сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-82-268

В.К.Федянин

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

1982

1. Свойства широкого класса квазиодномерных систем квантовой статистической механики удается часто достаточно удовлетворительно описать с помощью модельного гамильтониана вида

$$H = E_0 + p\sum_k N_k + \mu \sum_k (a^+_k a_{k+1} + a^+_{k+1} a_k) + \qquad /1/$$

$$+ q \sum_k N_k N_{k+1}, \qquad N_k = a^+_k a_k,$$

p, μ, q - "уровень" энергии, интегралы перекрывания, параметры взаимодействия между "подсистемами" и т.п. a_k, как правило, операторы Ферми в представлении Гейзенберга, суммирование ведется по ближайшим узлам одномерной периодической решетки с периодом a_0. Поскольку вакуумное состояние $|0>$, определяемое следующим образом:

$$a_n(0)|0> = 0, \quad a_n(t)|0> = v^+ a_n(0) v |0> = 0, \qquad /2/$$

где $v(t)$ - оператор эволюции, является собственным состоянием H, то определяем пробную одночастичную шредингеровскую волновую функцию системы:

$$|\psi(t)> = v(t)|\psi(0)> = \sum_n \phi_n(t) a^+_n |0>. \qquad /3/$$

Воспользовавшись гейзенберговскими уравнениями движения для $a_n(t)$, спроектировав его на $|\psi(0)>$ и $|0>$, сформулировав некоторую процедуру расцепления для "тройных" по $a_n(t)$ слагаемых и переходя к континуальному пределу $\phi_n(t) \to \phi(x,t)$, имеем для $\phi(x,t)$ уравнение

$$i\hbar \dot\phi(x,t) = a\,\phi(x,t) - b\,\phi_{xx}(x,t) - c|\phi|^2 \phi(x,t). \qquad /4/$$

Это хорошо известное нелинейное S3 уравнение /1,2/:

$$a = p + 2\mu + 2q, \quad b = -\mu a_0^2, \quad c = 2q.$$

Заметим, что случаи $b>0$, $c>0$ и $b>0$, $c<0$ /альтернативно $b<0$, $c<0$, $b<0$, $c>0$ / отвечают "топологически" различным односолитонным решениям. Для $b>0$, $c>0$ / $b<0$, $c<0$ / односолитонное решение /4/ имеет вид

$$\phi(x-vt) = \frac{\phi_0 \exp i(kx-\omega t+\theta_0)}{\cosh\left[\frac{\phi_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2} (x-vt+x_0)\right]}, \qquad /5/$$

$$k = \frac{\hbar v}{2b}, \quad \hbar\omega = a + bk^2 - \frac{c\phi_0^2}{2},$$

где ϕ_0 и v - амплитуда и скорость огибающей уединенной волны, а x_0 и θ_0 - начальное положение и фаза суть "свободные" параметры солитона. Волна /5/ локализована в области $L \sim \frac{1}{\phi_0}\left(\frac{2b}{c}\right)^{1/2}$, определяемой ϕ_0 и параметрами гамильтониана. Континуальное приближение эквивалентно требованию

$$L \gg a_0 ; \quad \frac{1}{\phi_0}\left(2\frac{b}{c}\right)^{1/2} \gg a_0 , \quad \frac{1}{\phi_0}\left(\frac{|\mu|}{|q|}\right)^{1/2} \gg 1 \qquad /6/$$

и ограничивает область амплитуд ϕ_0 при фиксированных параметрах H, для которых существует решение вида /5/.

Ниже мы будем использовать /5/ как амплитуду вероятности "частицы" /солитона/. Естественно, при возбуждении солитонов в реальных системах налицо набор "частиц" с распределением по ϕ_0. Но в первом приближении будем считать, что мы имеем газ и возбуждение локализовано в некоторой области $\sim L$. Это позволяет, нормировав /5/, выразить ϕ_0 через параметры H. Действительно, из $\int \frac{dx}{a_0} |\phi|^2 = 1$ имеем $\phi_0 = \frac{a_0}{2}\left(\frac{c}{2b}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{|q|}{|\mu|}\right)^{1/2}$. Для области локализации L имеем

$$L = \frac{4b}{a_0 c} = 2a_0 \frac{|\mu|}{|q|}, \qquad /7/$$

и условие применимости континуального приближения выглядит теперь так:

$$L \gg a_0 ; \quad 2|\mu| \gg |q| . \qquad /8/$$

Отнормированное решение /4/ запишется в следующем виде:

$$\phi(x-vt) = \left(\frac{a_0}{2L}\right)^{1/2} \frac{\exp(ikx - i\omega t + i\theta_0)}{\cosh \frac{x-vt+x_0}{L}},$$

$$k = \frac{\hbar v}{2b} = \frac{\hbar v}{2a_0^2|\mu|}, \quad h\omega = a + \frac{\hbar^2 v^2}{4b} - \frac{a_0 c}{4L} = \qquad /9/$$

$$= p + 2\mu + 2q - \frac{q^2}{4|\mu|} + \frac{\hbar^2 v^2}{4a_0^2|\mu|} .$$

Формулы /7/-/9/ и выражают нормированное решение с соответствующим законом дисперсии для $\hbar\omega$ через параметры уравнения /a, b, c /, альтернативно, гамильтониана /1/, (p, μ, q).

С помощью /9/ несложно рассчитать все основные характеристики солитона. Так, в частности, энергия солитона дается формулой

$$E = \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle = p + 2\mu + q + \frac{|\mu| a_0^2}{L} + \qquad /10/$$

$$+ bk^2 = E_s^\circ + \frac{m_s v^2}{2}, \quad m_s = \frac{\hbar^2}{2b}.$$

В /10/ m_s можно трактовать как массу солитона, а часть слагаемых в E_s° - как его энергию связи.

Для случая $b>0$, $c<0$ односолитонное решение /4/ дается, например, формулой

$$\phi(x-vt) = \phi_0 \tanh\left[\phi_0\left(\frac{|c|}{2b}\right)^{1/2}(x-vt+x_0)\right]\times \qquad /11/$$

$$\times \exp[i(kx-\omega t+\theta_0)], \quad k = \frac{\hbar v}{2b}, \ \hbar\omega = a + bk^2 - c\phi_0^2,$$

то есть налицо также четыре "свободных" параметра: ϕ_0, v, x_0, θ_0. Поскольку в данном случае асимптотики огибающей $\phi(\xi)$ $(\xi = x-vt+x_0)$ при $\xi\to-\infty$ и $\xi\to+\infty$ имеют скачок $\Delta = 2\phi_0$ /для /9/ $\Delta = 0$ /, то, описывая с помощью /11/ частицеподобные возбуждения /"кинки"/, необходимо нормировать /11/ относительно "вакуума": $\int\frac{dx}{a_0}(\phi_0^2 - |\phi|^2) = 1$. Это приводит к такой же зависимости ϕ и L от c и b, что и выше, и нормированное решение здесь выглядит следующим образом:

$$\phi(x-vt) = \left(\frac{a_0}{L}\right)^{1/2}\tanh\frac{x-vt+x_0}{L}\exp i(kx-\omega t+\theta_0), \qquad /12/$$

$$L = \frac{4b}{a_0|c|}, \quad \hbar\omega = a + \frac{\hbar^2 v^2}{4b} + \frac{a_0|c|}{4L}.$$

Другой широкий класс физически содержательных задач описывается гамильтонианом вида

$$H = Aa_0\sum_k\left[\frac{1}{2}\dot\Phi_k^2 + \frac{c_0^2}{2a_0^2}(\Phi_k - \Phi_{k+1})^2 + \omega_0^2 V(\Phi_k)\right] \qquad /13/$$

/см., например,[3] /, здесь $\Phi_i(t)$ - однокомпонентное реальное безразмерное поле в узле i в момент t, первое слагаемое - кинетическая энергия, второе - "градиентное" взаимодействие, последнее - локальный потенциал. Наиболее широко используются следующие потенциалы:

$$V(SG) = 1 - \cos\Phi \qquad \text{- потенциал sin-Gordon,}$$

$$V(\Phi^4) = \frac{(\Phi^2-1)^2}{8} \qquad \text{- потенциал } \Phi^4, \qquad /13'/$$

$$V(DQ) = \frac{(|\Phi|-1)^2}{2} \qquad \text{- потенциал, квадратичный по модулю;}$$

a_0 - межатомное расстояние, c_0 и ω_0 - характерные параметры размерности скорости и частоты соответственно, определяемые физической спецификой изучаемой системы, A - константа размерности /энергия/ х /длина/$^{-1}$ х /время/$^{-2}$, задающая энергетический масштаб. Характеристическим параметром в /12/ является $d = c_0/\omega_0$. Если $d \gg a_0$, то нелицо малая вариация $\Phi_i(t)$ при изменении i и можно перейти к континуальному пределу для H, что немедленно приводит к следующему дифференциальному уравнению для

$$\ddot{\Phi}(x,t) - c_0^2 \Phi_{xx}(x,t) = -\omega_0^2 \frac{dV}{d\Phi}. \qquad /14/$$

Нас ниже будут интересовать лишь решения с нулевой асимптотикой на бесконечности - они получили наименование "кинков". Эти решения даются формулой

$$d(2\gamma^2)^{-1/2} \int |V(\Phi)|^{-1/2} d\Phi = \pm(s - s_0), \qquad /15/$$

конкретный вид решений определяется выбором $V(\Phi)$ по /13'/. Так, в частности, для $V(SG)$ имеем

$$\cos\phi(x,t) = 1 - 2\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{x - vt + x_0}{\gamma^{-1}d}\right], \quad \gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c_0^2}\right)^{-1/2}, \qquad /16/$$

оно локализовано в области $\approx \gamma^{-1}d$: при увеличении скорости область локализации солитона сужается. Само решение зависит лишь от $s = x - vt$. Релятивистская зависимость его от "скорости" v /мы будем обозначать это индексом "v": $\Phi_k^v(s)$ / определяется видом исходного уравнения /14/. Во всех случаях, если воспользоваться /15/ и конкретным выражением для $\Phi_k^v(s)$, несложно рассчитать энергию "кинков" и импульс. Они даются формулами "релятивистского" вида [3,4]:

$$E_k(v) = \gamma E_k^\circ \equiv [E_k^{\circ 2} + p^2 c_0^2]^{1/2}, \qquad p = M_k v \gamma. \qquad /17/$$

Величины

$$E_k^\circ = M_k c_0^2, \qquad M_k = \frac{A\sqrt{2}}{d} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} |V|^{1/2} d\Phi \equiv \frac{A\sqrt{2}}{d} \int_{-\infty}^{\infty} V(\Phi_k^v(x))\,dx \qquad /18/$$

естественно отождествить с энергией и массой покоя кинка; Φ_1 и Φ_2 суть значения решений в минимумах локального потенциала. Знаки /$\pm$/ в /15/ естественным образом позволяют расклассифицировать решения на кинки $(\frac{d\Phi}{ds})_0 > 0$ и антикинки $(\frac{d\Phi}{ds})_0 < 0$ и ввести топологический заряд $N = N_+ - N_-$ /число кинков - число антикинков/. Ниже, однако, интерпретируя решения /14/ как частицы с массой и энергией /17/, /18/, будем считать $N_+ = N_-$. Это не обязательно, но приводит к простому варианту термодинамики и статистической механики одномерного решеточного газа.

2. Мы изложим сейчас простой вариант статистической механики такой системы, который базируется на введении некоторого эффективного гамильтониана. При известной смелости это позволяет рассмотреть и взаимодействие между кинками и антикинками. При этом описание поведения системы проводится, как обычно, в фазовом пространстве импульсов и координат (p_i, q_i) с обычным предположением, что объем в этом пространстве, отвечающий единственному квантовомеханическому состоянию системы из N_s тождественных и неразличимых частиц, есть $N_s!h^{N_s}$, $N_s = N_k + N_{\bar{k}}$. Интегрирование по q_i ведется в области $0 \div L$, по p - от $-\infty$ до $+\infty$. Мы будем рассматривать уравнение SG или Φ^4. Случай SS тривиален в "нулевом" приближении /см. ниже, а также раздел 4/.

Разобьем одномерный "объем" на ячейки размером $\Delta(v)$. Число таких ячеек $N_s = L/\Delta \equiv N(\frac{a_0}{\Delta})$, где N - число узлов исходной одномерной системы. Будем считать, что каждая ячейка либо занята частицей массы M_K, имеющей скорость v, либо пуста. В таком случае мы можем описывать эту ситуацию на языке операторов с собственными значениями 1 и 0.

Если считать, что число частиц, реально присутствующих в системе /обозначим его $\bar{N}_s$ /, много меньше числа ячеек $\bar{N}_s \ll N_s$, то мы приходим к модели однокомпонентного идеального решеточного газа[5]. Естественно, число реально образующихся кинков и антикинков всецело определяется внешними условиями возбуждения и температурой, но при определенном соотношении между фиксированным числом $N_k = N_{\bar{k}}$ в каноническом ансамбле и средним числом $\bar{N}_s$ в большом каноническом ансамбле можно пользоваться либо тем, либо другим. На языке эффективного гамильтониана это делается автоматически.

В общем случае, когда энергия частиц определяется /17/ или /18/, эффективный гамильтониан дается простой формулой - суммирование ведется по всем ячейкам:

$$H_0' = \nu \sum_f n_f, \quad \nu = -\theta \ln(\frac{bq\Delta}{h}) + V \equiv -\nu_0 + V,$$
$$V = E_k^\circ - \theta\sigma - \theta \ln \beta h \omega_0, \quad q = \frac{E_k^\circ}{c_0} \int e^{\beta E^\circ (1-\sqrt{1+y^2})} dy, \qquad /19/$$

оператор $\hat{N}_s = \sum_f n_f$, $n_f = 0,1$, "считает" полное число солитонов в системе.

Выражение /19/ естественным образом формализует идею одномерного идеального решеточного газа солитонов /кинков и антикинков/. При написании /19/ мы существенно использовали результаты, которые получаются для свободной энергии в методе transfer-matrix /3,4,6/ .

V описывает часть энергии, не зависящую от импульса, а первое слагаемое $\nu \hat{N}_s$ - энергию, связанную с "кинетической" энергией. Поскольку, как было отмечено в /3,4/, именно "захват" голдстоуновской моды и $\bar{N}_{b-1}$ мод с $\omega_{b,n}$ и обуславливает движение кинка и осцилляции его формы, то в /19/ ν умножается на оператор $\hat{N}_s = \sum_f n_f$.

Интеграл по y в /19/ выражается через функцию Макдональда $K_1(z)$, и мы имеем для q

$$q = 2 \frac{E_k^\circ}{c_0} e^{\beta E_k^\circ} K_1(\beta E_k^\circ). \qquad /20/$$

Воспользовавшись известной асимптотической формулой для $K_1(z)$, $z \gg 1$,

$$K_1(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} \left[1 + \frac{1}{2z} + O(z^{-5})\right], \qquad /20'/$$

имеем при $\beta E^\circ \gg 1$

$$q \simeq (2\pi M_k \theta)^{1/2} \left[1 + \frac{1}{2}(\beta E_k^\circ)^{-1/2} + \ldots\right], \quad \nu_0 = \theta \ln\left[\frac{bq\Delta}{h}\right].$$

Множитель b=2 для модели SG и b=1 для Φ^4 отражает то обстоятельство, что в последнем случае мы имеем упорядоченную последовательность кинков и антикинков /или наоборот/; в SG это несущественно из-за бесконечнократной вырожденности основного состояния.

Если мы пренебрегаем солитон-фононным взаимодействием, то эффективный гамильтониан естественным образом запишется в виде

$$H_0^\circ = -\nu_0 \bar{N}_s + E_k^\circ \sum_f n_f, \quad \nu_0 \sim \theta \ln\left[\frac{b}{h}(2\pi M \theta)^{1/2} \Delta\right], \qquad /21/$$

то есть только энергия покоя солитона связывается с вкладом в его решеточную часть. В последнем случае имеем для статсуммы, отвечающей солитонам, выражение

$$Z = Sp_{(f)} e^{-\beta H_0^\circ} = e^{\nu_0 \bar{N}_s} \left[1 + e^{-\beta E_k^\circ}\right]^{N_s}.$$

Свободная энергия

$$F_s = -\theta \ln Z = -\theta \nu_0 \bar{N}_s - \theta N_s \ln\left[1 + e^{-\beta E_k^\circ}\right] \simeq -\theta \bar{N}_s ,$$

где мы использовали тот факт, что

$$\bar{N}_s = \frac{Sp(\Sigma n_\ell e^{-\beta H_0^o})}{Z} = N_s e^{-\beta E_k^o}. \qquad /22/$$

Плотность свободной энергии при этом дается формулой

$$f_s = \lim_{L\to\infty} \frac{F_s}{L} = -\theta \frac{\bar{N}_s}{L} = -\frac{\theta}{\Delta} e^{-\beta E_k^o} = -\theta \bar{n}_s .$$

Этот результат полностью совпадает с результатами Крумхансла и Шриффера[7].

В общем случае /19/ имеем для плотности свободной энергии солитонов

$$f_s = -\theta \bar{n}_s , \; \bar{n}_s = \frac{\langle \hat{N}_s \rangle}{N_s \Delta} = \frac{b e^{\sigma}}{\sqrt{2\pi}\, d} (\beta E_k^o)^{1/2} e^{-\beta E_k^o}, \qquad /23/$$

что, естественно, совпадает с результатом[3,4,6]

Подставляя $b=2$, $\sigma=\ln 2$ для SG и $b=1$, $\sigma=\ln 2\sqrt{3}$ для Φ^4 /см.[3,4,6] /, мы приходим к выражению для $\bar{n}_s$, в котором учтены эффекты солитон-фононного взаимодействия.

Описанная выше модель идеального решеточного газа с эффективными гамильтонианами /19/, /21/ позволяет не только упростить выкладки, но и допускает некоторые, на наш взгляд, интересные обобщения.

В общем случае налицо смесь из трех компонентов $\bar{N}_K$, кинков $N_{\bar{K}}$, антикинков и N_0 "пустых мест". При этом $N_s = \bar{N}_K + \bar{N}_{\bar{K}} + N_0$. То обстоятельство, что $\bar{N}_K \neq \bar{N}_{\bar{K}}$, можно просто учесть, вводя химические потенциалы $\mu_K, \mu_{\bar{K}}$ и используя условия равновесия. Если $N_K = N_{\bar{K}}$, то $\mu_K = \mu_{\bar{K}}$. Далее, учитывая, что кинк-кинковое и антикинк-антикинковое взаимодействия суть отталкивание, а кинк-антикинковое - притяжение $\epsilon_{KK} = \epsilon_{\bar{K}\bar{K}} > 0$, $\epsilon_{K\bar{K}} < 0$, и учитывая, что $\bar{N}_K \ll N_0$, $\bar{N}_{\bar{K}} \ll N_0$, используя для H_0^{1} формулы типа /19/, можно попробовать написать эффективный гамильтониан такой трехкомпонентной системы; слагаемые с $\mu_K \neq \mu_{\bar{K}}$ при этом перенормируют ν, и в эффективный гамильтониан войдет некоторое c-число. Это сделать можно лишь приближенно. Однако, воспользовавшись результатами примесной задачи в модели Изинга[8,9], обобщенными на двухпримесный случай[10], возможно. В итоге мы придем к некоторому варианту модели решеточного газа с взаимодействием ближайших соседей ϵ_{ij} ($\epsilon_{KK}, \epsilon_{\bar{K}\bar{K}}, \epsilon_{K\bar{K}}$), быстро спадающим с расстоянием[11]. Параметры гамильтониана даются комбинациями μ_K, $\mu_{\bar{K}}$, ϵ_{ij}, $i,j = K,\bar{K}$.

В соответствии с этим мы можем сформулировать простейшее обобщение модели идеального решеточного газа.

Из-за отталкивания между одинаковыми частицами вероятнее "рядом" встретить кинк-антикинковые пары. Во всем остальном мы имеем картину газа "одинаковых" по своим макроскопическим проявлениям частиц. Учитывая взаимодействие лишь между ближайшими солитонами, мы можем согласно /11/ считать $\epsilon_{KK}=\epsilon_{\bar{K}\bar{K}}=8m^{-1/2}\times[E(m)+\frac{m-1}{2}K(m)]$, где $K(m)$, $E(m)$ - полные эллиптические интегралы первого и второго рода, $m=4\gamma^2(b^2+4\gamma^2)^{-1}$; $b=\Phi_k^{0\prime}(0)$; при $r\to\infty$ $\epsilon_{KK}=\epsilon_{\bar{K}\bar{K}}=-\epsilon_{K\bar{K}}\sim 32\exp(-r)$, при $r\to 0$ $\epsilon_{KK}=\epsilon_{\bar{K}\bar{K}}\sim\frac{2\pi^2}{r}$. Для $(K\bar{K})$ при $r\gtrsim\Delta$ возникает потенциальная яма, глубина которой равна массе покоя кинков /ссылку см. в /11//. С учетом этого можно следующим образом обобщить /19/:

$$H=E_0+\nu\sum_f n_f-\frac{E_k^\circ}{2}\sum_{f,g}n_f n_g\ , \qquad /24/$$

где суммирование ведется по ближайшим ячейкам. Одномерная система с гамильтонианом /36/ решается точно. Наряду с Z можно точно получить аналитические выражения для всех корреляционных функций $\langle n_f\rangle$, $\langle n_f n_g\rangle$, ... $\langle n_f\prod_i n_i\rangle$. В частности, поскольку у нас система с притяжением $(E_k^\circ>0)$, несомненный интерес представляют корреляционные функции, дающие вероятность образования кластеров из m кинков и m антикинков:

$$W(m,m)=\langle n_1 n_{\bar{2}}\ \dots n_{2m-1} n_{\overline{2m}}\rangle=\frac{\langle n_1 n_{\bar{2}}\rangle^m}{\langle n_f\rangle^{m-1}}, \qquad /25/$$

n_i означает, что в i-й ячейке находится кинк $n_{\bar{j}}$, в j - антикинк. Использовав точные выражения для $\langle n_f\rangle$, $\langle n_f n_g\rangle$ /9/, имеем при $\beta E_k^\circ\gg 1$

$$W(m,\bar{m})\simeq\bar{n}_s=\frac{1}{4}\frac{be^\sigma}{\sqrt{2\pi}d}(\beta E_K^\circ)^{1/2}e^{-\beta E_K^\circ}. \qquad /26/$$

Формулы /23/, /24/ могут быть использованы для анализа экспериментальных данных по рассеянию нейтронов квазиодномерными системами, динамические свойства которых при низких температурах можно смоделировать в рамках моделей SG и Φ^4 /о чем будет сказано ниже/.

3. Не так обстоит дело с динамическими свойствами подобных систем. А они весьма интересны. Ряд тонких черт их динамических свойств /центральный пик, особенности процессов переноса и т.п./ могут определяться откликом именно солитонов на внешнее воздействие. Это будет проявляться в особенностях поведения интенсивности рассеяния /нейтронов, света/ при квазиупругом рассеянии. При значительных передачах энергии системе не исключено возникновение возбужденных состояний солитонов. Весь этот

круг вопросов может быть проанализирован при исследовании поведения дважды дифференциального сечения рассеяния $\sigma_s(q,\omega)$. Необходим, следовательно, рецепт расчета динамического структурного фактора $S(q,\omega)$. Этому вопросу и будет посвящен данный раздел. При этом мы не будем использовать идею работы Кавасаки /12/. Впервые применительно к проблеме рассеяния нейтронов она была привлечена Микешкой /13/, а затем нами /14/. Однако мы реализуем эту идею здесь более простым способом. Это приводит к общей простой формуле /формула /38/ для $S(q,\omega)$ / и позволяет избежать громоздких промежуточных выкладов. Ниже это будет проиллюстрировано на примере нескольких моделей.

В газовом приближении сечение рассеяния $\sigma_s(q,\omega)$ при определенном предположении следующим образом выражается через $S(q,\omega)$:

$$\sigma_s(q,\omega) = b^2\frac{k'}{k}S(q,\omega) = b^2\frac{k'}{k}\bar{N}_s S_1(q,\omega), \quad q = k' - k, \quad \omega = E' - E; \qquad /27/$$

динамический формфактор рассеяния на отдельном рассеивателе есть фурье-образ $S_1(x,t)$, b – длина рассеяния. Согласно /12/ $S_1(x,t)$ строится на характеристиках солитона $\Phi(x,t\,|\,x_0,p)$, $\Phi(0,0\,|\,x_0,p)$ /см. ниже/, усредненных по всевозможным его положениям $x_0 \in (-L,L)$ и импульсам p /нам удобнее здесь "помещать" солитоны в "объем" $(-L,L)$ /.

Заметим, что для корреляционных функций, построенных на бионных решениях, необходимо усреднение по начальным фазам θ_0. Усреднение по θ_0 может оказаться необходимым и для определенных корреляторов, вычисляемых на решениях уравнения $S3$, но для кинков в этом нет необходимости. Для $S_1(x,t)$ имеем

$$S_1(x,t) = \frac{1}{Z_1 h}\int_{-L}^{L} dx_0 \int dp\, \Phi(x,t\,|\,x_0 p)\,\Phi(0,0\,|\,x_0 p)\, e^{-\beta E(p)},$$

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_{-L}^{L} dx_0 \int dp\, e^{-\beta E(p)} = \frac{2L}{h}\int dp\, e^{-\beta E(p)}. \qquad /28/$$

Статистическая сумма отдельного рассеивателя Z_1 рассчитывается в той или иной модели на базе соответствующего гамильтониана с помощью конкретных солитонных решений /см. ниже/, при этом

$$S_1(q,\omega) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint dx\,dt\, S_1(x,t)\, e^{i(qx-\omega t)} =$$

$$= \frac{1}{Z_1 h}\int_{-L}^{L} dx_0 \int dp\, e^{-\beta E(p)}\, \Sigma(q,\omega\,|\,x_0 p), \qquad /29/$$

$$\Sigma(q,\omega\,|\,x_0,p) = \frac{1}{(2\pi)^2}\iint dx\,dt\, \Phi(x,t\,|\,x_0,p)\,\Phi(0,0\,|\,x_0 p)\, e^{i(qx-\omega t)}.$$

в[12], а затем и в[13,14], вначале проводится интегрирование по (x_0,p) и с помощью /28/ находится $S_1(x,t)$. Потом вычисляется $S_1(q,\omega)$ по формуле /29/ /в[12] этого не делалось/. Удобнее поступить наоборот: вначале получить выражение для $\Sigma(q,\omega|x_0,p)$ из /29/, решив задачу рассеяния на солитоне, а затем провести усреднение по всем начальным его положениям x_0 и импульсам p. Обусловлено это, конечно, специфической зависимостью Φ от $(x-vt)$:

$$\Phi(x,t|x_0,p)=\Phi\left(\frac{x-vt+x_0}{\Delta}\right). \qquad /30/$$

В /30/ $\Delta=\Delta(v)$, вообще говоря, зависящая от скорости v ширина солитона /для медленных $v\ll C_0$ солитонов эта зависимость несущественна/. Делая в /30/ замену переменных $(x+x_0)=\xi\cdot\Delta$, $vt=\tau\cdot\Delta$, имеем с учетом /30/

$$\Sigma(q,\omega|x_0,p)=\frac{\Phi(\frac{x_0}{\Delta})}{(2\pi)^2}\frac{\Delta^2}{v}e^{-iqx_0}\int d\xi d\tau\Phi(\xi-\tau)e^{i\Delta(q\xi-\frac{\omega\tau}{v})}. \qquad /31/$$

Переходя далее в /31/ к естественным переменным $R=\dfrac{\xi+\tau}{2}$, $\rho=\xi-\tau$, имеем

$$\Sigma(q,\omega|x_0,p)=\frac{\Phi(\frac{x_0}{\Delta})}{(2\pi)^2}e^{-iqx_0}\iint dR\,d\rho\,\Phi(\rho)\times$$

$$\times\exp\left[iR\left(q\Delta-\frac{\omega\Delta}{v}\right)+i\rho\left(\frac{q\Delta}{2}+\frac{\omega\Delta}{2}\right)\right]= \qquad /32/$$

$$=\Phi\left(\frac{x_0}{\Delta}\right)\frac{\Delta}{2\pi q}e^{-iqx_0}f(q\cdot\Delta)\,\delta(v-v_0),\qquad v_0=\frac{\omega}{q}.$$

Мы воспользовались известной формулой $\delta(\phi(x))=\sum\limits_s\dfrac{\delta(x-x_s)}{|\phi'(x_s)|}$, где x_s - корень уравнения $\phi(x)=0$, и ввели

$$f(\lambda)=\int\Phi(\rho)\exp(i\lambda\rho)d\rho. \qquad /33/$$

Интегрирование по $p(v)$ и x_0 становится тривиальным:

$$\int\Phi\left(\frac{x_0}{\Delta}\right)e^{-iqx_0}dx_0=\Delta(v_0)f(-q\Delta(v_0)),$$
$$\int e^{-\beta E(p)}dp=p'(v_0)e^{-\beta E(v_0)} \qquad /34/$$

/мы учли, что $L\to\infty$/. Собирая /29/, /32/, /34/, имеем окончательно для $S_1(q,\omega)$

$$S_1(q,\omega)=\frac{p'(v_0)\Delta^2(v_0)}{Z_1 h 2\pi q}f(-q\Delta(v_0))f(q\Delta(v_0))e^{-\beta E(v_0)}. \qquad /35/$$

Для газа солитонов

$$S(q,\omega)=\bar{N}_s S_1(q,\omega). \qquad /36/$$

Физическая величина, фигурирующая в соответствующей автокорреляционной функции всей системы, как правило /см. ниже/, записывается в виде

$$\phi(x,t)=\Phi_0-\Phi(x,t\,|\,x_0,p), \quad \Phi_0=\mathrm{const}. \qquad /37/$$

/Конечно, на очереди и изучение динамических характеристик в моделях с учетом корреляции между солитонной и несолитонной подсистемами, когда $\Phi_0=\Phi_0(x,t)$ /. В таком случае, поскольку

$$\phi(x,t)\phi(0,0)=\Phi_0^2-\Phi_0\,[\Phi(x,t\,|\,x_0 p)+$$

$$+\Phi(0,0\,|\,x_0 p)]+\Phi(x,t\,|\,x_0 p)\Phi(0,0\,|\,x_0 p),$$

мы имеем для динамических структурного фактора

$$S(q,\omega)=[\Phi_0^2-2\bar{n}_s\Lambda\cdot\Phi_0]\delta(q)\delta(\omega)+\bar{N}_s S_1(q,\omega). \qquad /38/$$

Таким образом, учет рассеяния на солитонах имеет своим следствием перераспределение интенсивности брэгговского пика в квазиупругую компоненту, даваемую формулами /35/, /36/.

Отметим в заключение этого раздела, что и равновесные, и динамические свойства газа солитонов мы, как и в /3,4,6/ описывали в пространстве импульсов и координат. В первой работе, посвященной этому вопросу /7/, рассматривался "максвелловский газ" солитонов, что приводило к некоторой неопределенности в нормировке Z_1, но не отражалось, впрочем, на конкретном виде динамического формфактора.

4. А. Системы, описываемые уравнением Sin-Gordon. Мы проиллюстрируем использование общих формул /29/, /33/, /35/, /36/ на примере вычисления $S(q,w)$ для "параллельного" отклика системы, описываемого корреляционной функцией $\langle\cos\phi(x,t|x_0)\cos\phi(0,0\,|\,x_0)\rangle$. Солитонная часть здесь дается согласно /16/ усреднением произведения

$$4\,\mathrm{sech}^2\Big(\frac{x-vt-x_0}{\Delta(v)}\Big)\mathrm{sech}^2\Big(\frac{-x_0}{\Delta(v)}\Big), \quad \Delta^{-1}(v)=\gamma(v)\mu, \quad \mu=\frac{1}{d}.$$

Для $f(\lambda)$ имеем из /33/

$$f(\lambda)=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\lambda\rho}}{\cosh^2\rho}d\rho=\frac{4\lambda\pi}{\sinh\frac{\lambda\pi}{2}};$$

$$f(q\Delta(v_0))=f(-q\Delta(v_0))=\frac{4\pi q}{\mu\gamma(v_0)}\left[\sinh\frac{\pi q}{2\mu\gamma(v_0)}\right]^{-1},\quad \gamma(v_0)=\left(1-\frac{\omega^2}{q^2c_0^2}\right)^{-1/2} \qquad /39/$$

Далее, поскольку

$$p(v)=M_k v\gamma(v),\qquad E(v)=E_k^\circ\gamma(v),$$

где $E_k^\circ=8\mu$, $M_k=8\mu c_0^{-2}$, в данном конкретном случае уравнения /16/ величина A, фигурирующая в гамильтониане /1.2/ есть $c_0^{-2}(d=c_0/\omega_0=\mu^{-1},\ \gamma(v_0)=\gamma_0)$, то имеем

$$E(v_0)=E_k^\circ\gamma_0,\quad p'(v_0)=M_k\,\gamma_0^3. \qquad /40/$$

Наконец, Z_1 из /29/ дается формулой

$$Z_1=\frac{2L}{h}\int e^{-\beta E(p)}dp=\frac{4LE_k^\circ}{c_0h}K_1(\beta E_k^\circ), \qquad /41/$$

где $K_1(k)$ – уже упоминавшаяся выше функция Макдональда. Собирая /39/-/41/, имеем для $S_1(q,\omega)$ /35/ выражение

$$S_1(q,\omega)=\frac{8\gamma_0}{L\mu^2c_0\pi q}\left[\frac{\frac{\pi q}{2\mu\gamma_0}}{\sinh\frac{\pi q}{2\mu\gamma_0}}\right]^2\frac{e^{-\beta\gamma_0E_k^\circ}}{K_1(\beta E_k^\circ)}. \qquad /42/$$

Для $S(q,\omega)$ имеем по /36/

$$S(q,\omega)=\frac{16\bar{n}_s\gamma_0}{\mu^2\,c_0\pi q}\left[\frac{\frac{\pi q}{2\mu\gamma_0}}{\sinh\frac{\pi q}{2\mu\gamma_0}}\right]^2\frac{e^{-\beta\gamma_0E_k^\circ}}{K_1(\beta E_k^\circ)}, \qquad /43/$$

где $\bar{n}_s$ дается формулой /23/. В "нерелятивистском" пределе $\gamma_0\simeq 1+\omega^2/2q^2c_0^2$; и, предполагая, что $\beta E_k^\circ\gg 1$, мы можем воспользоваться асимптотикой $K_1(z)$ /см. /20 //; формула /43/ переходит в результат Микешки /13/. Так же несложно рассчитываются и другие функции отклика.

Заметим, что при практическом использовании формул типа /43/ для анализа экспериментальных данных необходимо четко фиксировать выбор системы единиц. Это может изменить численный коэффициент в /43/ /см., например, /15/ /. Нам представляется, что наряду с уже экспериментально исследованными системами $CsNiF_3$ и (TMMC) $(CH_3)_4NMnCl_3$, где с большой вероятностью выделен вклад солитонной моды в интенсивность квазиупругого рассеяния, к подобного рода квазиодномерным системам можно отнести и кристалл $RbFeCl_3$ /его параметры J , A приведены в /16/ /.

Б. Квазиодномерный изотропный гейзенберговский магнетик /17/. Можно показать, что шредингеровская амплитуда изотропного гейзенберговского магнетика с $S\geq 1$ удовлетворяет уравнению /4/. Выше было получено уравнение /33/ для шредингеровских амплитуд $\phi(x,t)$ и показано, что в хорошем приближении энергия солитона дается "нерелятивистской" формулой

$$E_s = \epsilon + \frac{p^2}{2m_s} = \epsilon + \frac{m_s v^2}{2}.$$

Воспользовавшись выражением /9/ для волновой функции системы, имеем для квантовомеханического среднего проекции спина в узле j на ось z выражение

$$\langle\psi(t)|S_i^z|\psi(t)\rangle = S - |\phi_j(t)|^2 \to S - |\phi(x,t)|^2 =$$
$$= S - [2\Delta\cosh^2(\frac{x - vt - x_0}{\Delta})]^{-1}. \qquad /44/$$

Заметим, что к "нерелятивистской" формуле для E_s и зависимости той или иной характеристики системы вида /44/ мы приходим во многих моделях, сводимых в континуальном пределе к уравнению (S3). Здесь, к сожалению, не разработан вопрос феноменологического учета перенормировки ϵ эффектами взаимодействия с фононами. Метод трансфер-матрицы здесь не работает. По этой причине более или менее оправданным является использование $\bar{n}_s$ в "нулевом" приближении с эффективным гамильтонианом /21/. Но способ расчета $S_1(q,\omega)$, изложенный в разделе, вполне применим. В данном конкретном случае нас интересует автокорреляционная функция

$$\langle|\phi(x,t)|^2\,|\phi(0,0)|^2\rangle,$$

где

$$\Phi(x,t|x_0) = [2\Delta\,\mathrm{ch}^2\frac{x - vt - x_0}{\Delta}]^{-1}$$

усреднение по фазе $\theta_0 (\equiv \frac{1}{2\pi}\int d\theta_0 \langle\ldots\rangle \stackrel{*}{=} 1)$, поскольку решения уравнения входят по модулю. По /33/ имеем для $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\Delta}\int\frac{e^{i\lambda\rho}}{\mathrm{ch}^2\rho}d\lambda = \frac{1}{\Delta}\,\frac{\lambda\pi}{\mathrm{sh}\,\frac{\lambda\pi}{2}};$$
$$f(q\Delta) = f(-q\Delta) = \frac{\pi q}{\sinh\frac{\pi q\Delta}{2}}. \qquad /45/$$

Далее,

$$E(v_0) = \epsilon + \frac{m_s}{2}(\frac{\omega}{q})^2, \qquad p'(v_0) = m_s, \qquad /46/$$

Z_1 здесь дается простой формулой:

$$Z_1 = \frac{2L}{h}\int e^{-\beta(\epsilon + \frac{p^2}{2m_s})}\,dp = \frac{2L}{h}(2\pi m_s\theta)^{1/2}e^{-\beta\epsilon}. \qquad /47/$$

Выражения /45/-/47/ дают для $S_1(q,\omega)$

$$S_1(q,\omega)=\frac{m_s}{\pi q}\left(\frac{\frac{\pi q\Delta}{2}}{\sinh\frac{\pi q\Delta}{2}}\right)^2\frac{e^{-\beta\frac{m_s}{2}\left(\frac{\omega}{q}\right)^2}}{L(2\pi m\,\theta)^{1/2}},\qquad /48/$$

а $S(q,\omega)$ по /36/ имеет вид

$$S(q,\omega)=\bar{N}_s S_1(q,\omega)=\bar{n}_s\frac{2m_s}{\pi q}\left(\frac{\frac{\pi q\Delta}{2}}{\sinh\frac{\pi q\Delta}{2}}\right)^2\frac{e^{-\beta\frac{m_s}{2}\left(\frac{\omega}{q}\right)^2}}{(2\pi m_s\theta)^{1/2}},\qquad /49/$$

весьма напоминающий "нерелятивистский" предел формулы /43/. Ширина квазиупругой компоненты здесь, как и в SG, по энергии $\Delta\omega\simeq q\left(\frac{8\theta}{m_s}\right)^{1/2}$ при волновых векторах $q\lesssim 4/\pi\Delta$. Энергетическая ширина квазиупругой компоненты, таким образом, $\sim\sqrt{\theta}$, интегральная интенсивность $S_1(q)=\int S_1(q,\omega)d\omega$ экспоненциально зависит от T и магнитного поля B /это связано с "нулевой" аппроксимацией для $\bar{n}_s$; наиболее интенсивное рассеяние происходит при малых передачах импульса/.

Согласно[16] существует одномерная ферромагнитная структура, адекватно описываемая гамильтонианом Гейзенберга с $S=1$: кристалл $[(CH_3)_4N][NiCl_3]$ в интервале температур $1{,}6\ K<T<79K$/!/. "Подгоночным" параметром в интерпретации экспериментов по рассеянию нейтронов является неизвестный параметр $J_1=-\frac{\partial J}{\partial x}\Big|_{a_0}>0$; все остальные параметры приведены в[16].

В. Одномерный анизотропный ферромагнетик типа "легкая ось". Обсудим динамику одномерных магнетиков с анизотропией типа "легкая ось", свойства которых моделируются следующим уравнением:

$$hS_t=J[\vec{S}\times\vec{S}_{\xi\xi}]+A[\vec{S}\times\vec{n}]\cdot(\vec{S}\cdot\vec{n}),\qquad /50/$$

$\vec{n}$ - единичный вектор вдоль оси, J - обменный интеграл ($J>0$), A - константа анизотропии ($A>0$). Мы не учитываем взаимодействие с колебаниями решетки /хотя это и можно сделать/. В этом смысле частицеподобные возбуждения, описываемые солитонными решениями уравнения /50/, являются "чисто магнитными" солитонами. Рассчитаем их вклад в динамический структурный фактор ферромагнетика.

Выбирая за ось $0z$ ось анизотропии $\vec{n}$, можно записать односолитонное решение /50/ в виде[18]:

$$S^z(\xi,t)=S\left[1-2\frac{\sinh^2\frac{n}{n_0}+\sin^2\frac{\pi p}{2p_0}}{\cosh^2\frac{\xi-vt-x_0}{\Delta n}+\sinh^2\frac{n}{n_0}}\right].\qquad /51/$$

Здесь интегралы движения n и p трактуются как число магнонов, связанных в солитонной волне ($n > 1$), и квазиимпульс этой волны соответственно,

$$p_0 = \frac{2\pi\hbar S}{a_0}, \qquad n_0 = 4S\sqrt{\frac{J}{A}},$$

$$\Delta_n^{-1} = a_0^{-1}\sqrt{\frac{A}{J}} \tanh \frac{n}{n_0}\left[1 + \frac{\sin^2\frac{\pi p}{2p_0}}{\sinh^2\frac{n}{n_0}}\right], \qquad /52/$$

a_0 - постоянная решетки, p_0 - предельный импульс ($-p_0 \le p \le p_0$). Энергия волны /51/ дается формулой

$$E(p,n) = \frac{4JS^2 a_0}{\Delta} = 4\sqrt{AJ}\tanh\left[\frac{n}{n_0}S^2\left(1 + \frac{\sin^2\frac{\pi p}{2p_0}}{\sinh^2\frac{n}{n_0}}\right)\right] =$$

$$= \epsilon_n + \frac{8S^2\hbar^2}{a_0^2 m_n^*}\sin^2\frac{p\pi}{2p_0}, \quad \epsilon_n = 4S^2\sqrt{AJ}\tanh n/n_0, \qquad /53/$$

$$m_n^* = \frac{n_0 m_0^*}{2}\sinh\frac{2n}{n_0}, \qquad m_0^* = \frac{\hbar^2}{2SJa_0^2},$$

налицо существенно нелинейная связь E и p. Система, описываемая гамильтонианом /50/, является полностью интегрируемой, и разделение на "кинетическую" и "потенциальную" энергию возможно в переменных действие-угол.

При малых p ($|p| \ll p_0$)

$$E(p,n) = \epsilon_n + \frac{m_m^* v}{2}, \qquad p = m_n^* v, \qquad /54/$$

и m_n^* можно трактовать как массу связанного состояния n магнонов с массой $m_0^* = \hbar^2/2JSa_0^2$. Заметим, что, анализируя поведение /51/, можно заключить, что при $n \gg n_0$ $\bar{\Delta}_n \simeq a_0\sqrt{\frac{J}{A}}\,\frac{n}{n_0}$, а при $n \le n_0$ $\bar{\Delta}_n \simeq \Delta_n$, где $\bar{\Delta}_n$ - "истинная" ширина магнитного солитона. В [19] был рассчитан $S(q,\omega)$ при $|p| \ll p_0$. Подход, предложенный выше, позволяет снять это ограничение.

В данном случае

$$f(\lambda) = 2S\left(\sinh^2\frac{n}{n_0} + \sin^2\frac{\pi p}{2p_0}\right)\int\frac{e^{i\lambda\rho}\,d\rho}{\sinh^2\frac{n}{n_0} + \cosh^2\rho} = \qquad /55/$$

$$= 4S\left[\sinh^2\frac{n}{n_0} + \sin^2\frac{\pi p}{2p_0}\right]\frac{\pi}{\sinh\lambda\pi/2}\,\frac{\sin\left[\frac{\lambda}{2}\operatorname{arcch}\frac{2n}{n_0}\right]}{\sinh^2 n/n_0},$$

причем E и Δ даются /52/, /54/:

$$f(q\Delta(v_0)) = f(-q\Delta(v_0)) = 4\pi S(\sinh^2\frac{n}{n_0} + \sin^2\frac{\pi m_n^*\omega}{2p_0q});$$

$$\Delta_n^{-1}(v_0) = \sqrt{\frac{A}{J}}\,a_0^{-1}\tanh\frac{n}{n_0}\left[1 + \frac{\sin^2(\frac{\pi m_n^*\omega}{2p_0q})}{\sinh^2\frac{n}{n_0}}\right], \quad p'(v_0) = m_n^*; \qquad /56/$$

$$E(v_0) = 4S^2\sqrt{AJ}\left[\tanh\frac{n}{n_0} + 2\frac{\sin^2\frac{m_n^*\pi\omega}{2p_0q}}{\sinh^2\frac{2n}{n_0}}\right] =$$

$$= \epsilon_n + \frac{8S^2\hbar^2}{a_0^2m_n^*}\sin^2\frac{\pi m_n^*\omega}{2p_0q}.$$

В данном случае Z_1 вычисляется точно: действительно

$$Z_1 = \frac{2L}{h}e^{-\beta\epsilon_n}\int_{-p_0}^{p_0} e^{-\beta\frac{8S^2\hbar^2}{m_n^*a_0^2}\sin^2\frac{\pi p}{2p_0}}dp, \qquad /57/$$

и, поскольку

$$\int_{-p_0}^{p_0} e^{-a\sin^2\frac{\pi p}{2p_0}}dp = \frac{4p_0}{\pi}\int_0^{\pi/2} e^{-a\sin^2 x}dx = 2p_0e^{-\frac{a}{2}}I_0(\frac{a}{2}),$$

имеем для Z_1 следующее выражение:

$$Z_1 = \frac{4L}{h}p_0\exp\left[-4\beta(\sqrt{AJ}\,\mathrm{th}\frac{n}{n_0} + \frac{\hbar^2}{m_n^*a_0^2})S^2\right]I_0\left(\frac{4\beta S^2\hbar^2}{m_n^*a_0^2}\right). \qquad /58/$$

Собирая /56/ и /58/, имеем после некоторых преобразований для $S_1(q,\omega)$:

$$S_1(q,\omega) = A^{-1}\sqrt{\frac{J}{A}}\frac{p_0a_0^2}{4\pi Lq}\left(\frac{\sinh\frac{2n}{n_0}}{\sinh\frac{q\Delta(v_0)}{2}}\right)^2\times$$

$$\times\frac{\exp[-a\sin^2\frac{\pi m_n^*\omega}{2p_0q})}{\exp(-\frac{a}{2})I_0(\frac{a}{2})}, \quad a = \frac{8\beta S^2\hbar^2}{m_n^*a_0^2}, \qquad /59/$$

и для

$$S(q,\omega) = \bar{n}_s A^{-1}\sqrt{\frac{J}{A}}\frac{p_0a_0^2}{2\pi q}\left(\frac{\mathrm{sh}\frac{2n}{n_0}}{\mathrm{sh}\frac{q\Delta(v_0)}{2}}\right)^2\frac{e^{-a\sin^2\frac{\pi m_n^*\omega}{2p_0q}}}{e^{-a/2}I_0(\frac{a}{2})}. \qquad /60/$$

Здесь $\bar{n}_s$ дается нулевым приближением /мы с самого начала исключили фононную подсистему/. Если предположить, что $\pi\omega m_n^* \ll 2p_0 q$ и $a \gg 1$, мы приходим к интенсивности квазиупругой компоненты гауссовского типа. Поскольку $a = 8\beta \frac{S^2\sqrt{\overleftrightarrow{AJ}}}{\mathrm{sh}\,\frac{2n}{n_0}}$, это означает, что $n \lesssim n_0$, и для "массивных" солитонов этого делать нельзя: налицо ситуация, весьма отличная от разобранной в /19/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Scott A.C., Chu E.Y.F., McLanghlon D.W. Proc. CEEE, 1973, vol.61, p.1443-1483.
2. Makhankov V.G. Phys.Rep., 1978, vol.35, 1, p.1-128.
3. Bishop A.R., Krumhansl L.A., Trullinger S.E. Physica, 1980, D1, p.1-44.
4. Currie I.F. et al. Phys.Rev.B, 1980, vol.22, No.2, p.477-496.
5. Хилл Т. Статистическая механика. ИЛ, М., 1960.
6. Schneider T., Stoll E. Phys.Rev., 1980, B22, No.11, p.5317-5338.
7. Krumhansl I.A., Schrieffer I.R. Phys.Rev.B, 1975, 11, p.3535.
8. Тябликов С.В., Федянин В.К. ФММ, 1967, т.23, №2.
9. Федянин В.К. В сб.: Статистическая физика и квантовая теория поля. Физматгиз, М., 1973, с.241-260.
10. Товбин Ю.К., Федянин В.К. ФТТ, 1980, т.22, 66, с.1599.
11. Gupta N., Sutherland B. Phys.Rev., 1976, A15, p.1790.
12. Kawasaki K. Progr.Theor.Phys., 1976, 55, p.2029.
13. Mikeska A.I. J.Phys., 1978, C11, p.L29.
14. Федянин В.К., Юшанхай В.Ю. ОИЯИ, Р17-12896, Дубна, 1979.
15. Timonen J., Bulough R.. Phys.Lett., 1981, vol.82A, 4, p.183.
16. Steiner M., Villain J., Windsor C.C. Adv.Phys., 1976, vol.25, No.2, p.87-209.
17. Федянин В.К , Юшанхай В.Ю. Phys.Lett, 1981, vol.85A, 2, p.100.
18. Косевич А.М., Иванов В.А., Ковалев А.С. В кн.: Нелинейные волны. "Наука", М., 1979, с.45-61.
19. Федянин В.К., Юшанхай В.Ю. ФНТ, 1981, т.7, №2, с.176.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 апреля 1982 года.