сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-81-98

В.К.Струков, В.К.Федянин

КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ С ЛАГРАНЖИАНОМ $L(x, \Psi, \Psi_x, \ldots)$ В N-МЕРНОМ X-ПРОСТРАНСТВЕ

1981

Основной целью данной заметки, носящей в основном методический характер, является обобщение известных теорем Э.Неттер на лагранжианы, зависящие от высших производных полевых функций в N-мерном пространстве координат.

В качестве примеров, когда это имеет место, можно указать: а/ теорию перенормировок в квантовой теории поля с использованием контрчленов [1], б/ теорию калибровочных полей [2], в/ ряд задач теории упругости [3].

Для I теоремы Неттер удалось обобщить результаты работы [3]. При обобщении II теоремы анализировалась инвариантность относительно R-параметрического градиентного преобразования с параметрами, зависящими от ψ и x, и получены выражения для соответствующих токов. При этом выведены соотношения, следующие как из условий, налагаемых требованием инвариантности уравнений непрерывности и пр., так и из некоторых менее тривиальных и очевидных.

В качестве иллюстрации рассмотрены некоторые конкретные группы преобразований /группа трансляций, лоренцевские и изотопические вращения/, для которых получены соответствующие динамические инварианты. В псевдоэвклидовом варианте все результаты переходят в хорошо известные [1].

1. Определения:

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^N),\ N < \infty ; \qquad D_j = \frac{d}{dx_j} ;$$

$$\psi = (\psi^1, \dots, \psi^n), \quad n < \infty ; \qquad d^N x = \prod_{i=1}^{N} dx^i ;$$

$$\delta_k^\ell = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & k \neq \ell . \end{cases}$$

По повторяющимся индексам - суммирование.

$$\frac{d^h \psi}{dx^h} = (\psi^{k\gamma_1(h)\dots\gamma_h(h)}_{j_1\dots j_h}), \quad \psi^{k\gamma_1(h)\dots\gamma_h(h)}_{j_1\dots j_h} = \prod_{i=1}^{h} D_{j_i}^{\gamma_i(h)} \psi^k, \quad \sum_{i=1}^{h} \gamma_i(h) = h.$$

Набор таких $\gamma_i(h)$ /свой для каждого фиксированного $h \in [1,m]$/, имеющих место в $\mathcal{L}$, обозначим $(\gamma(h))$. Ниже будем опускать аргумент $y\gamma$. $\forall\, \mathcal{G} \subset R^N$ - действие поля ψ, локализованного в $\mathcal{G}$, определяется интегралом:

$$S(\mathcal{G}) = \int\limits_{(\mathcal{G})} \mathcal{L}\, d^N x.$$

2. ОБЩИЙ ВИД ВАРИАЦИИ ДЕЙСТВИЯ

Пусть задано преобразование:

$$x'^j = x^j + \delta x^j,$$

$$\psi'^k(x') = \psi^k(x) + \delta\psi^k(x).$$

Определим вариацию формы

$$\bar{\delta}\psi^k(x) = \psi'^k(x) - \psi^k(x),$$

связанную с полной вариацией, так:

$$\bar{\delta}\psi^k(x) = \delta\psi^k(x) - D_j(\psi^k)\cdot\delta x^j.$$

Заметим, что операции $\bar{\delta}$ и D коммутируют. Варьируем действие:

$$\delta S(\mathcal{G}) = \int\limits_{(\mathcal{G})} \delta\mathcal{L}\, d^N x + \int \mathcal{L}\delta(d^N x).$$

Учитывая, что:

$$\delta(d^N x) = D_j(\delta x^j)\cdot d^N x,$$

$$\delta\mathcal{L} = \bar{\delta}\mathcal{L} + D_j(\mathcal{L})\cdot\delta x^j,$$

найдем:

$$\delta S(\mathcal{G}) = \int\limits_{(\mathcal{G})} [\bar{\delta}\mathcal{L} + D_j(\mathcal{L}\,\delta x^j)]\, d^N x. \qquad /1/$$

Далее находим:

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\psi^{k\gamma_1\cdots\gamma_\ell}_{j_1\cdots j_\ell})}\bar{\delta}(\psi^{k\gamma_1\cdots\gamma_\ell}_{j_1\cdots j_\ell}) =$$

$$= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\psi^{k\gamma_1\cdots\gamma_\ell}_{j_1\cdots j_\ell})}\prod_{i=1}^{\ell} D^{\gamma_i}_{j_i}(\bar{\delta}\psi^k).$$

Удобно ввести:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi^{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell}_{j_1 \cdots j_\ell})} = \mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell},$$

тогда

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k}\bar{\delta}\psi^k + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)} \mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} D^{\gamma_i}_{j_i}(\bar{\delta}\psi^k).$$

Вместе с тем имеем по определению функциональной производной:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k} = \frac{\delta S}{\delta \psi^k} - \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)} (-1)^{\ell} \prod_{i=1}^{\ell} D^{\gamma_i}_{j_i}(\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell}),$$

тогда, комбинируя полученные равенства:

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\delta S}{\delta \psi^k}\bar{\delta}\psi^k + \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)} [\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} D^{\gamma_i}_{j_i}(\bar{\delta}\psi^k) - $$

$$- (-1)^{\ell} \prod_{i=1}^{\ell} D^{\gamma_i}_{j_i}(\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell}) \cdot (\bar{\delta}\psi^k)]. \qquad /2/$$

Воспользовавшись тождеством:

$$fD^{\gamma}(\phi) = \sum_{n=1}^{\zeta} (-1)^{(n-1)} D[D^{(n-1)}(f) \cdot D^{(\gamma-n)}(\phi)] +$$

$$+ (-1)^{\zeta} D^{\xi}(f) \cdot D^{(\gamma-\xi)}(\phi),$$

$$\zeta \leq \gamma,$$

получим:

$$\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} D^{\gamma_i}_{j_j}(\bar{\delta}\psi^k) = \sum_{\nu=1}^{\mu} D_{j_\nu}\{(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_\lambda} \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu} (-1)^{(n_\nu-1)} \times$$

$$\times [(D^{(n_\nu-1)}_{j_\nu} \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D^{\gamma_s}_{j_s})(\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell})] \cdot [(D^{(\gamma_\nu-n_\nu)}_{j_\nu} \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D^{\gamma_p}_{j_p})(\bar{\delta}\psi^k)]\} +$$

$$+ (-1)^{\sum_{\lambda=1}^{\mu}\gamma_\lambda} [(\prod_{s=1}^{\mu} D^{\gamma_s}_{j_s})(\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\ell})] \cdot [(\prod_{p=(\mu+1)}^{\ell} D^{\gamma_p}_{j_p})(\bar{\delta}\psi^k)],$$

где "нелепости" понимаются так:

$$\sum_{\lambda=1}^{0} \gamma_\lambda = 0; \quad \prod_{p=(\ell+1)}^{\ell} D_{j_s}^{\gamma_p} = 1; \quad \prod_{s=1}^{0} D_{j_s}^{\gamma_s} = 1 .$$

Полагая в полученном соотношении $\mu = \ell$, получаем квадратную скобку из /2/ в виде

$$\mathcal{L}_{k\gamma_1\ldots\gamma_\ell}^{j_1\ldots j_\ell} \prod_{i=1}^{\ell} D_{j_i}^{\gamma_i}(\bar{\delta}\psi^k) - (-1)^\ell \prod_{i=1}^{\ell} D_{j_i}^{\gamma_i}(\mathcal{L}_{k\gamma_1\ldots\gamma_\ell}^{j_1\ldots j_\ell}) \cdot (\bar{\delta}\psi^k) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\ell} D_{j_\nu}\{(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_\lambda} \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu} (-1)^{(n_\nu-1)} [(D_{j_\nu}^{(n_\nu-1)} \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_s}^{\gamma_s})(\mathcal{L}_{k\gamma_1\ldots\gamma_\ell}^{j_1\ldots j_\ell})] \times$$

$$\times [(D_{j_\nu}^{(\gamma_\nu-n_\nu)} \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D_{j_p}^{\gamma_p})(\bar{\delta}\psi^k)]\} ,$$

тогда

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\delta S}{\delta\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1}^{\ell} D_{j_\nu}\bar{\Delta}(j\ ,\nu,\ \ell\ ),$$

где

$$\bar{\Delta}(j_\nu,\ \nu,\ell) = (-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_\lambda} \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu} (-1)^{(n_\nu-1)} [(D_{j_\nu}^{(n_\nu-1)} \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_s}^{\gamma_s})(\mathcal{L}_{k\gamma_1\ldots\gamma_\nu\ldots\gamma_\ell}^{j_1\ldots j_\nu\ldots j_\ell})] \times$$

$$\times [(D_{j_\nu}^{(\gamma_\nu-n_\nu)} \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D_{j_p}^{\gamma_p})(\bar{\delta}\psi^k)] .$$

В этом выражении по j_ν в квадратных скобках нет суммирования, по всем остальным - есть: от 1 до N. В полученном выражении для $\bar{\delta}\mathcal{L}$ просуммируем сначала по j_ν /все суммы конечны, и порядок суммирования изменять можно/:

$$\bar{\delta}\mathcal{L} = \frac{\delta S}{\delta\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + D_1 \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1}^{\ell} \bar{\Delta}(1,\nu,\ell) + \ldots +$$

$$+ D_N \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1}^{\ell} \bar{\Delta}(N,\nu,\ \ell) = \frac{\delta S}{\delta\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + D_j\bar{\Delta}^j,$$

$\bar{\Delta}^j = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1}^{\ell} \bar{\Delta}(j,\nu,\ell)$, тогда полная вариация действия принимает вид

$$\delta S(\mathcal{G}) = \int_{(\mathcal{G})} [\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + D_j(\bar{\Delta}^j + \mathcal{L}\delta x^j)] d^N x . \qquad /3/$$

3. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть $S(\mathcal{G})$ инвариантно /стационарно/ относительно преобразования

$$x'^j = x^j + \delta x^j ,$$

$$\psi'^k(x') = \psi^k(x) + \delta\psi^k(x) ; \qquad \mathcal{G} \in R^N,$$

тогда имеет место

$$\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\bar{\delta}\psi^k + D_j(\bar{\Delta}^j + \mathcal{L}\delta x^j) = 0 \; * . \qquad /4/$$

Доказательство очевидно из предыдущего.

Во-первых, отметим, что /4/ - сильное равенство, т.к. уравнения движения не использовались еще ни на каком этапе рассмотрения.

Эта теорема имеет самый общий характер, поскольку не конкретизировались ни вид, ни какие-либо специальные свойства преобразований /типа групповых и пр./.

Дальнейшее рассмотрение должно идти по пути конкретизации преобразований. Мы начнем /в духе 2-ой теоремы Э.Нетер/ рассматривать R-параметрические преобразования с параметрами, зависящими от ψ и x. Мы не будем брать самый общий случай, а рассмотрим наиболее важное в физическом смысле обобщенное градиентное преобразование.

4. ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЯНГА-МИЛЛСА

Оно определяется так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\delta}_r \psi^k(x) = \alpha^k_r \epsilon(x) + \beta^{kj}_r D_j \epsilon(x) , \\ \delta_r x^i = \gamma^i_r \epsilon(x) + \phi^{ij}_r D_j \epsilon(x) , \\ \qquad 1 \le r \le R , \\ \qquad\quad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \phi \end{array} \right. \qquad /5/$$

зависят от ψ и x.

---

* Опущен член "типа дивергенции".

Обычное преобразование получается отсюда:

$$R = 1, \quad \alpha^k = i\psi^k, \quad \gamma = 0, \quad \phi = 0, \quad \beta = 0 .$$

Подставляя /5/ в /4/, найдем:

$$\frac{\delta S}{\delta\psi^k}(\alpha^k_r \epsilon + \beta^{k\ell}_r D_\ell \epsilon) + D_j(\bar\Lambda^j_r + \mathfrak{L}\delta_r x^j) = 0 .$$

Заметим:

$$D_\ell\left(\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\beta^{k\ell}_r \epsilon\right) = D_\ell\left(\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\beta^{k\ell}_r\right)\cdot\epsilon + \frac{\delta S}{\delta\psi^k}\beta^{k\ell}_r (D_\ell \epsilon),$$

тогда:

$$\left[\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\alpha^k_r - D_j\left(\frac{\delta S}{\delta\psi^p}\beta^{pj}_r\right)\right]\epsilon = -D_j\left(\bar\Lambda^j_r + \mathfrak{L}\delta_r x^j + \frac{\delta S}{\delta\psi^p}\beta^{pj}_r \epsilon\right). \qquad /6/$$

Пусть $\epsilon(x)$ зануляется вместе со всеми своими производными на границе $\mathfrak{G}$ /такую функцию $\epsilon(x)$ будем называть квазипроизвольной/, тогда, интегрируя /6/ по $\mathfrak{G}$ и воспользовавшись теоремой Гаусса, получим:

$$\int_{(\mathfrak{G})}\left[\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\alpha^k_r - D_j\left(\frac{\delta S}{\delta\psi^p}\beta^{pj}_r\right)\right]\epsilon(x)\, d^N x = 0. \qquad /7/$$

Таким образом, основное тождество Э.Нетер не изменяется при добавлении производных в лагранжиан.

Дальнейший ход рассуждений состоит в следующем. Выражение $\bar\Lambda^j_r$ /г означает, что в $\bar\Lambda^j$ подставлено $\delta_r\psi^k$ из /5// можно представить в виде разложения по производным функции $\epsilon(x)$, а затем подставить это все в /6/. Получится нечто вида:

$$\Phi_0\cdot\epsilon + \Phi_1(D\epsilon) + \Phi_2(D^2\epsilon) + \dots = 0.$$

Система $(\Phi_i = 0)$ как раз и будет оговоренная во введении цепочка условий на ток. Ограничимся здесь лишь вычислением Φ_0 и Φ_1. Остальные Φ_k разумно считать в каждом конкретном случае. Отметим еще, что, исследуя ток, мы должны рассмотреть только надкоординатное преобразование, положив в /5/ $\gamma = 0$, $\phi = 0$. Имеем:

$$\bar\Lambda^j_r = \bar\Lambda^j_r(\epsilon, (D\epsilon), \dots),$$

тогда

$$\bar\Lambda^j_r = \bar\Lambda^j_{r0}\cdot(\epsilon) + \bar\Lambda^{ji}_{r0}\cdot(D_i\epsilon) + \dots ,$$

где

$$\bar\Lambda^j_{r0} = \left(\frac{\partial\bar\Lambda^j_r}{\partial\epsilon}\right)_{\epsilon=0}, \qquad \bar\Lambda^{ji}_{r0} = \left(\frac{\partial\bar\Lambda^j_r}{\partial(D_i\epsilon)}\right)_{\epsilon=0}$$

и т.д.

Подставляя это в /6/, находим:

$$[\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\alpha^k_r - D_j(\frac{\delta S}{\delta\psi^p}\beta^{pj}_r) + D_j(\bar{\Lambda}^j_{r0}) + D_j(\frac{\delta S}{\delta\psi^p}\beta^{pj}_r)]\epsilon +$$

$$+[\bar{\Lambda}^\ell_{r0} + D_j(\bar{\Lambda}^{j\ell}_{r0}) + \frac{\delta S}{\delta\psi}\beta^{p\ell}_r](D_\ell\epsilon) + \ldots = 0 ,$$

т.е.

$$\frac{\delta S}{\delta\psi^k}\alpha^k_r + D_j(\bar{\Lambda}^j_{r0}) = 0 ,$$

$$\bar{\Lambda}^\ell_{r0} + D_j(\bar{\Lambda}^{j\ell}_{r0}) + \frac{\delta S}{\delta\psi^p}\beta^{p\ell}_r = 0 , \qquad /8/$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$

Пусть имеют место уравнения движения:

$$\frac{\delta S}{\delta\psi^p} = 0 ,$$

тогда:

$$D_j(\bar{\Lambda}^j_{r0}) = 0 ,$$

$$\bar{\Lambda}^\ell_{r0} = -D_j(\bar{\Lambda}^{j\ell}_{r0}) , \qquad /9/$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots , \qquad 1 \le r \le R .$$

Введем вектор тока рассматриваемого поля. Как увидим ниже, для соответствия с обычной теорией нужно положить: $J^j_r = -\bar{\Lambda}^j_{r0}$. Выпишем его полностью:

$$J^j_r = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)}\sum_{\nu=1}^{\ell}(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_\lambda}\cdot\sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu}(-1)^{n_\nu}[(D_j^{(n_\nu-1)}\prod_{s=1}^{(\nu-1)}D_{j_s}^{\gamma_s})\times \qquad /10/$$

$$\times(\mathcal{L}^{j_1\ldots j_{\nu-1}jj_{\nu+1}\ldots j_\ell}_{k\gamma_1\ldots\gamma_\nu\ldots\gamma_\ell})][(D^{(\gamma_\nu-n_\nu)}\prod_{p=(\nu+1)}^{\ell}D_{j_p}^{\gamma_p})\alpha^k_r] .$$

Второе условие /9/ означает, что сам ток является N-дивергенцией. В общем случае найти $\bar{\Lambda}^{j\ell}_{r0}$ сложно и неразумно.

В случае $(\gamma)=1$, $m=1$ получаем:

$$J^j = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi^k_j}\alpha^k_r , \quad 1 \le r \le R .$$

Для обычного калибровочного преобразования

$$R = 1, \quad \alpha^k = i\psi^k$$

и получаем:

$$J^j = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k_j} \psi^k .$$

Для комплексного поля соответствующее выражение будет иметь вид

$$J^j = i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{*}{\psi}{}^k_j} \overset{*}{\psi}{}^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k_j} \psi^k \right) .$$

Это известный результат. В данном случае второе условие /9/ означает:

$$J^\ell = D_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^k_i} \beta^{k\ell} \right) .$$

На этом завершим рассмотрение преобразований с параметрами, зависящими от ψ и x.

5. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В основе рассмотрения по-прежнему лежит основное утверждение /4/. Имеем в данном случае:

$$\delta x^j = \xi^j_r \delta a^r ,$$

$$\delta \psi^k = \eta^k_r \delta a^r ,$$

$$1 \le r \le R .$$

В общем случае, конечно, $\xi = \xi(\psi, x)$, $\eta = \eta(\psi, x)$.

$$\bar{\delta}\psi^k = (\eta^k_r - (D_m \psi^k) \cdot \xi^m_r) \delta a^r , \quad \bar{\Delta}^j = \Delta^j_r \delta a^r ,$$

где

$$\Delta^j_r = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1} (-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)} \gamma_\lambda} \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu} (-1)^{(n_\nu - 1)} \left[\left(D_j^{(n_\nu - 1)} \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_s}^{\gamma_s} \right) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\mathcal{L}^{j_1 \cdots j_{\nu-1} j j_{\nu+1} \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1} \gamma_\nu \gamma_{\nu+1} \cdots \gamma_\ell} \right) \right] \cdot \left[D_j^{(\gamma_\nu - n_\nu)} \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D_{j_p}^{\gamma_p} \right) (\eta^k_r - (D_m \psi^k) \cdot \xi^m_r) \Big] .$$

В этом случае /4/ принимает вид

$$\frac{\delta S}{\partial \psi^k}[\eta_r^k - (D_m \psi^k)\cdot \xi_r^m] + D_j(\Lambda_r^j + \mathfrak{L}\xi_r^j) = 0, \qquad /11/$$

$$1 \le r \le R.$$

Если выполняются уравнения движения, то получаем R сохраняющихся величин:

$$\theta_r^j = -\Lambda_r^j - \mathfrak{L}\xi_r^j.$$

Выпишем их в развернутом виде:

$$\theta_r^j = \sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1}^{\ell} (-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)} \gamma_\lambda} \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu} (-1)^{n_\nu} [(D_j^{(n_\nu-1)} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_s}^{\gamma_s}) (\mathfrak{L}^{j_1 \cdots j_{\nu-1} j j_{\nu+1} \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_{\nu-1}\gamma_\nu \gamma_{\nu+1} \cdots \gamma_\ell})] \times \qquad /12/$$

$$\times [(D^{(\gamma_\nu - n_\nu)} \prod_{p=(\nu+1)} D_{j_p}^{\gamma_p}) (\eta_r^k - (D_m\psi^k)\cdot\xi_r^m)] - \mathfrak{L}\xi_r^j, \quad 1 \le r \le R.$$

При $m = 1$, $N = 4$ такой результат был получен Ибрагимовым[4].

Обратимся к рассмотрению некоторых конкретных групп преобразований.

α) Трансляции

$$\xi_r^\ell = \delta_r^\ell, \quad \eta_r^k = 0$$

и

$$\theta_r^j \equiv T_r^j = -\sum_{\ell=1}^{m} \sum_{(\gamma)} \sum_{\nu=1}^{\ell} (-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)} \gamma_\lambda} \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu} (-1)^{n_\nu} [(D_j^{(n_\nu-1)} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_s}^{\gamma_s}) (\mathfrak{L}^{j_1 \cdots j_{\nu-1} j j_{\nu+1} \cdots j_\ell}_{k\gamma_1 \cdots \gamma_\nu \cdots \gamma_\ell})] \times \qquad /13/$$

$$\times [(D_j^{(\gamma_\nu - n_\nu)} \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D_{j_p}^{\gamma_p})(D_r\psi^k)] - \mathfrak{L}\delta_r^j; \quad 1 \le r \le R.$$

При $m=1$, $(\gamma)=1$ получаем известный результат [1]:

$$T^{j} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\psi^{q}_{j})}\psi^{q}_{r} - \mathcal{L}\,\delta^{j}_{r}.$$

β) Лоренцевские вращения $(\Lambda^{p}_{m}\tilde{\Lambda}^{n}_{p} = \delta^{n}_{m})$

$$\begin{cases} \delta x^{j} = \xi^{j}_{r}\,\delta\omega^{r}, \\ \delta\psi^{k} = \eta^{k}_{r}\,\delta\omega^{r}, \end{cases} \qquad r \equiv (n, m\,|\,n < m), \quad R = \frac{N(N-1)}{2}.$$

$\xi^{k}_{(nm)} = (x_{m}\delta^{k}_{n} - x_{n}\delta^{k}_{m})$. Из-за линейности η по ψ получаем

$$\eta^{k}_{r} = A^{k\ell}_{r}\,\psi_{\ell}.$$

Коэффициенты $A^{k\ell}_{r}$ - свои для каждого конкретного тензорного поля.

Соответствующий нетеровский ток /тензор момента количества движения/ представим в виде суммы "орбитального" и "спинового" слагаемых:

$$\theta^{j}_{(nm)} \equiv M^{j}_{(nm)} = M^{j(0)}_{(nm)} + M^{j(s)}_{(nm)},$$

$$M^{j(0)}_{(nm)} = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)}\sum_{\nu=1}^{\ell}(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_{\lambda}} \cdot \sum_{n_{\nu}=1}^{\gamma_{\nu}}(-1)^{n_{\nu}}\,[(D_{j}^{(n_{\nu}-1)} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_{s}}^{\gamma_{s}})(\mathcal{L}^{j_{1}\dots j_{\nu-1}\,j\,j_{\nu+1}+j_{\ell}}_{k\gamma_{1}\dots\gamma_{\ell}})] \times \qquad /14/$$

$$\times \{(D_{\gamma}^{(\gamma_{\nu}-n_{\nu})} \cdot \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D_{j_{p}}^{\gamma_{p}})\,[(D_{m}\psi^{k})\cdot x_{n} - (D_{n}\psi^{k})\cdot x_{m}]\} -$$

$$- \mathcal{L}(x_{m}\delta^{j}_{n} - x_{n}\delta^{j}_{m});$$

$$M^{j(s)}_{(nm)} = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)}\sum_{\nu=1}^{\ell}(-1)^{\sum_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_{\lambda}} \cdot \sum_{n_{\nu}=1}^{\gamma_{\nu}}(-1)^{n_{\nu}}\,[(D_{j}^{(n_{\nu}-1)} \cdot \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_{s}}^{\gamma_{s}})(\mathcal{L}^{j_{1}\dots j_{\nu-1}\,j\,j_{\nu+1}\dots j_{\ell}}_{k\gamma_{1}\dots\gamma_{\ell}})] \times$$

$$\times [(D_{j}^{(\gamma_{\nu}-n_{\nu})} \cdot \prod_{p=(\nu+1)}^{\ell} D_{j_{p}}^{\gamma_{p}})(A^{kq}_{(nm)}\psi_{q})].$$

В случае $(\gamma)=1,\ m=1$ получаем известный результат [1]:

$$M^{j(0)}_{(nm)} = T^{\,j}_{n}x_{m} - T^{\,j}_{m}x_{n},$$

$$M^{j(s)}_{(nm)} = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\psi^{k}_{j})}A^{kq}_{(nm)}\psi_{q}.$$

γ) <u>В изотопическом пространстве</u>

$$\eta^{k}_{r} = R^{kq}_{r}\psi_{q}, \quad \xi^{j}_{r} = 0,$$

$$M^{j(I)}_{r} = \sum_{\ell=1}^{m}\sum_{(\gamma)}\sum_{\nu=1}^{\ell}(-1)^{\sum\limits_{\lambda=1}^{(\nu-1)}\gamma_{\lambda}} \cdot \sum_{n_\nu=1}^{\gamma_\nu}(-1)^{n_\nu}\Big[(D_{j}^{(n_\nu-1)} \times \prod_{s=1}^{(\nu-1)} D_{j_s}^{\gamma_s})(\mathcal{L}^{j_1\ldots j_{\nu-1}jj_{\nu+1}\ldots j_\ell}_{k\gamma_1\ldots\gamma_\ell})\Big]\times \Big[(D_{j}^{(\gamma_\nu-n_\nu)}\cdot\prod_{p=(\nu+1)}^{\ell}D_{j_p}^{\gamma_p})(R^{kq}_{r}\psi_{q})\Big]. \qquad /15/$$

Число величин $M^{j(I)}_{r}$ равно C^{2} /размерности изотопического пространства/.

Мы признательны Е.А.Иванову, прочитавшему рукопись работы и сделавшему ценные критические замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. "Наука", М., 1976.
2. Коноплева Н.П., Попов В.Н. Калибровочные поля. Атомиздат, М., 1980.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1954; Теория упругости. "Наука", М., 1965.
4. Ибрагимов Н.Х. ТМФ, 1969, т.1, №3.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1981 года.