матрицу $V_1^{1/2} V_2 V_3 V_1^{1/2}$ /вариант Янга, следовавшего Онсагеру/ либо матрицу

$$M(h) = (V_2 V_3)^{1/2} V_1 (V_2 V_3)^{1/2}. \qquad /2/$$

Мы будем исходить из /2/, следуя известной работе Шульца, Маттиса и Либа[4], которые подчеркнули преимущество такой симметризации матрицы перехода. Для вычисления спонтанной намагниченности по способу Янга необходимо иметь выражения для собственных векторов матрицы перехода при $h=0$:

$$M = V_2^{1/2} V_1 V_2^{1/2}. \qquad /3/$$

В первой части работы, имеющей подготовительный характер и нужной хотя бы для введения необходимых обозначений, будет изложено приведение матрицы /3/ к диагональному виду. Здесь мы следуем работе[4] /см. также книгу[5]/ с тем отличием, что мы исходим из матричной формулировки /1/ и все изложение связано с ней "непрерывным" образом. Основные вычисления содержатся во второй части данной работы.

ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Следуя Кауфман [6] /см. также[3]/, введем $2n$ эрмитовых γ-матриц, действующих в пространстве размерности 2^n:

$$\gamma_k = X_0 X_1 \dots X_{k-1} Z_k,$$

$$\tilde{\gamma}_k = X_0 X_1 \dots X_{k-1} Y_k, \quad k = 0,1,\dots n-1, \qquad /4/$$

$$U = X_0 X_1 \dots X_{n-1}.$$

Напомним, что U антикоммутирует со всеми γ_k и $\tilde{\gamma}_k$. Опуская несущественный для дальнейшего постоянный множитель в выражении для V_1, получаем

$$M = V_2^{1/2} A V_2^{1/2} = B_+^{1/2} A B_+^{1/2} \left(\frac{1+U}{2}\right) + B_-^{1/2} A B_-^{1/2} \left(\frac{1-U}{2}\right),$$

$$A = \exp(i\theta \Sigma \gamma_k \tilde{\gamma}_k), \qquad /5/$$

$$B_\pm = \exp(ib[\tilde{\gamma}_0 \gamma_1 + \dots \tilde{\gamma}_{n-2} \gamma_{n-1} \mp \tilde{\gamma}_{n-1} \gamma_0]).$$

Далее удобно использовать фермионные операторы, которые определяются соотношениями

$$\gamma_k = \hat{c}_k + \hat{c}_k^+, \qquad i\tilde{\gamma}_k = \hat{c}_k - \hat{c}_k^+,$$

$$U = (-1)^n (-1)^{\Sigma \hat{n}_k}, \qquad \hat{n}_k = \hat{c}_k^+ \hat{c}_k. \qquad /6/$$

Крест обозначает эрмитово сопряжение. Некоторые детали вычислений зависят от четности числа n. Для простоты будем далее считать n нечетным*, то есть

$$U = -(-1)^{\Sigma \hat{n}_k}.$$

Рассмотрим сначала $B_-^{1/2} A B_-^{1/2}$, то есть часть матрицы перехода, определенную на состояниях с четным числом "частиц" $\Sigma \hat{n}_k$. Переходя к новым операторам c_p, c_p^+, которые в отличие от старых мы пишем без шляпки,

$$\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_p e^{i\omega kp} c_p, \qquad \hat{c}_k^+ = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_p e^{-i\omega kp} c_p^+, \qquad \omega = \frac{2\pi}{n}, \qquad /7/$$

будем иметь

$$\Sigma \hat{n}_k = \Sigma n_p, \quad n_p = c_p^+ c_p,$$

$$A = \exp\{2\theta \Sigma (n_p - \tfrac{1}{2})\} = \exp\{2\theta [n_0 - \tfrac{1}{2} + \Sigma' (n_p + n_{-p} - 1)]\}, \qquad /8/$$

$$c_{-p} = c_{n-p}, \quad c_{-p}^+ = c_{n-p}^+, \quad n_{-p} = c_{-p}^+ c_{-p}.$$

Штрих у знака суммы, а далее у произведения, означает, что $0<p<\frac{n}{2}$, то есть член с $p=0$ выделен.

Теперь удобно ввести операторы:

$$r_1(p) = c_p c_{-p} + c_{-p}^+ c_p^+, \quad r_2(p) = i(c_p c_{-p} - c_{-p}^+ c_p^+), \qquad /9/$$

$$r_3(p) = n_p + n_{-p} - 1,$$

подчиняющиеся таким же соотношениям коммутации, как и обычные спиновые матрицы, но с тем отличием, что $r_1^2(p) = r_2^2(p) = r_3^2(p) = n_p n_{-p} + (1-n_p)(1-n_{-p})$. Последнее выражение есть проектор на со-

---

*Ясно, что предел при $n \to \infty$ не зависит от этого предположения. Кроме того, можно отдельно рассмотреть случай четного n и получить результат /29/.

стояния с четным числом $n_p + n_{-p}$. В этих обозначениях

$$B_- = \exp\{-2b[n_0 - \frac{1}{2} + \Sigma'(\cos\delta_p r_3(p) + \sin\delta_p r_2(p))]\} = \qquad /10/$$

$$= S\exp[-2b(n_0 - \frac{1}{2})]\Pi'\exp[-2b r_3(p)]S^+,$$

где

$$S = S(\delta) = \Pi'\exp[\frac{i r_1(p)\delta_p}{2}], \quad \delta_p = \omega p = \frac{2\pi p}{n}. \qquad /11/$$

Так как

$$e^{-br_3} e^{2\theta(r_3\cos\delta - r_2\sin\delta)} e^{-br_3} =$$

$$= \mathrm{ch}\,2\theta\,\mathrm{ch}\,2b - \mathrm{sh}\,2\theta\,\mathrm{sh}\,2b\cos\delta - r_3(\mathrm{ch}\,2\theta\,\mathrm{sh}\,2b - \mathrm{sh}\,2\theta\,\mathrm{ch}\,2b\cos\delta) -$$

$$-r_2\,\mathrm{sh}\,2\theta\sin\delta,$$

получаем, что

$$B_-^{1/2} A B_-^{1/2} = \exp[-(2b-2\theta)(n_0 - \frac{1}{2})]S(\phi)\Pi'\exp[-\epsilon_p r_3(p)]S^+(\phi), \qquad /12/$$

где $\phi_p = \delta_p + \Phi_p$, $S(\phi)$ определяется равенством /11/, а величины Φ_p и ϵ_p $(\epsilon_p > 0)$ определяются при $\theta < b$ уравнениями

$$\mathrm{ch}\,\epsilon_p = \mathrm{ch}\,2\theta\,\mathrm{ch}\,2b - \mathrm{sh}\,2\theta\,\mathrm{sh}\,2b\cos\delta_p,$$

$$\mathrm{sh}\,\epsilon_p\cos\Phi_p = \mathrm{ch}\,2\theta\,\mathrm{sh}\,2b - \mathrm{sh}\,2\theta\,\mathrm{ch}\,2b\cos\delta_p, \qquad /13/$$

$$\mathrm{sh}\,\epsilon_p\sin\Phi_p = \mathrm{sh}\,2\theta\sin\delta_p.$$

Условие $\theta < b$ означает, что температура меньше критической. Решение уравнений /13/ для $e^{i\Phi_p}$ можно записать в виде

$$e^{i\Phi_p} = \sqrt{\frac{(1 - r z_p^{-1})(1 - R^{-1} z_p)}{(1 - r z_p)(1 - z_p^{-1} R^{-1})}}, \qquad /14/$$

$$z_p = e^{i\delta_p} = e^{\frac{2\pi i p}{n}}, \quad r = \mathrm{th}\,\theta(\mathrm{th}\,b)^{-1}, \quad R = (\mathrm{th}\,\theta\,\mathrm{th}\,b)^{-1},$$

где корень понимается в смысле главного значения. Тогда $\Phi_{-p} = -\Phi_p$. Видно, что при $\theta < b$ функция $\Phi(z)$, определенная согласно /14/, аналитична в кольце около $|z| = 1$. Далее, максимальное собственное значение матрицы $B_-^{1/2} A B_-^{1/2}$ /см. /12/ и /9// получается при $n_p = n_{-p} = n_0 = 0$. Следовательно, собственный вектор этой матрицы $|\psi_-\rangle$, соответствующий максимальному собственному значению, будет с точностью до множителя равен

$$|\psi_-\rangle = S(\phi)|0\rangle, \qquad /15/$$

где $|0\rangle$ - вектор вакуума для операторов c_p и операторов $\hat{c}_k$.

Аналогично диагонализуется матрица $B_+^{1/2} A B_+^{1/2}$, если ввести операторы $c_{q+\frac{1}{2}}$:

$$\hat{c}_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_q e^{i\omega k(q+\frac{1}{2})} c_{q+\frac{1}{2}}, \qquad /16/$$

и соответствующие эрмитово сопряженные операторы. В этом случае получаются формулы, аналогичные /8-14/, где вместо δ_p фигурирует $\tilde{\delta}_q = \frac{2\pi}{n}(q + \frac{1}{2})$, а операторы c_p, c_{-p} заменены на $\tilde{c}_q = c_{q+\frac{1}{2}}$, $\tilde{c}_{-q} = c_{n-q-\frac{1}{2}}$. Существенное отличие заключается в том, что выделенной /вещественной/ модой будет мода с индексом $q + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$ вместо моды $p=0$ в предыдущем случае. Для простоты записи соответствующие операторы будем помечать индексом π. В этих обозначениях вместо первого множителя в /12/ в выражении для $B_+^{1/2} A B_+^{1/2}$ будем иметь

$$\exp[2(b+\theta)(n_\pi - \frac{1}{2})],$$

и тогда собственный вектор $|\psi_+\rangle$, соответствующий максимальному собственному значению матрицы $B_+^{1/2} A B_+^{1/2}$, запишется в виде

$$|\psi_+\rangle = \tilde{S}(\tilde{\phi})c_\pi^+|0\rangle,$$

$$\tilde{\phi}_q = \tilde{\delta}_q + \tilde{\Phi}_q, \quad \tilde{S}(\tilde{\phi}) = \Pi'\exp[\frac{i\tilde{r}_1(q)\tilde{\phi}_q}{2}]. \qquad /17/$$

Здесь произведение не содержит члена с $q + \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$, что снова отмечаем штрихом у знака произведения. Напомним, что матрица $B_+^{1/2} A B_+^{1/2}$ определена на состояниях с нечетным числом $\Sigma\tilde{n}_q$. Очевидно, что вектор вакуума для операторов c_p является вектором вакуума и для $\tilde{c}_q$. Последние просто связаны с операторами c_p:

$$\tilde{c}_q = \sum_p g_{qp} c_p, \quad g_{qp} = \frac{1}{n}\sum_k e^{-i\omega(q+\frac{1}{2})k} e^{i\omega kp}. \qquad /18/$$

Далее нам понадобятся свойства коэффициентов g_{qp} , которые нетрудно вывести из определения /18/:

$$\bar{g}_{qp} = g_{-q-p}\,, \quad g_{qp} + \bar{g}_{qp} = \frac{2}{n}, \qquad /19/$$
$$g_{qp} = -\bar{g}_{qp} e^{i(\tilde{\delta}_q - \delta_p)} \,.$$

Чертой сверху обозначено комплексное сопряжение. Обратим внимание на то, что в использовании индекса q есть условность: q на самом деле обозначает $q + \frac{1}{2}$, $-q$ соответствует $-(q+\frac{1}{2})$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПОНТАННОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Согласно рассуждениям Янга[1] /см. также[4] / спонтанная намагниченность $\mathfrak{M}$ при $T>T_c$ равна нулю, а при $T<T_c$ дается выражением

$$\mathfrak{M} = \pm \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\langle \psi_+ | \sigma | \psi_- \rangle| \,. \qquad /20/$$

Знаки $\pm$ соответствуют пределам $h \to \pm 0$, а матрица σ была определена ранее в /1/. Подразумевается, что матричный элемент вычислен при заданном n. Отметим, что выражение /20/ справедливо лишь для матрицы перехода в виде /2/. Оно было получено Шульцем и др.[4] /см. последний раздел их работы/. Далее, можно показать, что при циклических граничных условиях

$$\frac{1}{n} \langle \psi_+ | \sigma | \psi_- \rangle = \langle \psi_+ | Z_0 | \psi_- \rangle . \qquad /21/$$

Это равенство следует из инвариантности матричных элементов $\langle \psi_+ | Z_k | \psi_- \rangle$ относительно циклической перестановки спиновых операторов.

Наша задача состоит в том, чтобы с учетом определения /4/ найти предел

$$|\mathfrak{M}| = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n, \quad \mathfrak{M}_n = |\langle \psi_+ | \gamma_0 | \psi_- \rangle|, \quad \gamma_0 = \hat{c}_0 + \hat{c}_0^+ \,. \qquad /22/$$

Выразим сначала $\mathfrak{M}_n^2$ в виде следа, используя выражения /15/ и /17/ для векторов $|\psi_\pm\rangle$:

$$\mathfrak{M}_n^2 = \mathrm{Sp}\,[(\gamma_0 \tilde{S} \tilde{c}_\pi^+ \Pi_0 \tilde{c}_\pi \tilde{S}^+ \gamma_0)(S \Pi_0 S^+)] \,. \qquad /23/$$

Здесь Π_0 - проектор на вакуумное состояние:

$$\Pi_0 = c_0 c_0^+ \Pi' c_p c_p^+ c_{-p} c_{-p}^+ = \tilde{c}_\pi \tilde{c}_\pi^+ \Pi' \tilde{c}_q \tilde{c}_q^+ \tilde{c}_{-q} \tilde{c}_{-q}^+ \,,$$
$$\tilde{c}_\pi^+ \Pi_0 \tilde{c}_\pi = \tilde{c}_\pi^+ \tilde{c}_\pi \;\; \Pi' \tilde{c}_q \tilde{c}_q^+ \tilde{c}_{-q} \tilde{c}_{-q}^+ .$$

Полезно ввести новые фермионные операторы:

$$d_p = S c_p S^+, \quad d_p^+ = S c_p^+ S^+, \qquad /24/$$
$$\tilde{d}_q = \gamma_0 \tilde{S} \tilde{c}_q \tilde{S}^+ \gamma_0, \quad \tilde{d}_q^+ = \gamma_0 \tilde{S} \tilde{c}_q^+ \tilde{S}^+ \gamma_0,$$

и выразить через них след /23/. Тогда будем иметь

$$\mathfrak{M}_n^2 = 2^n \bar{\mathrm{S}}\mathrm{p}\,[(\tilde{d}_\pi^+ \tilde{d}_\pi \ldots \tilde{d}_q \tilde{d}_{-q} \;\; \tilde{d}_q^+ \tilde{d}_{-q}^+ \ldots)(d_0 d_0^+ \ldots d_p d_{-p} d_p^+ d_{-p}^+ \ldots)]. \qquad /25/$$

Здесь по сравнению с /23/ мы поменяли местами $\tilde{d}_{-q}$ и d_q^+ , d_{-p} и d_p^+ . Все четверки операторов считаем расположенными в порядке возрастания индексов. Через $\bar{\mathrm{S}}\mathrm{p}$ обозначен нормированный след $2^{-n}\mathrm{Sp}$.

Нетрудно показать, что операторы d_p и d_p^+ линейно выражаются через операторы c_p и c_p^+. Эту связь удобно представить в виде

$$d_p + d_{-p}^+ = e^{\frac{i}{2}\phi_p}(c_p + c_{-p}^+), \qquad /26a/$$
$$d_p - d_{-p}^+ = e^{-\frac{i}{2}\phi_p}(c_p - c_{-p}^+).$$

Соответствующие соотношения для операторов с волной несколько сложнее:

$$\tilde{d}_q + \tilde{d}_{-q}^+ = e^{\frac{i}{2}\tilde{\phi}_q} [-\sum_p g_{qp}(c_p + c_{-p}^+) + \frac{2}{n}\sum_p (c_p + c_{-p}^+)], \qquad /26б/$$
$$\tilde{d}_q - \tilde{d}_{-q}^+ = e^{-\frac{i}{2}\tilde{\phi}_q} [-\sum_p g_{qp}(c_p - c_{-p}^+)].$$

Перейдем теперь к вычислению следа /25/. Согласно формуле Кайанелло[7] нормированный след $\bar{\mathrm{S}}\mathrm{p}[\hat{P}_1 \hat{P}_2 \ldots \hat{P}_{2m}]$, где $\hat{P}_k$ - линейные комбинации γ-матриц или фермионных операторов, равен пфаффиану $\mathrm{Pf}\,K$ кососимметрической матрицы K порядка $2m$, матричные элементы K_{ij} которой при $i<j$ равны $\bar{\mathrm{S}}\mathrm{p}(\hat{P}_i \hat{P}_j)$. Кроме того, $(\mathrm{Pf}\,K)^2 = \det K$. В нашем случае матрица K имеет блочный вид:

$$K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ -K_1^T & K_0 \end{bmatrix},$$

где блоки K_0 , K_1 - квадратные матрицы порядка $2n$. Значок T означает транспонирование. Матрица K_0 - блочно-диагональная: один блок размерности 2x2, остальные - одинаковые блоки размерности 4x4:

Далее нам понадобятся свойства коэффициентов g_{qp} , которые нетрудно вывести из определения /18/:

$$\bar{g}_{qp} = g_{-q-p}\,, \quad g_{qp} + \bar{g}_{qp} = \frac{2}{n}, \qquad /19/$$
$$g_{qp} = -\bar{g}_{qp} e^{i(\tilde{\delta}_q - \delta_p)} \,.$$

Чертой сверху обозначено комплексное сопряжение. Обратим внимание на то, что в использовании индекса q есть условность: q на самом деле обозначает $q+\frac{1}{2}$, $-q$ соответствует $-(q+\frac{1}{2})$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПОНТАННОЙ НАМАГНИЧЕННОСТИ

Согласно рассуждениям Янга [1] /см. также [4] / спонтанная намагниченность $\mathfrak{M}$ при $T>T_c$ равна нулю, а при $T<T_c$ дается выражением

$$\mathfrak{M} = \pm \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\langle\psi_+ |\sigma| \psi_-\rangle| \,. \qquad /20/$$

Знаки $\pm$ соответствуют пределам $h \to \pm 0$, а матрица σ была определена ранее в /1/. Подразумевается, что матричный элемент вычислен при заданном n. Отметим, что выражение /20/ справедливо лишь для матрицы перехода в виде /2/. Оно было получено Шульцем и др. [4] /см. последний раздел их работы/. Далее, можно показать, что при циклических граничных условиях

$$\frac{1}{n}\langle\psi_+ |\sigma| \psi_-\rangle = \langle\psi_+ |Z_0| \psi_-\rangle . \qquad /21/$$

Это равенство следует из инвариантности матричных элементов $\langle\psi_+ | Z_k | \psi_-\rangle$ относительно циклической перестановки спиновых операторов.

Наша задача состоит в том, чтобы с учетом определения /4/ найти предел

$$|\mathfrak{M}| = \lim_{n\to\infty} \mathfrak{M}_n, \quad \mathfrak{M}_n = |\langle\psi_+ | \gamma_0 | \psi_-\rangle|, \quad \gamma_0 = \hat{c}_0 + \hat{c}_0^+ \,. \qquad /22/$$

Выразим сначала $\mathfrak{M}_n^2$ в виде следа, используя выражения /15/ и /17/ для векторов $|\psi_\pm\rangle$:

$$\mathfrak{M}_n^2 = \mathrm{Sp}\,[(\gamma_0 \tilde{S} \tilde{c}_\pi^+ \Pi_0 \tilde{c}_\pi \tilde{S}^+ \gamma_0)(S \Pi_0 S^+)] \,. \qquad /23/$$

Здесь Π_0 - проектор на вакуумное состояние:

$$\Pi_0 = c_0 c_0^+ \Pi' c_p c_p^+ c_{-p} c_{-p}^+ = \tilde{c}_\pi \tilde{c}_\pi^+ \Pi' \tilde{c}_q \tilde{c}_q^+ \tilde{c}_{-q} \tilde{c}_{-q}^+ \,,$$
$$\tilde{c}_\pi^+ \Pi_0 \tilde{c}_\pi = \tilde{c}_\pi^+ \tilde{c}_\pi \; \Pi' \tilde{c}_q \tilde{c}_q^+ \tilde{c}_{-q} \tilde{c}_{-q}^+ .$$

Полезно ввести новые фермионные операторы:

$$d_p = S c_p S^+, \quad d_p^+ = S c_p^+ S^+, \qquad /24/$$
$$\tilde{d}_q = \gamma_0 \tilde{S} \tilde{c}_q \tilde{S}^+ \gamma_0, \quad \tilde{d}_q^+ = \gamma_0 \tilde{S} \tilde{c}_q^+ \tilde{S}^+ \gamma_0,$$

и выразить через них след /23/. Тогда будем иметь

$$\mathfrak{M}_n^2 = 2^n \,\overline{\mathrm{Sp}}\,[(\tilde{d}_\pi^+ \tilde{d}_\pi \ldots \tilde{d}_q \tilde{d}_{-q} \;\tilde{d}_q^+ \tilde{d}_{-q}^+ \ldots)(d_0 d_0^+ \ldots d_p d_{-p} d_p^+ d_{-p}^+ \ldots)] . \qquad /25/$$

Здесь по сравнению с /23/ мы поменяли местами $\tilde{d}_{-q}$ и $\tilde{d}_q^+$, d_{-p} и d_p^+ . Все четверки операторов считаем расположенными в порядке возрастания индексов. Через $\overline{\mathrm{Sp}}$ обозначен нормированный след $2^{-n}\mathrm{Sp}$.

Нетрудно показать, что операторы d_p и d_p^+ линейно выражаются через операторы c_p и c_p^+. Эту связь удобно представить в виде

$$d_p + d_{-p}^+ = e^{\frac{1}{2}\phi_p}(c_p + c_{-p}^+), \qquad /26а/$$
$$d_p - d_{-p}^+ = e^{-\frac{1}{2}\phi_p}(c_p - c_{-p}^+).$$

Соответствующие соотношения для операторов с волной несколько сложнее:

$$\tilde{d}_q + \tilde{d}_{-q}^+ = e^{\frac{1}{2}\tilde{\phi}_q}\,[-\sum_p g_{qp}(c_p + c_{-p}^+) + \frac{2}{n}\sum_p (c_p + c_{-p}^+)], \qquad /26б/$$
$$\tilde{d}_q - \tilde{d}_{-q}^+ = e^{-\frac{1}{2}\tilde{\phi}_q}[-\sum_p g_{qp}(c_p - c_{-p}^+)].$$

Перейдем теперь к вычислению следа /25/. Согласно формуле Кайанелло [7] нормированный след $\overline{\mathrm{Sp}}[\hat{P}_1 \hat{P}_2 \ldots \hat{P}_{2m}]$, где $\hat{P}_k$ - линейные комбинации γ-матриц или фермионных операторов, равен пфаффиану $\mathrm{Pf}\,K$ кососимметрической матрицы K порядка $2m$, матричные элементы K_{ij} которой при $i<j$ равны $\overline{\mathrm{Sp}}(\hat{P}_i \hat{P}_j)$. Кроме того, $(\mathrm{Pf}\,K)^2 = \det K$. В нашем случае матрица K имеет блочный вид:

$$K = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} K_0 & K_1 \\ -K_1^T & K_0 \end{bmatrix},$$

где блоки K_0 , K_1 - квадратные матрицы порядка $2n$. Значок T означает транспонирование. Матрица K_0 - блочно-диагональная: один блок размерности 2x2, остальные - одинаковые блоки размерности 4x4:

$$K_0 = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} .$$

Проще находить не матрицу K, а матрицу $\tilde{K}$:

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} w & \\ & w \end{bmatrix} K \begin{bmatrix} w^T & \\ & w^T \end{bmatrix} ,$$

где w - ортогональная блочно-диагональная матрица такой же структуры, что и K_0:

$$w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix} & & \\ & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} .$$

В этом случае сразу появляются комбинации операторов /26/, в которых зависимость от ϕ_p, $\tilde{\phi}_q$ входит в виде множителей. Легко видеть, что $wK_0w^T = K_0$. Несложные вычисления с использованием свойств функции g_{qp} /см. /19// определяют вид матрицы $\tilde{K}_1 = wK_1w^T$:

$$\tilde{K}_1 = \begin{bmatrix} M_{\pi 0} & M_{\pi p} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \\ M_{q0} & M_{qp} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} .$$

Она составлена из типичных блоков M_{qp} размерности 4x4, прямоугольных блоков $M_{\pi p}$, M_{q0} и блока $M_{\pi 0}$ размерности 2x2. Их явный вид таков:

$$M_{qp} = D(\tilde{\phi}_q) \begin{bmatrix} g_{-qp} & g_{-q-p} & 0 & 0 \\ g_{qp} & g_{q-p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{-qp} & g_{-q-p} \\ 0 & 0 & g_{qp} & g_{q-p} \end{bmatrix} D(\phi_p), \quad M_{q0} = D(\tilde{\phi}_q) \begin{bmatrix} g_{-q0} & 0 \\ g_{q0} & 0 \\ 0 & g_{-q0} \\ 0 & g_{q0} \end{bmatrix} ,$$

$$M_{\pi p} = \begin{bmatrix} g_{\pi p} & g_{\pi - p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{\pi p} & -g_{\pi - p} \end{bmatrix} D(\phi_p), \quad M_{\pi 0} = \begin{bmatrix} g_{\pi 0} & 0 \\ 0 & -g_{\pi 0} \end{bmatrix} .$$

где $D(\phi)$ - диагональная матрица

$$\mathrm{diag}(e^{i\phi/2}, e^{-i\phi/2}, e^{i\phi/2}, e^{-i\phi/2}).$$

Теперь, переставляя строки и столбцы в $\det \tilde{K}$, получаем

$$\mathcal{K}_n^4 = 2^{2n} \det K = 2^{2n} \det \tilde{K} =$$

$$= 2^{-2n} \det \begin{bmatrix} 0 & I & G & 0 \\ -I & 0 & 0 & G_\pi \\ -G^T & 0 & 0 & I \\ 0 & -G_\pi^T & -I & 0 \end{bmatrix} = 2^{-2n} [\det(I - G_\pi G^T)]^2 . \qquad /27/$$

Здесь I - единичная матрица n-го порядка, матрица G имеет матричные элементы:

$$G_{qp} = e^{-\frac{i}{2}\tilde{\phi}_q} g_{qp}\, e^{\frac{i}{2}\phi_p},$$

а G_π отличается от G заменой элементов $g_{\pi p}$ на $-g_{\pi p}$. Учитывая это отличие и используя последнее из соотношений /19/, нетрудно убедиться, что

$$\det(I-G_\pi G^T) = \det(e^{i\tilde{\Phi}_q}\delta_{qq'} + \sum_p \bar{g}_{qp} e^{i\Phi_p} g_{q'p}). \qquad /28/$$

Отметим, что фазы $\tilde{\delta}_q$ и δ_p выпадают. Наконец, вспоминая определение /18/ для g_{qp}, из /27/ и /28/ получаем

$$\mathfrak{M}_n^2 = \det T^{(n)},$$

$$T^{(n)}_{kk'} = \frac{1}{2n}\sum_q e^{i\tilde{\Phi}_q} e^{-i\omega(q+\frac{1}{2})(k-k')} + \frac{1}{2n}\sum_p e^{i\Phi_p} e^{-i\omega p(k-k')} \qquad \begin{matrix}/29/\\ /k,k'=0,1,\ldots n-1/.\end{matrix}$$

Таким образом,

$$T^{(n)}_{kk'} = a_{k-k'} + \epsilon(n),$$

$$a_{k-k'} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} e^{i\Phi(z)} z^{-(k-k')}\frac{dz}{z}, \qquad /30/$$

где $\Phi(z)$ определяется из равенства /14/, $\epsilon(n) = O(e^{-\alpha n})$, $\alpha > 0$, в силу аналитичности $\phi(z)$ при $T < T_c$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \det T^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \det(a_{k-k'})_{(n)}. \qquad /31/$$

Очевидно, что $a_{k-k'}$ есть коэффициент Фурье в разложении функции $e^{i\Phi(z)}$ и определение спонтанной намагниченности в подходе Янга сводится к вычислению предельного значения тех же теплицевых детерминантов, что и для коррелятора при $T<T_c$ [2]. А эта задача просто решается, как впервые было показано в [2], благодаря применению теоремы Сеге-Каца, согласно которой предел /31/ равен $\exp(\sum_1^\infty k L_k L_{-k})$, где L_m - коэффициенты разложения

$$\ln e^{i\Phi(z)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_m z^m$$

в ряд Фурье или ряд Лорана. В данном случае сумма $\sum_1^\infty k L_k L_{-k}$ выражается в конечном виде и равна

$$\frac{1}{4}\ln\left[1 - \frac{(r-R^{-1})^2}{(1-rR^{-1})^2}\right]$$

в обозначениях /14/. Это и дает известный результат:

$$|\mathfrak{M}|^2 = (1 - \frac{sh^2 2\theta}{sh^2 2b})^{1/4}.$$

Таким образом, вычисление спонтанной намагниченности по Янгу оказывается задачей такой же сложности, как и соответствующая задача для корреляторов.

В заключение заметим, что мы рассмотрели лишь один из матричных элементов оператора σ в том представлении, в котором матрица перехода без поля диагональна. И, пока не видно препятствий для такого же исследования других матричных элементов, можно думать, что задача с полем разрешима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Yang C.N. Phys.Rev., 1952, 85, p.808.
2. Montroll E.W., Potts R., Ward J. Journ.Math.Phys., 1963, 4, p.308.
3. Хуанг К. Статистическая механика. "Мир", М., 1966.
4. Shultz T.D., Mattis D.C., Lieb E.H. Rev.Mod.Phys., 1964, 36, p.856.
5. Маттис Д. Теория магнетизма. "Мир", М., 1967.
6. Kaufmann B. Phys.Rev., 1949, 76, p.1232.
7. Caianiello R.E. Nuovo Cim.Suppl., 1959, 14, p.177.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Д1,2-9224	IV Международный семинар по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1975.	3 р. 60 к.
Д-9920	Труды Международной конференции по избранным вопросам структуры ядра. Дубна, 1976.	3 р. 50 к.
Д9-10500	Труды II Симпозиума по коллективным методам ускорения. Дубна, 1976.	2 р. 50 к.
Д2-10533	Труды X Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Баку, 1976.	3 р. 50 к.
Д13-11182	Труды IX Международного симпозиума по ядерной электронике. Варна, 1977.	5 р. 00 к.
Д17-11490	Труды Международного симпозиума по избранным проблемам статистической механики. Дубна, 1977.	6 р. 00 к.
Д6-11574	Сборник аннотаций XV совещания по ядерной спектроскопии и теории ядра. Дубна, 1978.	2 р. 50 к.
Д3-11787	Труды III Международной школы по нейтронной физике. Алушта, 1978.	3 р. 00 к.
Д13-11807	Труды III Международного совещания по пропорциональным и дрейфовым камерам. Дубна, 1978.	6 р. 00 к.
	Труды VI Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц. Дубна, 1978 /2 тома/	7 р. 40 к.
Д1,2-12036	Труды V Международного семинара по проблемам физики высоких энергий. Дубна, 1978	5 р. 00 к.
Р18-12147	Труды III Совещания по использованию ядерно-физических методов для решения научно-технических и народнохозяйственных задач. Дубна, 1978.	2 р. 20 к.
Д1,2-12450	Труды XII Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий. Приморско, НРБ, 1978.	3 р. 00 к.
Р2-12462	Труды V Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979.	2 р. 25 к.
Д-12831	Труды Международного симпозиума по фундаментальным проблемам теоретической и математической физики. Дубна, 1979.	4 р. 00 к.
Д4-80-271	Труды Международной конференции по проблемам нескольких тел в ядерной физике. Дубна, 1979.	3 р. 00 к.
Д4-80-385	Труды Международной школы по структуре ядра. Алушта, 1980.	5 р. 00 к.
	Труды VII Всесоюзного совещания по ускорителям заряженных частиц, Дубна, 1980 /2 тома/	8 р. 00 к.
Д11-80-13	Труды рабочего совещания по системам и методам аналитических вычислений на ЭВМ и их применению в теоретической физике, Дубна, 1979	3 р. 50 к.
Д2-81-158	Труды XIV Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий, Дубна, 1980	3 р. 50 к.

Заказы на упомянутые книги могут быть направлены по адресу:
101000 Москва, Главпочтамт, п/я 79
Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований

Валуев Б.Н. Р17-82-329

Вычисление спонтанной намагниченности двумерной решетки Изинга в подходе Янга

Значительно упрощено вычисление спонтанной намагниченности в подходе Янга. Для этого использованы подходящая симметризация матрицы перехода и формула Кайанелло для следов.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Valuev B.N. P17-82-329

Calculation of the Spontaneous Magnetization of the Two-Dimensional Ising Lattice in Yang's Approach

A considerably simplified calculation of the spontaneous magnetization in Yang's approach is given. To this end we use the suitably symmetrized transfer matrix and Caianiello's formula for traces.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.