объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-82-328

Б.Н.Валуев

ДВА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЕТЕРМИНАНТА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ СЕГЕ-КАЦА

Направлено в журнал "Теоретическая и математическая физика"

1982

1. При исследовании двумерной модели Изинга возникла задача о нахождении предельного значения детерминанта теплицевой матрицы:

$$T_{[n]}(f) = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} \\ c_{-1} & c_0 & c_1 & \dots & \\ c_{-2} & c_{-1} & c_0 & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ c_{-n+1} & & & & c_0 \end{bmatrix} \qquad /1/$$

при $n \to \infty$. Здесь c_k - коэффициенты Фурье функции $f(\theta)$, представимой рядом Фурье:

$$f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k , \quad z = e^{i\theta} , \quad -\pi \leq \theta \leq \pi , \qquad /2/$$

и удовлетворяющей некоторым дополнительным условиям. Решение этой задачи дается теоремой, доказанной впервые Сеге [1] для случая вещественной функции f и Кацем [2] в комплексном случае, когда матрица $T_{[n]}$ неэрмитова. Эти доказательства изложены также в книгах [3] и [4]. Если подход Сеге можно характеризовать как аналитический, то доказательство Каца основано на довольно сложной комбинаторике, которой можно прида.ь теоретико-вероятностный смысл.

Цель настоящей работы - изложить новое доказательство теоремы Сеге-Каца, отражающее матричный характер задачи. Оказывается, что результат /см. формулу /18// имеет простой смысл: он выражается через след коммутатора бесконечных матриц, которые естественно возникают при матричном подходе к задаче. Структура доказательства также весьма проста.

2. Будем исходить из следующей формулировки <u>теоремы Сеге-Каца:</u>

пусть логарифм функции $f(\theta)$ *представим рядом Фурье*

$$\ln f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} L_k z^k \qquad /3/$$

и, кроме того,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k |L_k| < \infty . \qquad /4/$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} e^{-nL_0} \det T_{[n]} = \exp\Big(\sum_{1}^{\infty} k L_k L_{-k}\Big), \qquad /5/$$

где $T_{[n]}$ определяется равенствами /1/ и /2/.

В близкой форме теорема была впервые приведена в статье Монтролла, Поттса и Уорда[5] и с тех пор неоднократно использовалась в работах по модели Изинга. По существу же вышеприведенная формулировка совпадает с той, которая была дана Кацем[2]. Некоторое отличие заключается в том, что вместо условия /4/ Кац использовал условие $\sum_{-\infty}^{\infty} k|c_k| < \infty$ и полагал $|f-1| < 1$, так что $\ln f$ определяется абсолютно сходящимся рядом по степеням $f-1$. Так как условие Каца означает абсолютную сходимость ряда для производной $f'(\theta)$, то ряд для $\ln f$ можно продифференцировать и получить условие /4/. И наоборот, из /4/ следует условие Каца. Практически условие /4/ более удобно, так как мы не связываем себя с каким-либо конкретным определением логарифма.

3. Начнем доказательство с переформулировки теоремы в терминах бесконечных матриц. Прежде всего в соответствии с /1/ введем бесконечную матрицу $T(f) = T_{[\infty]}(f)$ и представим ее в виде ряда

$$T(f) = c_0 I + \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_+^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} P_-^k \qquad /6/$$

по степеням матриц P_+ и P_-. Через I обозначена бесконечная единичная матрица, P_- получается транспонированием P_+, а матрица P_+

$$P_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

имеет отличные от нуля и равные единице матричные элементы лишь на первой наддиагонали. Ее k-я степень, P_+^k, имеет единичные матричные элементы лишь на k-й наддиагонали. Далее мы будем использовать норму матрицы P, определенную как $\|P\| = \sup_{\|x\|=1} \|Px\|$, где $\|x\|$ - норма вектора x, определенная с помощью эрмитова скалярного произведения. Как нетрудно видеть, $\|P_\pm\| = 1$, а так как ряд $\sum |c_k|$ сходится, то $\|T(f)\| < \infty$. И впредь мы будем иметь дело с ограниченными матрицами, поэтому все последующие операции сложения и умножения матриц имеют смысл /умножение ассоциативно/.

Заметим теперь, что выражение /6/ для $T(f)$ получается из выражения /2/ для f формальной заменой $c_0 \to c_0 I$, $z^k \to P_+^k$, $z^{-k} \to P_-^k$, $k > 0$. Важно, что такое соответствие сохраняется и для произведения комбинаций типа /2/, если в соответствующем матричном выражении матрицы P_+^k всегда располагать слева. В этом нетрудно убедиться, проверив равенства

$$P_+^k P_-^\ell = \begin{cases} I & \text{при} \quad k = \ell, \\ P_+^{k-\ell} & \text{при} \quad k > \ell, \\ P_-^{\ell-k} & \text{при} \quad k < \ell, \end{cases}$$

$$P_-^\ell P_+^k = \begin{cases} I - I_k & \text{при} \quad k = \ell, \\ (I - I_\ell) P_+^{k-\ell} & \text{при} \quad k > \ell, \\ P_-^{\ell-k}(I - I_k) & \text{при} \quad k < \ell. \end{cases} \qquad /7/$$

Через I_k обозначена диагональная матрица, у которой каждый из k первых диагональных элементов равен единице, а остальные суть нули. В силу отмеченного соответствия функции

$$f = \exp(L_0)\exp\Big(\sum_{1}^{\infty} L_k z^k\Big)\exp\Big(\sum_{1}^{\infty} L_{-k} z^{-k}\Big)$$

сопоставляется матрица

$$T(f) = \exp(L_0 I)\exp(\hat{L}_+)\exp(\hat{L}_-),$$

$$\hat{L}_+ = \sum_{k=1}^{\infty} L_k P_+^k, \quad \hat{L}_- = \sum_{k=1}^{\infty} L_{-k} P_-^k. \qquad /8/$$

Таким образом, вместо /6/ мы получаем для $T(f)$ представление /8/ в виде произведения матричных экспонент. Теперь видно, что утверждение теоремы /равенство /5// равносильно следующему

$$\lim_{n\to\infty} \det\big(e^{\hat{L}_+} e^{\hat{L}_-}\big)_{[n]} = \exp\Big(\sum_{k=1}^{\infty} k L_k L_{-k}\Big), \qquad /9/$$

где значок $[n]$ указывает, что из бесконечной матрицы, стоящей здесь в скобках, следует взять матрицу размерности $n \times n$, расположенную на пересечении первых n строк и n столбцов. Забегая вперед, отметим, что показатель экспоненты в правой части /9/ мы получим как след коммутатора $[\hat{L}_+, \hat{L}_-]$. Из такой формулировки ясно, что результат существенно связан со свойствами бесконечных матриц.

4. В общем случае для ограниченных матриц понятия следа и детерминанта не определены с точки зрения теории операторов[6], то есть как инвариантные, не зависящие от базиса, объекты.

Однако в нашем случае, учитывая выражение /9/ и введенное там обозначение, полезно определить детерминант бесконечной матрицы M как

$$\mathrm{Det}_1 M = \lim_{n\to\infty} \det M_{[n]} \; . \qquad /10/$$

Отметим, что определение /10/ использовал Дирак [7] при исследовании спиноров в гильбертовом пространстве.

Наряду с /10/ рассмотрим другое естественное определение детерминанта матрицы M, представимой в виде экспоненты

$$\mathrm{Det}_2 M = e^{\mathrm{Sp} L} \;, \; M = e^{L} \;, \qquad /11/$$

где знак следа означает, как обычно, сумму ряда, составленного из диагональных матричных элементов. Ясно, что Det_1 и Det_2 существуют не всегда. Даже когда они существуют, они могут не совпадать, как будет видно ниже.

Мы приведем вычисление предела /9/ к вычислению некоторого детерминанта в смысле определения /11/. Для этого нужны две леммы, первая из которых содержится в книге Дирака [7].

<u>Лемма 1.</u> Если M - произвольная матрица, а R - верхняя треугольная, то

$$\mathrm{Det}_1 MR = \mathrm{Det}_1 M \, \mathrm{Det}_1 R . \qquad /12/$$

Так, матрица $e^{\pm P_+}$ является верхней треугольной, поэтому $\mathrm{Det}_1(Me^{\pm P_+}) = \mathrm{Det}_1 M$. Рассмотрим теперь пример, который характерен для решаемой задачи. Ясно, что $\mathrm{Det}_1(e^{\eta P_-} e^{\xi P_+}) = -1$, где ξ, η - некоторые параметры. С другой стороны, рассматриваемое произведение матриц равно $\exp(\eta P_- + \xi P_+ + \frac{\eta\xi}{2}[P_- P_+] \ldots)$, где точками обозначены высшие коммутаторы. Можно показать, что их след равен нулю, а $\mathrm{Sp}[P_- P_+] = -1$, то есть Det_1 и Det_2 в данном случае не совпадают. Достаточное условие равенства этих величин дает

<u>Лемма 2.</u> Пусть $M = e^{L}$ и ограниченная матрица L такова, что для любого достаточно большого целого n она может быть представлена в виде $L = L_n + \epsilon_n$, причем равны нулю все матричные элементы L_n, расположенные выше главной диагонали, кроме лежащих на пересечении n первых строк и n первых столбцов, а $\|\epsilon_n\| n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $\mathrm{Det}_1 M = \mathrm{Det}_2 M$, если какой-либо из этих детерминантов существует.

Для доказательства запишем матрицу M в виде $e^{L_n} + \delta_n$, $\|\delta_n\| < C \|\epsilon_n\|$, где C - некоторая постоянная. Оценка для $\|\delta_n\|$ просто следует из свойств нормы и ограниченности матрицы L_n. Далее, нетрудно убедиться, что $(\exp L_n)_{[n]} = \exp(L_{n[n]})$. Поэтому имеем

$$\mathrm{Det}_1 e^{L} = \lim_{n\to\infty} \det\{ e^{L_{n[n]}} (E_n + d_n) \} \;,$$
$$d_n = e^{-L_{n[n]}} \delta_{n[n]} \; . \qquad /13/$$

Здесь E_n - единичная матрица n-го порядка. Из оценки для $\|\delta_n\|$ и условия леммы получаем, что $n \|d_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\det(E_n + d_n) \to 1$ при $n \to \infty$. Действительно, существует такая унитарная матрица n-го порядка U_n, что $U_n d_n U_n^{-1} = t_n$, где t_n - треугольная матрица. Так как $\|t_n\| \le \|d_n\|$, то каждый из диагональных элементов $(t_n)_{kk}$ матрицы t_n удовлетворяет неравенству $|(t_n)_{kk}| \le \|d_n\|$. Поэтому $\sum_{k=1}^{n} |(t_n)_{kk}| \le n \|d_n\|$, то есть стремится к нулю при $n \to \infty$, а произведение $\prod_{k=1}^{n} [1 + (t_n)_{kk}] \to 1$. Таким образом, из /13/ следует, что если существует $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Sp}\{L_{n[n]}\} = \mathrm{Sp} L$, то существует $\mathrm{Det}_1 e^{L}$, равный $\mathrm{Det}_2 e^{L}$, и наоборот.

5. Теперь мы можем вернуться к доказательству равенства /9/. На основании леммы 1 имеем

$$\mathrm{Det}_1 (e^{\hat{L}_+} e^{\hat{L}_-}) = \mathrm{Det}_1 (e^{\hat{L}_+} e^{\hat{L}_-} e^{-\hat{L}_+}) = \mathrm{Det}_1 e^{L} \;,$$
$$L = e^{\hat{L}_+} \hat{L}_- e^{-\hat{L}_+} = \hat{L}_- + [\hat{L}_+ \hat{L}_-] + \frac{1}{2!}[\hat{L}_+ [\hat{L}_+ \hat{L}_-]] + \ldots \; . \qquad /14/$$

Чтобы показать, что матрица L удовлетворяет условиям леммы 2, примем во внимание свойства коммутаторов:

$$[P_+^k P_-^{\ell}] = \begin{cases} I_k & \text{при } k = \ell, \\ I_\ell P_+^{k-\ell} = I_\ell P_+^{k-\ell} I_k & \text{при } k > \ell, \\ P_-^{\ell-k} I_k = I_\ell P_-^{\ell-k} I_k & \text{при } k < \ell. \end{cases} \qquad /15/$$

Первые части равенств справа получаются из /7/, а вторые - усматриваются непосредственно. Назовем матрицей типа (ℓ, k) такую матрицу $M(\ell, k)$, у которой могут быть отличны от нуля лишь матричные элементы на пересечении первых ℓ строк и k первых столбцов: $M(\ell, k) = I_\ell M(\ell, k) I_k$. Ясно, что коммутатор /15/ имеет тип (ℓ, k). Рассмотрим еще коммутатор

$$[P_+^s M(\ell, k)] = P_+^s I_\ell M(\ell, k) - M(\ell, k) I_k P_+^s \; . \qquad /16/$$

Первый член имеет тип $(\ell - s, k)$, а при $\ell \le s$ равен нулю. Второй член будет типа $(\ell, k+s)$, и поэтому коммутатор /16/ будет типа $(\ell, k+s)$. Отсюда следует, что r-кратный коммутатор

$$[P_+^{k_r}[P_+^{k_{r-1}} \dots [P_+^{k_1} P_-^{\ell}]\dots]] \qquad /17/$$

будет матрицей типа $(\ell, k_1 + k_2 + \dots k_r)$. Отметим также, что /16/ можно рассматривать как коммутатор конечномерных матриц. Поэтому след коммутатора /17/ равен нулю при $r > 1$.

Представим матрицу L в виде

$$L = e^{\hat{L}_+} L_-^{(n)} e^{-\hat{L}_+} + \epsilon_1(n), \qquad L_-^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} L_{-k} P_-^k$$

и определим L_n как сумму всех членов в разложении $e^{\hat{L}_+} L_-^{(n)} e^{-\hat{L}_+}$ по степеням P_+, для которых суммарная степень $k_1 + k_2 + \dots + k_r + \dots \le n$, а остающиеся члены обозначим через $\epsilon_2(n)$. Из представления в виде /14/ и установленных выше свойств коммутаторов ясно, что определенная таким образом матрица L_n удовлетворяет условиям леммы 2. Остается доказать, что $n\|\epsilon_n\| \to 0$, где $\epsilon_n = \epsilon_1(n) + \epsilon_2(n)$. Оценивая норму $\epsilon_1(n)$, имеем

$$\|\epsilon_1(n)\| \le e^{2\|L_+\|} r_n, \qquad r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} |L_{-k}|.$$

Из условия /4/ следует, что $n r_n \to 0$ при $n \to \infty$. Чтобы оценить $\|\epsilon_2(n)\|$, сравним ряд для $\epsilon_2(n)$ с разложением $\exp(\Sigma |L_k| P_+^k) L_-^{(n)} \exp(\Sigma |L_k| P_+^k)$ по степеням P_+, в котором учитываются лишь члены с суммарной степенью P_+, большей, чем n. Почленное соответствие этих выражений очевидно. Отсюда следует, что $\|\epsilon_2(n)\| \le \|L_-^{(n)}\| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, где a_k - коэффициенты ряда $\sum_0^{\infty} a_k z^k = \exp(2 \sum_1^{\infty} |L_k| z^k)$, $a_k \ge 0$. Из сходимости ряда $\Sigma k |L_k|$ вытекает сходимость ряда $\Sigma k a_k$, следовательно, $n \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, условия леммы 2 выполнены, и из /14/ получаем

$$\mathrm{Det}_1 (e^{\hat{L}_+} e^{\hat{L}_-}) = e^{\mathrm{Sp}[\hat{L}_+ \hat{L}_-]}, \qquad /18/$$

так как след высших коммутаторов равен нулю. С помощью /15/ имеем

$$\mathrm{Sp}[\hat{L}_+ \hat{L}_-] = \sum_{k=1}^{\infty} L_k L_{-k} \,\mathrm{Sp}\, I_k = \sum_{k=1}^{\infty} k L_k L_{-k},$$

что и завершает доказательство теоремы.

В заключение хотелось бы подчеркнуть один вывод из предыдущего изложения. А именно, что коррелятор спинов в модели Изинга, являющийся аналогом функции Грина в теории поля, определяется /ниже критической точки и при больших расстояниях/ детерминантом в смысле /10/, который не совпадает с детерминантом, определенным согласно /11/.

Автор благодарен Г.В.Ефимову, В.И.Огиевецкому и Е.Радеску за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Szegö G. Commun. du Seminaire math. de l'universite de Lund, 1952, tome supplem. dedie a Marcel Riesz, 228.
2. Кас М. Duke Math. Journ., 1954, 21, p. 501.
3. Гренадер У., Сеге Г. Теплицевы формы и их приложения. ИЛ, М., 1961.
4. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. "Мир", М., 1965.
5. Montroll E.W., Potts R.,Ward J. Journ.Math.Phys., 1963, 4, p. 308.
6. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. "Мир", М., 1972.
7. Дирак П. Спиноры в гильбертовом пространстве. "Мир", М., 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 мая 1982 года.

НЕТ ЛИ ПРОБЕЛОВ В ВАШЕЙ БИБЛИОТЕКЕ?

Вы можете получить по почте перечисленные ниже книги, если они не были заказаны ранее.

Валуев Б.Н. Два определения детерминанта и доказательство теоремы Сеге-Каца Р17-82-328

Дано новое доказательство теоремы Сеге-Каца. Оно основано на переформулировке задачи в терминах бесконечных ограниченных матриц и связи двух естественных определений детерминанта для таких матриц.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1982

Valuev B.N. Two Definitions of Determinant and Proof of the Szegö-Kac Theorem P17-82-328

A new proof of the Szegö-Kac theorem is given. It is based on a reformulation of the problem in terms of infinite bounded matrices and a connection between two natural definitions of their determinant.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1982

Перевод автора.