сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-81-97

Н.Г.Иноземцева, Б.И.Садовников

РАСХОДИМОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ БАРНЕТТА В ТРЕХМЕРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ ТВЕРДЫХ СФЕР.

2. Нелинейные уравнения

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы продолжим изучение проблемы построения гидродинамических уравнений на основе кластерного разложения кинетической теории системы твердых тел, начатое нами в /1/. В отличие от рассмотренных в /1/ линеаризованных кинетических уравнений будем исследовать обшую проблему перехода к гидродинамическому приближению в уравнениях цепочки ББГКИ, замкнутых посредством предположения о малости трехчастичных корреляций /2/. Используя обобщенный метод Чепмена-Энскога, аналогичный применявшемуся нами в /1/, мы изучим зависимость искомых "гидродинамических" решений от параметра однородности ϵ, характеризующего малость изменения физических характеристик системы в предравновесном состоянии при пространственно-временных трансляциях. Противоречивость локальной картины гидродинамических процессов, соответствующей аналитическим по ϵ решениям, находит отражение в расходимостях, возникающих при определении коэффициентов Барнетта, и будет установлена нами путем непосредственного вычисления квадратичных по пространственным градиентам слагаемых в тензоре деформации и векторе потока тепла.

При проведении вычислений в основном будет сохранена примененная в /1/ схема, однако на каждом этапе основное внимание будет уделено нелинейным аспектам рассматриваемой проблемы.

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ НАВЬЕ-СТОКСА ДЛЯ КЛАСТЕРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ББГКИ

При обрыве цепочки уравнений ББГКИ посредством соотношения /2,3/, выражающего относительную малость трехчастичных корреляций:

$$G_3(t,x_1,x_2,x_3)=0, \qquad /1/$$

основным объектом исследования становится система нелинейных кинетических уравнений для одночастичной функции распределения $F_1(t,x_1)$ и бинарной корреляционной функции $G(t,x_1,x_2) \equiv$ $\equiv F_2(t,x_1,x_2) - F_1(t,x_1)F_1(t,x_2)$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}+\vec{v}_1\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1}\right]F_1(t,x_1)=n\int dx_2\,T(1,2)\{F_1(t,x_1)F_1(t,x_2)+G(t,x_1,x_2)\},$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial}{\partial \vec r_1} + \vec v_2 \frac{\partial}{\partial \vec r_2}\right] G(t,x_1,x_2) = T(1,2)[\, F_1(t,x_1)F_1(t,x_2) + G(t,x_1,x_2)] + n\,\mathfrak{L}\{F_1,G\},$$

$$\mathfrak{L}\{F_1,G\} = \int dx_3 [\, T(1,3)(F_1(t,x_3)G(t,x_1,x_2) + F_1(t,x_1)G(t,x_2,x_3)) + \qquad /2/$$

$$+ T(2,3)(F_1(t,x_3)G(t,x_1,x_2) + F_1(t,x_2)G(t,x_1,x_3))],$$

где, как и в[1], использованы обозначения $x_i = \{\vec r_i, \vec v_i\};\ dx_i = d\vec r_i\, d\vec v_i$,

$$T(1,2)\,Q(x_1,x_2) = a^2 \int\limits_{(\vec v_1-\vec v_2)\vec\sigma \ge 0} [(\vec v_1-\vec v_2)\vec\sigma]\cdot\{Q(x_1^*,x_2^*) - Q(x_1,x_2)\}\,\delta(\vec r_1-\vec r_2)\,d\vec\sigma,$$

$$x^*_{1,2} = \{\vec r_{1,2},\ \vec v_{1,2}\quad \vec\sigma(\vec v_1-\vec v_2)\vec\sigma\}.$$

Введение в систему /2/ параметра однородности ϵ для поиска гидродинамических решений, близких к однородным относительно пространственно-временных трансляций системы как целого, может быть характеризовано соотношениями:

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial}{\partial \vec r_1} \to \epsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial}{\partial \vec r_1}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial}{\partial \vec r_1} + \vec v_2 \frac{\partial}{\partial \vec r_2} \to \epsilon\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\vec v_1 + \vec v_2)\frac{\partial}{\partial \vec R}\right) + \frac{\vec v_1 - \vec v_2}{2}\,\frac{\partial}{\partial \vec r}, \qquad /3/$$

$$\vec R = \frac{\vec r_1 + \vec r_2}{2}, \quad \vec r = \vec r_1 - \vec r_2 .$$

Решение нулевого приближения выбираем в виде

$$F_1^{(q)}(t,x_1) = \left(\frac{m\rho}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(\vec v_1 - \vec u)^2}{2\theta}\right\}, \qquad /4/$$

$$G_2^{(q)}(t,x_1,x_2) \equiv 0, \qquad /5/$$

где $\rho(\vec r_1,t)$, $\theta(\vec r_1,t)$, $\vec u(\vec r_1,t)$ - макроскопические характеристики системы. Отметим, что уравнение /5/ является следствием использованного в /2/ пренебрежения в операторе столкновения слагаемыми, соответствующими конечным размерам области двухчастичного взаимодействия.

Нашей целью является построение замкнутых выражений для величин

$$P_{ik} = \int (v_i - u_i)(v_k - u_k)\, F_1(t,\vec r,\vec v)\, d\vec v,$$

$$q_i = \frac{1}{2} \int (v_i - u_i)(\vec v - \vec u)^2 F_1(t,\vec r,\vec v)\, d\vec v. \qquad /6/$$

Искомые гидродинамические уравнения при известных P_{ik}, q_k имеют стандартный вид "законов сохранения" /4/ для инвариантов двучастичного соударения:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec r}(\rho\vec u) = 0; \qquad \rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_k \frac{\partial u_i}{\partial r_k}\right) = -\frac{\partial P_{ik}}{\partial r_k}; \qquad /7/$$

$$\frac{3}{2}\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial r_k}\right)\theta = -\frac{1}{2}\left(P_{ik}\left(\frac{\partial u_i}{\partial r_k} + \frac{\partial u_k}{\partial r_i}\right) + \frac{\partial q_k}{\partial r_k}\right).$$

Таким образом, необходимо найти приближенное решение системы /2/, /3/ с учетом условий нулевого приближения /4/, /5/. Это решение, как и в предыдущей работе[1], будем искать в виде

$$F_1(t,x_1) = F_1^{(q)}(t,x_1)(1 + \epsilon\phi_1(t,x_1) + \epsilon^2\phi_2(t,x_1) + \dots), \qquad /8/$$

$$G(t,x_1,x_2) = F_1^{(q)}(t,x_1)F_1^{(q)}(t,x_2)(\epsilon\psi_1(t,x_1,x_2) + \epsilon^2\psi_2(t,x_1,x_2) + \dots).$$

Однако, в отличие от[1], здесь мы не будем делать никаких предположений об относительной величине отклонений макроскопических параметров ρ, $\vec u$, θ от их равновесных значений. Оставляя в /2/, /3/ при подстановке разложения /8/ лишь слагаемые, соответствующие первой степени ϵ, найдем

$$\frac{1}{F_1^{(q)}(x_1)}\left[\frac{\partial}{\partial t} + \vec v_1 \frac{\partial}{\partial \vec r_1}\right] F_1^{(q)}(x_1) = n\Lambda_q^{(1)}\phi_1(t,x_1) + n\int dx_2\, T(1,2)\,\psi(t,x_1,x_2), \qquad /9а/$$

$$\frac{1}{F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_2)}\left[\frac{\vec v_1 - \vec v_2}{2}\,\frac{\partial}{\partial \vec r}\right] F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_2)\,\psi_1(t,x_1,x_2) = T(1,2)(\phi_1(t,x_1) + \qquad /9б/$$

$$+ \phi_1(t,x_2) + \psi_1(t,x_1,x_2)) + n(\Lambda_q(q) + \Lambda_q(2))\,\psi_1(t,x_1,x_2),$$

где

$$\Lambda_q(1)\,\psi(x_1,x_2) = a^2 \int dx_3\, F_1^{(q)}(t,x_3)\, T(1,3)(\psi(x_1,x_2) + \psi(x_3,x_2)). \qquad /10/$$

Следует подчеркнуть, что, в отличие от оператора Λ_0 в[1], введенный здесь оператор Λ_q не совпадает с линеаризованным больцмановским оператором вследствие явной зависимости функции $F_1^{(q)}(t,x_3)$ от макроскопических параметров, являющихся, в свою очередь, функциями координат и времени. Одним из следствий этого факта является то обстоятельство, что операторы $\Lambda_q(1)$ и $\frac{\partial}{\partial \vec r_1}$ не коммутируют:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \vec r_1},\ \Lambda_q(1)\right] = \frac{\partial \Lambda_q(1)}{\partial \vec r_1}. \qquad /11/$$

Перейдем теперь к решению системы /9/. В первую очередь заметим, что слагаемым $T(1,2)\,\psi_1(t,x_1,x_2)$ можно пренебречь, поскольку в соответствии с [2,3] оно приводит к эффектам высшего порядка по плотности частиц в системе /включение этого слагаемого лишь усложняет анализ, не изменяя его принципиальных следствий [1] /. С учетом этого замечания получим

$$\left[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\right]\psi_1(t,x_1,x_2) = T(1,2)(\phi_1(t,x_1)+\phi_1(t,x_2)) + \qquad /12/$$

$$+\ \psi_1(t,x_1,x_2)\frac{1}{F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_2)}\,\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\,\frac{\partial}{\partial \vec r}\{F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_2)\}.$$

Поскольку согласно /7/ пространственные градиенты величин $F_1^{(q)}(x_1)$, $F_1^{(q)}(x_2)$ уже содержат степень ϵ, допустимо пренебрежение последним слагаемым в правой части /12/, после чего получим

$$\psi_1(t,x_1,x_2) = \left[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\right]^{-1} T(1,2)(\phi_1(t,x_1)+\phi_1(t,x_2)),$$

$$\phi_1(t,x_1) = \{n(\Lambda_q(1) + \int dx_2 T(1,2)\left[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\right]^{-1} T(1,2)(1+$$

$$+P_{1,2})\}^{-1}\frac{1}{F_1^{(q)}(x_1)}\left[\frac{\partial}{\partial t}+\vec v_1\frac{\partial}{\partial \vec r_1}\right]F_1^{(q)}(x_1), \qquad /13/$$

где

$$P_{1,2}\,\phi(x_1) = \phi(x_2).$$

Для интерпретации соотношений /13/ необходимо определить действие оператора

$$Q(1,2) = \left[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\right]^{-1} \qquad /14/$$

на функции координат и скоростей $\vec r_1$, $\vec r_2$, $\vec v_1$, $\vec v_2$. Введем новый оператор $Q^{(0)}(1,2)$, определив его следующим образом:

$$Q^{(0)}(1,2)\Phi(\vec r,\vec R;\vec v_1,\vec v_2) = \int\frac{d\vec q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec q\cdot\vec r}}{\frac{i\vec q(\vec v_1-\vec v_2)}{2} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}\,\tilde\Phi(\vec q,\vec R;\vec v_1,\vec v_2), \qquad /15/$$

где $\tilde\Phi(\vec q,\vec R;\vec v_1,\vec v_2)$ - фурье-образ Φ по переменной $\vec r$. Поскольку величины $\Lambda_q(1)$, $\Lambda_q(2)$, зависящие от $\vec r$, не подвергаются в /15/ фурье-преобразованию, ясно, что оператор /15/ не совпадает с $Q(1,2)$. Заметим далее, что во всех выражениях, с которыми нам придется встречаться, функция $\Phi(\vec r,\vec R;\vec v_1,\vec v_2)$ имеет вид

$$\delta(\vec r)\psi(\vec r_1,\vec r_2;\vec v_1-\vec u(\vec r_1,t),\vec v_2-\vec u(\vec r_2,t)) = \delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec v_1-\vec u(\vec R,t),\vec v_2-\vec u(\vec R,t)).$$

С учетом этого обстоятельства мы можем переопределить операторы $\Lambda_q(1)$, $\Lambda_q(2)$, вводя новые переменные:

$$\vec c_1 = \vec v_1-\vec u(\vec R,t);\quad \vec c_2 = \vec v_2-\vec u(\vec R,t). \qquad /16/$$

При этом

$$\Lambda_q(1)\psi(\vec R,\vec r,\vec c_1,\vec c_2) = a^2\int d\vec r_3\,d\vec v_3\,\delta(\vec r_1-\vec r_2)F_1^{(q)}(t;\vec v_3-\vec u(\vec r_3,t),\vec r_3)\times \qquad /17/$$

$$\times\tilde T(1,3)(\psi(\vec r_1,\vec r_2;\vec c_1,\vec c_2)+\psi(\vec r_3,\vec r_2,\vec v_3-\vec u(\vec r_3,t),c_2)),$$

где $\tilde T(1,3)$ определен посредством $T(1,3)=\delta(\vec r_1-\vec r_3)\tilde T(1,3)$. Учитывая в /17/ δ-функцию под знаком интеграла и инвариантность оператора $\tilde T(1,3)$ при замене переменных $\vec v_1\to\vec v_1-\vec u(\vec r_1,t)=\vec c_1$, $\vec v_3\to\vec v_3-\vec u(\vec r_3,t)=\vec c_3$, найдем

$$\Lambda_q(1)\psi(\vec R,\vec r,\vec c_1,\vec c_2) = a^2\int d\vec c_3\,F_1^{(q)}(t,\vec c_3,\vec r_1)\,\tilde T(1,3)\times \qquad /18/$$

$$\times(\psi(\vec R,\vec r;\vec c_1,\vec c_2)+\psi(\vec R,\vec r,\vec c_2,\vec c_3)).$$

Таким образом, переопределенный оператор $\Lambda_q(1)$ содержит зависимость от величин $\vec R,\vec r$ лишь в виде $\rho(\vec r_1,t),\theta(\vec r_1,t)$ в $F_1^{(q)}(t,\vec c_3,\vec r_1)$, а также в виде $\vec c_1$-зависимости оператора $T(1,3)$. Окончательно имеем

$$Q^{(0)}(1,2)\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2) = \int\frac{d\vec q}{(2\pi)^3}\,\frac{e^{i\vec q\cdot\vec r}}{\frac{i\vec q(\vec c_1-\vec c_2)}{2} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}\,\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2),$$

где $\Lambda_q(1)$ определен посредством /18/. Оценим далее разность $Q(1,2)-Q^{(0)}(1,2)$, то есть определим, насколько точное решение уравнения

$$\left[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\right]\psi(t,\vec R,\vec r,\vec c_1,\vec c_2) = \delta(\vec r)\psi(\vec r,\vec c_1,\vec c_2) \qquad /19/$$

отличается от выражения

$$\psi^{(0)} = Q^{(0)}(1,2)\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2). \qquad /20/$$

Рассмотрим действие оператора $[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial\vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))]$ на функцию $\psi^{(0)}$:

$$[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))]Q^{(0)}(1,2)\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2) =$$

$$=[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))]\int \frac{e^{i\vec q\cdot\vec r}}{(2\pi)^3}\, d\vec q \times \frac{1}{i\vec q\frac{(\vec c_1-\vec c_2)}{2} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2) =$$

$$=\int \frac{e^{i\vec q\cdot\vec r}}{(2\pi)^3}\, d\vec q\{1+[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial\vec r}\frac{1}{i\vec q\frac{\vec c_1-\vec c_2}{2}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}]\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2)= \qquad /21/$$

$$=\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2)+\{\int\frac{e^{i\vec q\cdot\vec r}}{(2\pi)^3}\, d\vec q\,\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial\vec r}\frac{1}{i\vec q\frac{(\vec c_1-\vec c_2)}{2}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}\}\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2).$$

Для оценки второго слагаемого в /21/ воспользуемся представлением

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{1}{\hat A+\hat B(\lambda)} = -\frac{1}{\hat A+\hat B(\lambda)}\frac{\partial\hat B(\lambda)}{\partial\lambda}\frac{1}{\hat A+\hat B(\lambda)}, \qquad /22/$$

справедливым для любых операторов $\hat A,\hat B(\lambda)$. Следовательно,

$$[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))]Q^{(0)}(1,2)\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2) = \delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2) +$$

$$+\int\frac{d\vec q}{(2\pi)^3}\frac{\vec c_1-\vec c_2}{2}\frac{1}{i\vec q\frac{(\vec c_1-\vec c_2)}{2}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}\, n\frac{\partial}{\partial\vec r}(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\frac{1}{i\vec q\frac{\vec c_1-\vec c_2}{2}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}. \qquad /23/$$

Итак, второе слагаемое в /23/ содержит градиенты макроскопических параметров $\rho,\vec u,\theta$ и имеет высшую степень по ϵ. Поэтому с точностью до членов $\sim\epsilon$ имеем

$$[\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec r} - n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))]Q^{(0)}(1,2)\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2)=\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2),$$

и решение уравнения /19/ может быть представлено в форме

$$\psi = Q^{(0)}(1,2)\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2)+(Q(1,2)-Q^{(0)}(1,2))\delta(\vec r)\psi(\vec R,\vec c_1,\vec c_2), \qquad /24/$$

где второе слагаемое в правой части согласно /23/ имеет вид

$$-Q(1,2)\int\frac{d\vec q}{(2\pi)^3}\frac{\vec c_1-\vec c_2}{2}\frac{1}{i\vec q\frac{\vec c_1-\vec c_2}{2}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))}\times$$

$$\times n\frac{\partial}{\partial\vec r}(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\frac{1}{i\vec q\frac{(\vec c_1-\vec c_2)}{2}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))},$$

то есть действительно содержит лишь члены высшего порядка по ϵ. Таким образом, в интересующем нас приближении

$$\psi_1(t,x_1,x_2)=Q^{(0)}(1,2)T(1,2)(1+P_{1,2})\phi_1(t,x_1);$$

$$\phi_1(t,x_1)=\{n(\Lambda_q(1)+\int dx_2T(1,2)Q^{(0)}(1,2)T(1,2)(1+P_{1,2})\}^{-1}\times \qquad /25/$$

$$\times\frac{1}{F_1^{(0)}(x_1)}[\frac{\partial}{\partial t}+\vec v_1\frac{\partial}{\partial\vec r_1}]F_1^{(0)}(x_1).$$

При подстановке этих выражений в /6/,/7/ мы получим искомые нелинейные уравнения Навье-Стокса, не содержащие каких-либо расходимостей.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ БАРНЕТТА И РАСХОДИМОСТЬ В НЕЛИНЕЙНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

Перейдем теперь к учету величин второго порядка по ϵ в уравнениях /2/, /3/. Сначала обратимся ко второму из этих уравнений. Подставляя в /2/, /3/ разложения /8/, имеем, оставляя члены, имеющие формальные порядки ϵ,ϵ^2:

$$\frac{1}{F_1^{(0)}(x_1)F_1^{(0)}(x_2)}[\epsilon(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec v_1+\vec v_2)\frac{\partial}{\partial\vec R})+\frac{\vec v_1-\vec v_2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial\vec r}](\epsilon\psi_1(t,x_1,x_2)+$$

$$+\epsilon^2\psi_2(t,x_1,x_2))\,F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_2)T(1,2)\{2\epsilon^2\phi_1(t,x_1)\phi_1(t,x_2)+\epsilon^2(\phi_2(t,x_1)+\phi_2(t,x_2))+ \qquad /26/$$

$$+\epsilon^2\psi_2(t,x_1,x_2)+\epsilon(\phi_1(t,x_1)+\phi_1(t,x_2)+\psi_1(t,x_1,x_2))\}+$$

$$+n\{\epsilon(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\psi_1(t,x_1,x_2)+\epsilon^2(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\psi_2(t,x_1,x_2)+$$

$$+\epsilon^2\tilde{\mathfrak{L}}(\phi_1(t,x_1),\ \psi_1(t,x_1,x_2))\},$$

где

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\phi_1(t,x_1),\psi_1(t,x_1,x_2)) =$$

$$= \int dx_3 F_1^{(q)}(x_3)[T(1,3)(\phi_1(t,x_3)\psi_1(t,x_1,x_2)+$$

$$+\phi_1(t,x_1)\psi_1(t,x_2,x_3)) + T(2,3)(\phi_1(t,x_3)\psi_1(t,x_1,x_2)+$$

$$+\phi_1(t,x_2)\psi_1(t,x_1,x_3))].$$

Будем теперь использовать в /26/ в качестве ψ_1, ϕ_1 решения /25/. При этом получим, отбрасывая, как и при анализе первого приближения, слагаемое $T(1,2)\psi_2(t,x_1,x_2)$:

$$\epsilon^2[\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\psi_2(t,x_1,x_2)+(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\frac{\partial}{\partial \vec{R}})\psi_1(t,x_1,x_2)-$$

$$-T(1,2)\{2\phi_1(t,x_1)\phi_1(t,x_2)+\phi_2(t,x_1)+\phi_2(t,x_2)\}-n(\Lambda_q(1)+\Lambda_q(2))\psi_2(t,x_1,x_2)-$$

$$-n\tilde{\mathfrak{L}}(\phi_1(t,x_1),\psi_1(t,x_1,x_2))]+\epsilon\{[\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}-n\Lambda_q(1)-n\Lambda_q(2)]\psi_1(t,x_1,x_2)- \qquad /27/$$

$$-T(1,2)(\phi_1(t,x_1)+\phi_1(t,x_2))\}+$$

$$+\epsilon\,\psi_1(t,x_1,x_2)\frac{1}{F_1^{(0)}(x_1)F_1^{(0)}(x_2)}\frac{(\vec{v}_1-\vec{v}_2)}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_1)=0.$$

Последние слагаемые в /27/ имеют в действительности при учете уравнений первого приближения степень по ϵ, поскольку они содержат градиенты макроскопических параметров.

Поэтому, вводя обозначения

$$\epsilon^2 P(t,x_1,x_2)=\epsilon\{[\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}-n\Lambda_q(1)-n\Lambda_q(2)]\psi_1(t,x_1,x_2)-T(1,2)(\phi_1(t,x_1)+ \qquad /28/$$

$$+\phi_1(t,x_2))+\psi_1(t,x_1,x_2)\frac{1}{F_1^{(0)}(x_1)F_1^{(0)}(x_2)}(\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{2})\frac{\partial}{\partial \vec{r}}F_1^{(q)}(x_1)F_1^{(q)}(x_2)\}-$$

$$-\epsilon^2 n\,\tilde{\mathfrak{L}}(\phi_1(t,x_1),\psi_1(t,x_1,x_2))-2\epsilon^2 T(1,2)\phi_1(t,x_1)\phi_1(t,x_2),$$

представим искомое уравнение второго порядка в виде

$$[\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}-n\Lambda_q(1)-n\Lambda_q(2)]\psi_2(t,x_1,x_2)= \qquad /29/$$

$$=-(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\frac{\partial}{\partial \vec{R}})\psi_1(t,x_1,x_2)+T(1,2)(1+P_{1,2})\phi_2(t,x_1)-P(t,x_1,x_2).$$

Отметим, что вклад величины $P(t,x_1,x_2)$ в выражения для тензора напряжений и вектора потока тепла имеет вид $(\frac{\partial z}{\partial x_\lambda}\frac{\partial z'}{\partial x_\mu})$, где z, z' - любые из макроскопических параметров $\rho, \vec{u}, \theta$; все соответствующие коэффициенты Барнетта не содержат расходимостей. Поэтому сосредоточим внимание на вкладах типа $\frac{\partial^2 z}{\partial x_\lambda \partial x_\mu}$, что формально соответствует образованию величины $P(t,x_1,x_2)$ в /29/.

Полученное в результате уравнение имеет решение, формально совпадающее с соотношением /14/ из работы [1]. Однако, поскольку введенные в работе [1] операторы $\Lambda_0(i)$ и присутствующие в /29/ операторы $\Lambda_q(i)$, $i=1,2$, не совпадают, то с учетом соотношений /24/, выведенных выше, искомое решение нужно искать в форме

$$\psi_2(t,x_1,x_2)=Q^{(0)}(1,2)\{T(1,2)(1+P_{1,2})\phi_2(t,x_1)-$$

$$-(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\frac{\partial}{\partial \vec{R}})Q^{(0)}(1,2)T(1,2)(1+P_{1,2})\phi_1(t,x_1)\}= \qquad /30/$$

$$=\hat{R}\,\phi_2(t,x_1)+\psi_2^{(0)}(t,x_1,x_2),$$

где

$$\psi_2^{(0)}(t,x_1,x_2)=-Q^{(0)}(1,2)(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\frac{\partial}{\partial \vec{R}})Q^{(0)}(1,2)T(1,2)(1+P_{1,2})\phi_1(t,x_1).$$

Заметим теперь, что, как и в линеаризованном случае, величины $\psi_2^{(0)}(t,x_1,x_2)$ входят в уравнения для функции $\phi_2(t,x_1)$ лишь в комбинации

$$I(t,x_1)=n\int dx_2 T(1,2)\psi_2^{(0)}(t,x_1,x_2)= \qquad /31/$$

$$=-\int dx_2 T(1,2)Q^{(0)}(1,2)(\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{v}_1+\vec{v}_2)\frac{\partial}{\partial \vec{R}})Q^{(0)}(1,2)T(1,2)(1+P_{1,2})\phi_1(t,x_1).$$

Поскольку согласно определению /15/ действие оператора $Q^{(0)}(1,2)$ в фурье-представлении полностью аналогично действию оператора $[\frac{\vec{v}_1-\vec{v}_2}{2}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}-n(\Lambda_0(1)+\Lambda_0(2))]$, отличаясь лишь формальной заменой $\Lambda_0 \to \Lambda_q$, все остальные этапы доказательства расходимости коэффициентов Барнетта в точности соответствуют линеаризованной проблеме, рассмотренной нами в[1]. Действительно, с помощью замены $\Lambda_0 \to \Lambda_q$ расходящиеся слагаемые в выражении /22/ работы[1] целиком воспроизводят величины, содержащие расходимости в /31/.

Таким образом, мы завершили доказательство невозможности построения аналитического по ϵ "гидродинамического" решения исходных нелинейных кинетических уравнений. Этот результат показывает, что для последовательного перехода к гидродинамике в уравнениях /2/ оказывается некорректным стандартный метод Чепмена-Энскога, предполагающий возможность отбрасывания на каждом этапе слагаемых, содержащих малый параметр при старшей производной[4,5].

Авторы глубоко благодарны академику Н.Н.Боголюбову за ценные советы и указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. ОИЯИ, Р17-81-9, Дубна, 1981.
2. Ernst M.H., Dorfman J.R. Physica, 1972, 61, p.157; J.Stat. Phys., 1975, 12, p.311.
3. Боголюбов Н.Н. ЭЧАЯ, 1979, 9, вып.4, с.501-579.
4. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. "Мир", М., 1965.
5. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. ДАН СССР, 1980, т.252, №4, с.852.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 февраля 1981 года.