объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-81-731

Д.Михалаке, В.К.Федянин

НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПОЛЯРИТОНЫ В СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ

Направлено в "Physics Letters"

1981

В последние годы весьма интенсивно исследуются и теоретически и экспериментально линейные поверхностные поляритоны /см., например, прекрасные обзоры /1,2/. Недавно Агранович с соавторами в /3/ нашел точное решение уравнений Максвелла, описывающее распространение p-поляризованных поверхностных поляритонов в случае, когда один из диэлектриков является оптически однородной средой, а оптические свойства другого описываются следующим тензором диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon_{11}(\omega, |\vec{E}|^2) = \epsilon_{22}(\omega, |\vec{E}|^2) = \epsilon_{\perp}(\omega) + a(\omega)(|E_1|^2 + |E_2|^2), \qquad /1/$$
$$\epsilon_{33}(\omega, |\vec{E}|^2) = \epsilon_{\parallel}(\omega).$$

Подход, развитый в работе /3/, оказался весьма плодотворным для исследования особенностей поведения света как на границе раздела оптически однородной и неоднородной сред, так и в пластинке, оптические характеристики которой задаются /1/.

В частности, нами /4/ были исследованы p-поляризованные поверхностные поляритоны на границе раздела однородной и неоднородной сред. Тензор диэлектрической проницаемости для неоднородной среды дается обобщением /1/:

$$\epsilon_{11}(\omega, |\vec{E}|^2) = \epsilon_{22}(\omega, |\vec{E}|^2) = \epsilon_{\perp}(\omega) + \sum_{n=1}^{N} a_n(\omega)(|E_1|^{2n} + |E_2|^{2n}),$$
$$\epsilon_{33}(\omega, |\vec{E}|^2) = \epsilon_{\parallel}(\omega).$$

Для случая $N=2$ также удалось получить точное решение и проанализировать модификацию характеристик поверхностных поляритонов Аграновича.

В недавней работе /5/ Марадудин нашел точное решение для s-поляризованных поверхностных поляритонов на границе раздела двух сред, когда диэлектрические свойства оптически неоднородного кристалла описываются формулами /1/ /см. также /6/ /. Далее, Ломтев в /7/ обобщил подход /3/ на случай, когда граничат две оптически анизотропные среды, диэлектрическое свойства каждой из которых описываются тензорами вида /1/.

В данной работе мы кратко изложим результаты нашего исследования характеристик нелинейных поверхностных поляритонов в системе, в которую входят следующие составляющие: среда с изотропными оптическими свойствами, характеризуемыми $\epsilon_1(\omega)$ /например, вакуум/; оптически одноосный кристалл, диэлектрические свойства которого описываются /1/; оптически изотропная среда с $\epsilon_3(\omega)$ /также может быть вакуум/. Как будет показано, и в этом случае уравнения Максвелла, описывающие распространение волн в среде с нелинейными оптическими свойствами, также имеют точные решения.

Геометрия подобного "сэндвича" в нашем случае такова. Область I ($z \le 0$) есть оптически изотропная среда с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1(\omega)$, область II ($0 \le z \le d$) - диэлектрическая пластинка /одноосный кристалл/, оптические свойства которой описываются тензором /1/, область III ($z \ge d$) - оптически изотропная среда с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_3(\omega)$. Мы ограничим наше рассмотрение случаем p-поляризованных поверхностных поляритонов, для которых $E_2=0$, $H_1=H_3=0$. Декартовы компоненты $\vec{E}$ и $\vec{H}$ даются формулами

$$E_{1,3} = \mathcal{E}_{1,3}(z)\, e^{-i\omega t + ikx}, \quad H_2 = \mathcal{H}_2(z)\, e^{-i\omega t + ikx} . \qquad /2/$$

Максвелловские уравнения запишутся в виде

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} - ik\mathcal{E}_3 = i\frac{\omega}{c}\mathcal{H}_2, \qquad /3/$$

$$\frac{d\mathcal{H}_2}{dz} = i\frac{\omega}{c}\mathfrak{D}_1, \quad k\mathcal{H}_2 = -\frac{\omega}{c}\mathfrak{D}_3 .$$

Из /1/ и /3/ следует, что

$$\frac{d^2\mathcal{E}_1^{I}}{dz^2} - k_1^2\mathcal{E}_1^{I} = 0, \quad k_1^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_1 , \qquad /4/$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}^{II}}{dz^2} - \frac{k_2^2}{\epsilon_\parallel}[\epsilon_\perp + \alpha(\mathcal{E}_1^{II})^2]\mathcal{E}_1^{II} = 0, \quad k_2^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_\parallel , \qquad /5/$$

$$\frac{d^2\mathcal{E}_1^{III}}{dz^2} - k_3^2\mathcal{E}_1^{III} = 0, \quad k_3^2 = k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_3 . \qquad /6/$$

Рассмотрим те решения /4/-/6/, амплитуды которых стремятся к нулю при $|z| \to \infty$. Уравнения /4/, /6/ легко интегрируются, и мы имеем: $\mathcal{E}_1^{I}(z) = \mathcal{E}(0)\, e^{k_1 z}$, $z<0$ и $\mathcal{E}_1^{III}(z) = A e^{-k_3 z}$, $z>d$. Первое интегрирование /5/ дает

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_1^{II}}{dz}\right)^2 - \frac{k_2^2}{\epsilon_\parallel}\left[\epsilon_\perp(\mathcal{E}_1^{II})^2 + \frac{\alpha}{2}(\mathcal{E}_1^{II})^4\right] = c . \qquad /7/$$

Постоянная интегрирования c находится из условий непрерывности $\mathcal{E}_1^{II}(z)$ и $\mathfrak{D}_3(z)$ при $z=0$:

$$c = \mathcal{E}^2(0)\left[\left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_\parallel}\frac{k_2^2}{k_1^2}\right)^2 - \frac{\alpha}{2}\frac{k_2^2}{\epsilon_\parallel}\mathcal{E}^2(0) - \frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_\parallel}k_2^2\right] . \qquad /8/$$

Далее, обозначим $a = \frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_\parallel}k_2^2$ и $b = \frac{\alpha}{2}\frac{k_2^2}{\epsilon_\parallel}$. Налицо четыре возможных случая.

1/ $b<0$, $c>0$ $(\alpha<0)$.

В этом случае электрическое поле в нелинейной области описывается формулой

$$\mathcal{E}_1^{II}(z) = \delta\, \mathrm{cn}[\gamma(z - z\ )/m] , \qquad /9/$$

где $m = \frac{a+(a^2+4|b|c)^{1/2}}{2(a^2+4|b|c)^{1/2}}$ есть модуль эллиптической функции Якоби $\mathrm{cn}(u/m)$ [8] и $\delta = \left[\frac{a+(a^2+4|b|c)^{1/2}}{2|b|}\right]^{1/2}$, $\gamma = (a^2+4|b|c)^{1/4}$.

Эллиптическая функция Якоби $\mathrm{cn}(u/m)$ имеет период $4K(m)$, где $K(m)$ есть полный эллиптический интеграл первого рода [8]. Из /9/ следует, что $[\mathcal{E}_1^{II}(z)]^2$ имеет максимумы в точках $z_n = z_0 + n\ell$, $n = 0,1,2,\dots$, где $\ell_1 = 2K(m)/\gamma$ - расстояние между соседними максимумами, а $\mathcal{E}_{1,max}^{II} = \delta$. Непрерывность $\mathfrak{D}_3$ при $z=0$ и $z=d$ приводит к следующим соотношениям:

$$\mathcal{E}(0) = \delta\, \mathrm{cn}(\gamma z_0), \quad A = \delta e^{k_3 d}\, \mathrm{cn}[\gamma(d - z_0)] ,$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_\parallel}\frac{k_2^2}{k_1} = \gamma\, \mathrm{sn}(\gamma z_0)\, \mathrm{dn}(\gamma z_0)\, \mathrm{nc}(\gamma z_0) , \qquad /10/$$

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_\parallel}\frac{k_2^2}{k_3} = \gamma\, \mathrm{sn}[\gamma(d - z_0)]\, \mathrm{dn}[\gamma(d-z_0)]\, \mathrm{nc}[\gamma(d-z_0)] .$$

Решая систему /10/, мы найдем z_0 и законы дисперсии двух ветвей оптических поверхностных мод, $\omega_1 = \omega_1(k, \mathcal{E}(0))$, $\omega_2 = \omega_2(k, \mathcal{E}(0))$, относящихся к границам I-II и II-III соответственно.

2/ $b<0$, $c<0$ $(\alpha<0)$.

В этом случае решение /7/ дается формулой

$$\mathcal{E}_1^{II}(z) = \rho\, \mathrm{dn}[\beta(z - z_0)/p] ,$$

$$p = \frac{2(a^2 - 4|b|\,|c|)^{1/2}}{a+(a^2-4|b|\,|c|)^{1/2}}, \quad \beta = \left[\frac{a+(a^2-4|b|\,|c|)^{1/2}}{2}\right]^{1/2} , \qquad /11/$$

$$\rho = \left[\frac{a+(a^2-4|b|\,|c|)^{1/2}}{2|b|}\right]^{1/2} .$$

Хорошо известно, что эллиптическая функция Якоби $\mathrm{dn}(u/p)$ имеет период $2K(p)$ [8]. Следовательно, $[\mathcal{E}_1^{II}(z)]^2$ имеет максимумы в точках $z_n = z_0 + n\ell_2$, $n = 0,1,2,\dots$, где $\ell_2 = 2K(p)/\beta$ - расстояние между соседними максимумами и $\mathcal{E}_{1,max}^{II} = \rho$.

Законы дисперсии двух ветвей поверхностных мод $\omega_1 = \omega_1(k, \mathcal{E}(0))$, $\omega_2 = \omega_2(k, \mathcal{E}(0))$ и точка максимума z_0 находятся из системы уравнений

$$\mathcal{E}(0) = \rho\, \mathrm{dn}(\beta z_0), \quad A = \delta e^{k_3 d}\, \mathrm{dn}[\beta(d - z_0)],$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_\parallel}\,\frac{k_2^2}{k_1} = p\beta\,\mathrm{sn}(\beta z_0)\,\mathrm{cn}(\beta z_0)\,\mathrm{nd}(\beta z_0), \qquad /12/$$

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_\parallel}\,\frac{k_2^2}{k_3} = p\beta\,\mathrm{sn}[\beta(d - z_0)]\,\mathrm{cn}[\beta(d - z_0)]\,\mathrm{nd}[\beta(d - z_0)].$$

Случаи 1/ и 2/ были детально исследованы нами недавно в работе [9]. Однако уравнение /5/ имеет и два других решения.

3/ $b > 0, \quad c > 0 \quad (a > 0)$.

В этом случае решение /7/ имеет вид

$$\mathcal{E}_1^{II}(z) = \delta'\,\mathrm{cs}[\gamma'(z - z_0)/m'], \qquad /13/$$

где

$$\mathrm{cs}(u/m') = \mathrm{cn}(u/m')/\mathrm{sn}(u/m'),$$

$$m' = \frac{2(a^2 - 4bc)^{1/2}}{a + (a^2 - 4bc)^{1/2}}, \qquad \delta' = \left[\frac{2c}{a - (a^2 - 4bc)^{1/2}}\right]^{1/2},$$

$$\gamma' = \left[\frac{a + (a^2 - 4bc)^{1/2}}{2}\right]^{1/2}.$$

В этом случае электрическое поле в нелинейной среде имеет сингулярность в точке $z = z_0$. Как было отмечено Марадудиным в [5], эта сингулярность может быть устранена, если, например, в тензор диэлектрической проницаемости ввести затухание.

Уравнения для нахождения z_0 и законов дисперсии двух поверхностных волн $\omega_1 = \omega_1(k, \mathcal{E}(0))$, $\omega_2 = \omega_2(k, \mathcal{E}(0))$ выглядят следующим образом:

$$\mathcal{E}(0) = \delta'\,\mathrm{cs}(\gamma' z_0), \quad A = \delta' e^{k_3 d}\,\mathrm{cs}[\gamma'(d - z_0)],$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_\parallel}\,\frac{k_2^2}{k_1} = \gamma'\,\mathrm{ns}(\gamma' z_0)\,\mathrm{ds}(\gamma' z_0)\,\mathrm{sc}(\gamma' z_0), \qquad /14/$$

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_\parallel}\,\frac{k_2^2}{k_3} = \gamma'\,\mathrm{ns}[\gamma'(d - z_0)]\,\mathrm{ds}[\gamma'(d - z_0)]\,\mathrm{sc}[\gamma'(d - z_0)].$$

4/ $b > 0, \quad c < 0 \quad (a > 0)$.

В этом случае мы имеем

$$\mathcal{E}_1^{II}(z) = \rho'\,\mathrm{ds}[\beta'(z - z_0)/p'], \qquad /15/$$

где $\mathrm{ds}(u/p') = \mathrm{dn}(u/p')/\mathrm{sn}(u/p')$,

$$p' = \frac{a + (a^2 + 4b|c|)^{1/2}}{2(a^2 + 4b|c|)^{1/2}}, \quad \rho' = \frac{(a^2 + 4b|c|)^{1/4}}{b^{1/2}}, \quad \beta' = (a^2 + 4b|c|)^{1/4}.$$

Численно значение z_0 - точка, в которой электрическое поле имеет сингулярность, и законы дисперсии $\omega_1 = \omega_1(k, \mathcal{E}(0))$, $\omega_2 = \omega_2(k, \mathcal{E}(0))$ находятся из системы уравнений

$$\mathcal{E}(0) = \rho'\,\mathrm{ds}(\beta' z_0), \quad A = \rho' e^{k_3 d}\,\mathrm{ds}[\beta'(d - z_0)],$$

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_\parallel}\,\frac{k_2^2}{k_1} = \beta'\,\mathrm{cs}(\beta' z_0)\,\mathrm{ns}(\beta' z_0)\,\mathrm{sd}(\beta' z_0), \qquad /16/$$

$$\frac{\epsilon_3}{\epsilon_\parallel}\,\frac{k_2^2}{k_3} = \beta'\,\mathrm{cs}[\beta'(d - z_0)]\,\mathrm{ns}[\beta'(d - z_0)]\,\mathrm{sd}[\beta'(d - z_0)].$$

То обстоятельство, что электрическое поле в оптически одноосной нелинейной среде является периодической функцией z и имеет максимумы в точках $z_n = z_0 + n\ell \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$, по-видимому, обусловлено интерференцией нелинейных волн, отраженных от двух границ: I–II и II–III соответственно.

Отметим в заключение, что для нашей системы типа "сэндвича" представляет интерес и анализ особенностей поведения распространения s-поляризованных поверхностных поляритонов. Результаты его будут опубликованы в следующей работе.

Мы признательны профессору В.М.Аграновичу за стимулирующие замечания, а также доктору Н.Ангелеску и доктору В.Б.Приезжеву за обсуждение деталей данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mills D.L., Burstein E. Rep.Prog.Phys., 1974, vol.37, p.817.
2. Агранович В.М. УФН, 1975, т.115, с.199.
3. Агранович В.М., Бабиченко В.С., Черняк В.Я. Письма в ЖЭТФ, 1980, т.32, с.532.
4. Fedyanin V.K., Mihalache D. JINR, E17-81-121, Dubna, 1981.
5. Maradudin A.A. Z.Phys., 1981, vol.B41, p.341.
6. Tomlinson W.J. Optics Lett., 1980, vol.5, p.323.
7. Ломтев А.И. Письма в ЖЭТФ, 1981, т.34, с.64.
8. Abramowitz M.A., Stegun I.A. Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington, 1964.
9. Михалаке Д., Федянин В.К. ОИЯИ, Р17-81-498, Дубна, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 1981 года.