сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P17-81-764

Н.Н.Боголюбов /мл./, В.Н.Плечко, В.В.Шелаев

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДНИКА

1981

Здесь излагается вывод кинетического уравнения для квазичастиц в сверхпроводнике на основе точного кинетического уравнения для системы, взаимодействующей с фононным полем /I/.

Рассмотрим динамическую систему S, взаимодействующую с фононным полем Σ так, что полный гамильтониан (S,Σ) – системы имеет вид

$$H(t,S,\Sigma) = \Gamma(t,S) + \sum_q \{C_q(t,S)b_q + C_q^+(t,S)b_q^+\} + H(\Sigma), \qquad (1)$$

где $\Gamma(t,S)$ и $H(\Sigma)=\sum_q \hbar\omega_q b_q^+ b_q$ – гамильтонианы подсистем S и Σ; b_q^+, b_q – бозе-операторы; второе слагаемое в правой части (I) описывает взаимодействие. Условимся обозначать символами $F(t,S)$, $f(S)$ операторы, действующие только на переменные подсистемы S.

Пусть $f(S)$ – некоторая динамическая величина, а $\mathcal{D}_t(S,\Sigma)$ – статистический оператор (S,Σ) – системы в момент времени t; введем также $\rho_t(S) = \underset{(\Sigma)}{Sp}\,\mathcal{D}_t$. Далее предположим, что в момент времени t_0 $(t_0 \to -\infty)$ система находится в равновесии с обратной температурой $\beta = 1/\theta$. Тогда имеет место следующее точное кинетическое уравнение для $f(S)$ /I/:

$$\underset{(S)}{Sp}\{f(S)\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(S) + [\Gamma(t,S), f(S)]/i\hbar\} =$$

$$= 1/\hbar^2 \sum_q \int_{t_0}^{t} d\tau \underset{(S,\Sigma)}{Sp} \exp[-i\omega_q(t-\tau)]\{N_q C_q^+(\tau,S_\tau)[f(S_t), C_q(t,S_t)] +$$

$$+ (1+N_q)[C_q(t,S_t), f(S_t)]\,C_q^+(\tau,S_\tau)\}\mathcal{D}_{t_0} +$$

$$+ 1/\hbar^2 \sum_q \int_{t_0}^{t} d\tau \underset{(S,\Sigma)}{Sp} \exp[i\omega_q(t-\tau)]\{(1+N_q)C_q(\tau,S_\tau)[f(S_t), C_q^+(t,S_t)] +$$

$$+ N_q[C_q^+(t,S_t), f(S_t)]\,C_q(\tau,S_\tau)\}\mathcal{D}_{t_0}, \qquad (2)$$

где $N_q = \exp(-\beta\hbar\omega_q)/[1-\exp(-\beta\hbar\omega_q)]$ – равновесные числа заполнения бозонных мод. Заметим, что в уравнении (2) бозонные амплитуды исключены.

При описании сверхпроводника будем исходить из стандартного гамильтониана электрон-фононного взаимодействия

$$H = \sum_{k,\sigma} T(k) a_{k\sigma}^+ a_{k\sigma} + \sum_q \hbar\omega_q b_q^+ b_q + g\sum_{k,q,\sigma}[(\frac{\hbar\omega_q}{2V})^{1/2}(a_{k\sigma}^+ a_{k+q,\sigma} b_q^+ + a_{k+q,\sigma}^+ a_{k\sigma} b_q)], \qquad (3)$$

в котором $T(k)=\Lambda_k-\lambda$; Λ_k, $\hbar\omega_q$ – энергии собственно электрона и фонона; λ – химический потенциал; a^+, a – операторы рождения и уничтожения электронов; g – константа связи. Ясно, что гамильтониан (3) является частным случаем (I).

Перейдем к новым ферми-операторам α, β

$$a_{\bar{k}+}=u_k\alpha_k+v_k\beta^+_{-k}, \qquad (4)$$
$$a_{-\bar{k}-}=u_k\beta_{-k}-v_k\alpha^+_k,$$

где u_k, v_k – действительные коэффициенты, удовлетворяющие соотношениям

$$u_k=u_{-k}, \quad v_k=v_{-k}, \quad u_k^2+v_k^2=1.$$

Тогда (3) можем записать в виде (I) с

$$\Gamma(t,S)=2\sum_k T(k)v_k^2+\sum_k T(k)(u_k^2-v_k^2)(\alpha^+_k\alpha_k+\beta^+_k\beta_k)+ \qquad (5)$$
$$+2\sum_k T(k)u_k v_k(\alpha^+_k\beta^+_{-k}+\beta_{-k}\alpha_k),$$

$$C_q(t,S)=\frac{\exp(\varepsilon t)}{\sqrt{V}}L_q\sum_k[u_k u_{k+q}(\alpha^+_{k+q}\alpha_k+\beta^+_{k+q}\beta_k)+v_k v_{k+q}(\beta_{-k-q}\beta^+_{-k}+\alpha_{-k-q}\alpha^+_{-k})+$$
$$+u_k v_{k+q}(\beta_{-k-q}\alpha_k+\beta_k\alpha_{-k-q})+v_k u_{k+q}(\alpha^+_{k+q}\beta^+_{-k}+\alpha^+_{-k}\beta^+_{k+q})],$$
$$L_q=L^*_q=g\left(\frac{\hbar\omega_q}{2}\right)^{1/2}.$$

Как известно, в состоянии равновесия гамильтониан сверхпроводника аппроксимируется гамильтонианом невзаимодействующих квазичастиц

$$H_0=\sum_k E_k(\alpha^+_k\alpha_k+\beta^+_k\beta_k),$$

в котором E_k выражается через u_k, v_k (u_k, v_k зависят от температуры). Поэтому следует ожидать, что слабонеравновесное состояние сверхпроводника можно описать кинетическим уравнением для слабонеравновесных квазичастиц (см. также /2/ и указанную там литературу). В этом приближении задача сводится к уравнениям для числа квазичастиц $f_\alpha=\alpha^+_k\alpha_k$ и $f_\beta=\beta^+_k\beta_k$. С учетом этого положим в (2) $f(S)=f_\alpha$ и $f(S)=f_\beta$ (будем ниже рассматривать (2) в конкретном случае сверхпроводника, задаваемого выражениями (3), (5)). Тогда в левой части (2) получим

$$\underset{(S)}{Sp}\, f_\alpha(S)\rho_t(S)=\underset{(S)}{Sp}\,\alpha^+_f\alpha_f\rho_t(S)=\langle\alpha_f(t)\alpha_f(t)\rangle_{t_0}=\nu_f(t),$$
$$\underset{(S)}{Sp}\, f_\beta(S)\rho_t(S)=\langle\beta^+_f(t)\beta_f(t)\rangle_{t_0}=\mu_f(t)$$

и

$$\underset{(S)}{Sp}\, f_\alpha(S)\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(S)=\frac{\partial}{\partial t}\nu_f, \quad \underset{(S)}{Sp}\, f_\beta(S)\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(S)=\frac{\partial}{\partial t}\mu_f. \qquad (6)$$

Учитывая (5), видим, что после вычисления коммутаторов мы будем иметь в правой части (2) четырехфермионные средние, зависящие от двух времен t, τ, составленные из операторов $\alpha_f(t),\ldots,\beta_f(\tau),\ldots$.

Для упрощения возникающих выражений сделаем два приближения, отвечающих предположению о слабом взаимодействии квазичастиц.

I. Пусть операторы $\alpha_f(t), \alpha_f(\tau)$ и $\beta_f(t), \beta_f(\tau)$ подчиняются уравнению "свободного движения"

$$i\hbar\frac{d\alpha_f}{dt}=[\alpha_f, H_0]=E_f\alpha_f(t), \quad i\hbar\frac{d\beta_f}{dt}=[\beta_f, H_0]=E_f\beta_f(t).$$

Отсюда

$$\alpha_f(\tau)=\exp[-iE_f(\tau-t)/\hbar]\,\alpha_f(t), \qquad (7)$$
$$\beta_f(\tau)=\exp[-iE_f(\tau-t)/\hbar]\,\beta_f(t).$$

В результате в правой части (2) останутся только одновременные четырехфермионные средние.

2. Будем расщеплять четырехфермионные одновременные средние по теореме Вика-Блоха-Де Доминисиса (строго выполняющейся для идеального газа квазичастиц) на выражения от бинарных средних, учитывая при этом общие правила отбора.

В этих предположениях после громоздких, но простых вычислений в левой части (2) получаем

$$\underset{(S)}{Sp}\{[\Gamma(t,S), f_\alpha(S)]\rho_t(S)\}=\underset{(S)}{Sp}[2T(f)u_f v_f(\beta_{-f}\alpha_f+\beta^+_{-f}\alpha^+_f)\rho_t(S)]=0, \qquad (8)$$
$$\underset{(S)}{Sp}\{[\Gamma(t,S), f_\beta(S)]\rho_t(S)\}=\underset{(S)}{Sp}[2T(f)u_f v_f(\alpha_{-f}\beta_f+\alpha^+_{-f}\beta^+_f)\rho_t(S)]=0,$$

а правая приводится к виду

$$1/\hbar^2\sum_q\int_{t_0}^{t}d\tau\,\underset{(\Sigma)}{Sp}\exp[-i\omega_q(t-\tau)]A_{fq}(\gamma,t,\tau)\mathcal{D}(\Sigma)+$$
$$+1/\hbar^2\sum_q\int_{t_0}^{t}d\tau\,\underset{(\Sigma)}{Sp}\exp[i\omega_q(t-\tau)]A^*_{fq}(\gamma,t,\tau)\mathcal{D}(\Sigma) \quad (\gamma=\alpha,\beta),$$

где

$$\mathcal{D}(\Sigma)=\underset{(S)}{Sp}\,\mathcal{D}_{t_0}=Z^{-1}\exp[-H(\Sigma)/\theta], \quad Z=\underset{(\Sigma)}{Sp}\exp[-H(\Sigma)/\theta],$$

$$A_{fq}(\alpha,t,\tau)=L_q^2\exp[\varepsilon(t+\tau)]/V\times \qquad (9)$$

$$\times\{\exp[i(E_f-E_{f+q})(\tau-t)/\hbar](u_f u_{f+q}\mp v_f v_{f+q})^2[(1+N_q)\nu_{f+q}(1-\nu_f)+N_q\nu_f(\nu_{f+q}-1)]+$$

$$+\exp[i(E_f-E_{f-q})(\tau-t)/\hbar](u_f u_{f-q}\mp v_f v_{f-q})^2[(1+N_q)\nu_f(\nu_{f-q}-1)+N_q\nu_{f-q}(1-\nu_f)]+$$

$$+\exp[i(E_f+E_{-f-q})(\tau-t)/\hbar](u_f v_{f+q}+v_f u_{f+q})^2[(1+N_q)(1-\nu_f)(1-\mu_{-f-q})-N_q\nu_f\mu_{-f-q}]+$$

$$+\exp[i(E_f+E_{-f+q})(t-\tau)/\hbar](u_f v_{f-q}+v_f u_{f-q})^2[N_q(1-\nu_f)(1-\mu_{-f+q})-(1+N_q)\nu_f\mu_{-f+q}]\}$$

(выражение для $A_{fq}(\beta,t,\tau)$ получается простой заменой $\nu\rightleftarrows\mu$). Совершая в (9) стандартный предельный переход $t_0\to-\infty,\ \varepsilon\to0$ и используя известное соотношение
$$\frac{1}{x\pm i\varepsilon}=\frac{1}{x}\mp i\pi\delta(x),$$
с учетом (6), (8) приходим к следующим кинетическим уравнениям:

$$\frac{\partial\nu_f}{\partial t}=\sum_{k,q}\frac{2\pi L_q^2}{\hbar V}(u_f v_k+v_f u_k)^2\{[(1+N_q)(1-\nu_f)(1-\mu_k)-N_q\nu_f\mu_k]\delta(E_f+E_k+\hbar\omega_q)\Delta(k+q+f)+$$
$$+[N_q(1-\nu_f)(1-\mu_k)-(1+N_q)\nu_f\mu_k]\delta(E_f+E_k-\hbar\omega_q)\Delta(k+f-q)\}+$$
$$+\sum_{k,q}\frac{2\pi L_q^2}{\hbar V}(u_f u_k-v_f v_k)^2\{[(1+N_q)\nu_k(1-\nu_f)+N_q\nu_f(\nu_k-1)]\delta(E_k-E_f-\hbar\omega_q)\Delta(k-f-q)+$$
$$+[(1+N_q)\nu_f(\nu_k-1)+N_q\nu_k(1-\nu_f)]\delta(E_k-E_f+\hbar\omega_q)\Delta(k+q-f)\}, \qquad (10)$$

$$\frac{\partial\mu_f}{\partial t}=\sum_{k,q}\frac{2\pi L_q^2}{\hbar V}(u_f v_k+v_f u_k)^2\{[(1+N_q)(1-\mu_f)(1-\nu_k)-N_q\nu_k\mu_f]\delta(E_f+E_k+\hbar\omega_q)\Delta(k+q+f)+$$
$$+[N_q(1-\nu_k)(1-\mu_f)-(1+N_q)\nu_k\mu_f]\delta(E_f+E_k-\hbar\omega_q)\Delta(k+f-q)\}+$$
$$+\sum_{k,q}\frac{2\pi L_q^2}{\hbar V}(u_f u_k-v_f v_k)^2\{[(1+N_q)\mu_k(1-\mu_f)+N_q\mu_f(\mu_k-1)]\delta(E_k-E_f-\hbar\omega_q)\Delta(k-f-q)+$$
$$+[(1+N_q)\mu_f(\mu_k-1)+N_q\mu_k(1-\mu_f)]\delta(E_k-E_f+\hbar\omega_q)\Delta(k+q-f)\}. \qquad (11)$$

Уравнения такого типа были получены в работах /2/ более традиционным методом, основанным на детальном рассмотрении процессов рассеяния квазичастиц на фононах и методе компенсации получающихся в уравнениях секулярных членов.

В заключение заметим, что если положить в (10), (11) $u_k\equiv1,\ v_k\equiv0$, то мы придем к обычному уравнению Блоха для электронов в металле.

Л И Т Е Р А Т У Р А

/1/ Н.Н.Боголюбов, Н.Н.Боголюбов (мл.). ЭЧАЯ, 1980, II, 245.

/2/ В.Г.Барьяхтар, В.П.Семиноженко. Препринт ИТФ-76-64Р, Киев, 1976.
В.Г.Барьяхтар, Н.Н.Бычкова, В.П.Семиноженко. ТМФ, 1979, т.38, с.251.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 декабря 1981 года.