сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

29/2-82

4/1-82

P17-81-659

В.Е.Гришин, В.К.Федянин

# СТРУКТУРА СОЛИТОНА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ ЗАРЯДА ДЛЯ МОДЕЛИ $\varphi^4$ С САМОДЕЙСТВИЕМ ТОКОВ

1981

Целью данной работы является оценка вклада односолитонного решения при вычислении формфактора заряда в первом борновском приближении. Рассмотрим изученную ранее в работах /1,2/ модель комплексного скалярного поля с плотностью лагранжиана

$$L = |\partial_\mu \phi|^2 - m^2 |\phi|^2 + g_1 |\phi|^4 + g_2\, j_\mu j^\mu, \qquad /1/$$

где $j_\mu = \frac{i}{2}(\phi^* \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^*) = \frac{i}{2}\phi^* \overleftrightarrow{\partial_\mu} \phi$ - зарядовый векторный ток; $\mu = 0,1$. В системе $\hbar = c = 1$, размерность $g_1$, $g_2$, есть $[g_1] = m^2$, $[g_2] = 1$. Вследствие инвариантности модели с лагранжианом /1/ относительно калибровочных преобразований общего вида / $U(1)$ -симметрия/:

$$\phi'(x,t) = \phi(x,t)\, e^{i\theta}, \quad \theta - \mathrm{const},$$

существует инвариантный ток, задаваемый формулой

$$J_\mu = 2 \cdot j_\mu\, (1 + g_2 |\phi|^2) \qquad /2/$$

и удовлетворяющий уравнению непрерывности

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \qquad /3/$$

в решениях /2/ для уравнения движения $\delta L / \delta \phi^* = 0$ или

$$(\Box + m^2)\phi = 2 g_1 |\phi|^2 \cdot \phi + g_2 \frac{\delta(j_\mu j^\mu)}{\delta \phi^*}, \qquad /4/$$

$$\delta(j_\mu j^\mu)/\delta\phi^* = \phi |\partial_\mu \phi|^2 - \phi^* (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}\phi^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi^* + \frac{1}{2}|\phi|^2 \partial_\mu \partial^\mu \phi .$$

Причем, $a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a_\mu b_\nu = a_0 b_0 - a_1 b_1$, тензор $g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ задает псевдоевклидову метрику. Очевидно, что /3/ есть дифференциальный закон сохранения. Интегральной сохраняющейся величиной является заряд $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} J_0\, dx$, соотношение $\partial Q / \partial t = 0$ выполняется в решениях уравнения /4/. Решения, ранее полученные в работе /2/, могут быть записаны в явной лоренц-инвариантной форме:

$$\phi = \left(\frac{k_\mu k^\mu}{g_1 + g_2 \cdot p_\mu p^\mu}\right)^{1/2} \mathrm{ch}^{-1} [\epsilon_{\mu\nu} \cdot k_\mu x_\nu] \cdot e^{i p_\mu x^\mu}, \qquad /5/$$

здесь $\epsilon_{\mu\nu} = -\epsilon_{\nu\mu}$ - абсолютно антисимметричный тензор; двумерные координаты и импульсы, фигурирующие в /5/, даются формулами

$$x_\mu = (t, x), \quad p_\mu = (\omega\gamma, v\cdot\omega\cdot\gamma),$$
$$k_\mu = (\sqrt{m^2-\omega^2}\cdot\gamma, \quad v\cdot\sqrt{m^2-\omega^2}\cdot\gamma), \quad \gamma = (1-v^2)^{-1/2}. \qquad /6/$$

Скалярные произведения этих векторов суть следующие инварианты:

$$p_\mu p^\mu = \omega^2\gamma^2(1-v^2) = \omega^2, \qquad k_\mu k^\mu = m^2-\omega^2 .$$

Очевидно, что свертка

$$\epsilon_{\mu\nu} k_\mu x_\nu = k_0 x_1 - k_1 x_0 = \gamma\sqrt{m^2-\omega^2}\cdot(x - v\cdot t)$$

определяет лоренцев сдвиг, а

$$p_\mu x^\mu = p_0 x_0 - p_1 x_1 = \gamma\cdot\omega\cdot(t - v\cdot x)$$

- поворот. При переходе от классической теории к квантовой существуют различные слособы квантования частицеподобных решений /ЧПР/. Это прежде всего квантование, использующее представление Шредингера, в котором состояние квантовой системы описывается функционалом $\Psi[\phi]$ на конфигурационном пространстве классических полей. Соединение этого подхода с операторным формализмом рассматривается в работах[3,4]. Каноническое квантование в окрестности односолитонного решения для поля $\hat{\Phi} = \phi_s + \delta\phi$ и связанное с ним вычисление средних от оператора поля $\hat{\Phi}$ по односолитонным состояниям $|p_1\rangle$, $|p_2\rangle$, то есть использование матричных элементов вида $\langle p_2|\hat{\Phi}|p_1\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(p_2-p_1)x}\phi_s\cdot dx$, определенных с точностью до квантовых поправок, подробно рассматривалось в работе[3]. Подобная ситуация рассматривается в данной работе, где используется матричный элемент для плотности заряда $\langle p_2|\hat{J}_0|p_1\rangle$ в импульсном представлении. Связь с координатным представлением соответствующего матричного элемента осуществляется, как обычно, через фурье-преобразование. Используя разложение по базисным состояниям, имеем для формфактора $f(q)$

$$f(p_2,p_1) = \langle p_2|\hat{J}_0|p_1\rangle = \iint \langle p_2|x_2\rangle\, dx_2 \langle x_2|J_0|x_1\rangle\, dx_1\cdot\langle x_1|p_1\rangle, \qquad /7/$$

где $|p\rangle$, $|x\rangle$ - базисные векторы с условием ортонормируемости

$$\int \langle p_2|x\rangle\, dx \langle x|p_1\rangle = \langle p_2|p_1\rangle = \delta(p_2-p_1)$$

и обычной матрицей преобразования $\langle p|x\rangle = e^{-ipx}$. Используя то обстоятельство, что $J_0(x_2,x_1) = J_0(x_2-x_1)\cdot\delta(x_2-x_1)$, имеем для $f(p_2,p_1)$ из /7/

$$f(p_2,p_1) \equiv f(q) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_0(x)\, e^{-iqx}\, dx, \qquad /8/$$

где $q = p_2 - p_1$ - передача импульса.

Нормируя /8/ на величину заряда

$$Q=f(0)=\int_{-\infty}^{\infty} J_0(x)\,dx=\frac{4\omega\cdot k_0}{(g_1+g_2\omega^2)}\left[1+\frac{2}{3}\,\frac{g\cdot k_0^2}{(1+g\omega^2)}\right], \qquad /9/$$

где $g=g_2/g_1$, $k_0^2=m^2-\omega^2$, определяем зарядовый формфактор, нормированный уже на 1 по формуле

$$F(q)=\frac{f(q)}{Q}. \qquad /10/$$

Вычислим /10/ на семействе односолитонных решений /5/. С этой целью, фиксируя вектор $k_\mu=(k_0,0)$ и подставляя /5/ в /10/, имеем после несложных вычислений

$$F(q)=\frac{1}{(3+g\omega^2+2gm^2)}\cdot\frac{\left(\frac{\pi q}{2k_0}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi q}{2k_0}\right)}\left[(3+g\omega^2+2gm^2)+g\cdot\frac{q^2}{2}\right], \qquad /11/$$

$$g=g_2/g_1,\quad k_0=(k_\mu k^\mu)^{1/2},\quad k_\mu=(k_0,0).$$

В пределе $q\to 0$ мы, естественно, получим $F(0)=1$. Если мы разложим /11/ по малым $q$ и оставим члены до $q^2$, то получим

$$F(q)\approx 1-\frac{1}{2}\cdot q^2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2k_0}\right)^2-\frac{g}{3+g\omega^2+2gm^2}\right]=1-\frac{1}{2}q^2\langle x^2\rangle, \qquad /12/$$

где

$$\langle x^2\rangle=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2k_0}\right)^2-\frac{g}{3+g\omega^2+2gm^2} \qquad /13/$$

можно интерпретировать, как среднеквадратичный радиус распределения плотности заряда солитона. Из выражения /13/ видно, что при $g=g_2/g_1>0$ происходит "сжатие" распределения плотности заряда солитона. Случай $g=0$ характеризуется тем, что наблюдается явная корреляция между размерами солитона/см. /5//: $L_s\simeq 1/(m^2-\omega^2)^{1/2}$, с фиксированным вектором $k_\mu=(k_0,0)$ /система $v=0$/ и его среднеквадратичным радиусом:

$$\langle x^2\rangle=\frac{\pi^2}{12}\cdot L_s^2\ :\ \langle x^2\rangle^{1/2}\sim L_s.$$

Рассмотрим асимптотическое поведение /11/ для больших $q$. Введем величину $q_c=2k_0/\pi=\frac{2}{\pi}(k_\mu k^\mu)^{1/2}$ и будем рассматривать /11/ для $q\gg q_c$. Тогда асимптотика формфактора имеет вид

$$F(q)\simeq\frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{q}{q_c}\cdot e^{-q/q_c}\cdot\left[1+\frac{g}{(3+g\omega^2+2gm^2)}\cdot\frac{q^2}{2}\right], \qquad /14/$$

отличительной особенностью такого поведения является то, что эту асимптотику невозможно получить, просуммировав полный ряд теории возмущений. С учетом сделанных выше выводов выражение /11/ можно теперь переписать в безразмерной форме. Для этого введем естественный масштаб $z = \pi q/2k_0$. $F(z)$ по /11/ перепишется в виде

$$F(z) = \frac{z}{\operatorname{sh} z} \cdot \left[ 1 + \frac{g}{2} \left(\frac{2k_0}{\pi}\right)^2 \cdot \frac{z^2}{(3 + g\omega^2 + 2gm^2)} \right]. \qquad /15/$$

Вводя далее безразмерные величины $\tilde{g} = gm^2$:

$$\tilde{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{m^2}, \quad k_0^2 = m^2(1 - \tilde{\omega}^2), \quad \tilde{k}_0 = \frac{k_0}{m},$$

окончательно получим выражение формфактора в полностью безразмерной форме:

$$F(z) = \frac{z}{\operatorname{sh} z} \left[ 1 + 2g\left(\frac{k_0}{\pi}\right)^2 \frac{z^2}{3 + (2 + \omega^2)g} \right], \qquad /16/$$

мы опустили в /16/ знак тильды. Поведение структурного формфактора /16/ в функции передачи импульса $z$ представлено на рис.1.

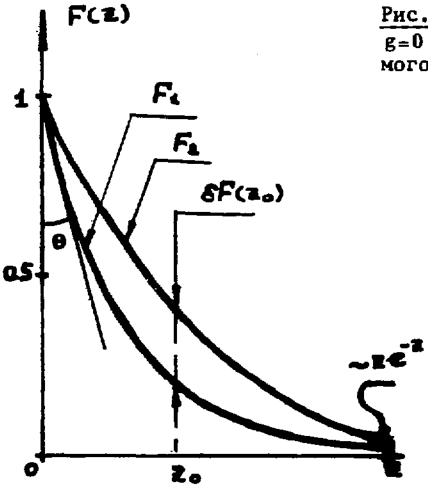


Рис.1. $F_1$ -модель $\phi^4$/случай $g=0$ /; $F_2$ - включение слагаемого $(j_\mu j^\mu)$, $g > 0$.

Рис.1 хорошо иллюстрирует основные особенности модели с лагранжианом /1/. Наклоны кривых на рис.1 при $q=0$ определяются среднеквадратичным радиусом $F'(0) \equiv \partial F/\partial q^2 = -\frac{1}{2} \langle x^2 \rangle = -\operatorname{tg}\theta$. Включение слагаемого, описывающего взаимодействие токов $(j_\mu j^\mu)$, приводит к появлению дополнительного слагаемого в /16/:

$$\delta F = F_2 - F_1 = a\frac{z^3}{\operatorname{sh} z} > 0, \quad \left(a = \frac{2g\cdot k_0^2}{\pi^2[3+(2+\omega^2)g]}\right).$$

Мы видим, что такая степенная добавка приводит к более пологому изменению $F(z)$ в области "промежуточных" $z \sim z_0$. Максимальная величина отклонения находится из условия

$$\frac{d(\delta F)}{dz} = 0,$$

определяющего $z$. Для $z$ имеет трансцендентное уравнение, которое всегда имеет решения $3\operatorname{th} z_0 = z_0$ и $\operatorname{Max}(\delta F) = \delta F(z_0)$.

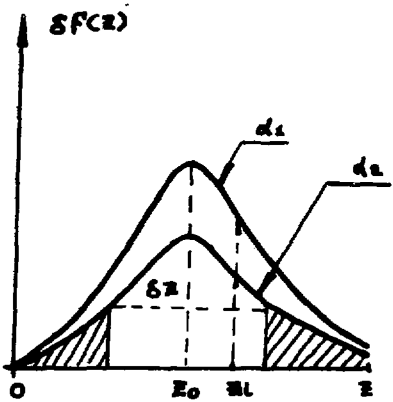


Рис.2. В области "промежуточных" передач импульса /17/ существенный вклад в формфактор $F(z)$ вносит компонента слагаемого $g_2(j_\mu j^\mu)$ из лагранжиана /1/, здесь $a_1 > a_2$.

Отметим, что положение максимумов /точка $z_0$ / для различных констант $a_1$, $a_2$ не зависит от константы взаимодействия /рис.2/, что представляется нам существенным. Величину $z_0$ можно принять за эффективный радиус взаимодействия токов $(j_\mu j^\mu)$. Так как для малых передач импульсов, $z \ll z_0$,

$$\delta F(z) \simeq a\frac{z^2}{1+\frac{1}{6}z^2} \sim O(z^2),$$

а для больших передач импульсов, $z \gg z_0$,

$$\delta F(z) \simeq a\cdot z^3 e^{-z},$$

то вклад от взаимодействия токов будет существенным лишь в области "промежуточных" передач импульса:

$$\{z_1:[z_0-\frac{\delta z}{2}]<z_1<[z_0+\frac{\delta z}{2}]\}. \qquad /17/$$

Асимптотическое поведение формфактора /16/ для больших передач импульса приводит к представлению о солитоне /5/ как об объекте с бесконечным числом составляющих и об однородном распределении заряда в области локализации.

Заметим, что в работе /1/ аналогичная модель с лагранжианом /1/ в пространстве /1+3/ рассматривалась как реалистическая модель теории поля. Изучались свойства стационарного решения для радиальной составляющей $S(\rho)$. Аналитическое решение для этой функции в случае /1+3/ неизвестно. В работе /1/ дана лишь оценка для среднеквадратичного радиуса распределения плотности заряда триплета пи-мезонов ($\pi^{\pm}, \pi^{0}$). Он оказался порядка $\langle r^2 \rangle^{1/2} \simeq 2{,}2$ Фм. *Полная зависимость* формфактора $F(q)$ от $q^2$, естественно, также неизвестна. Мы надеемся, что наши результаты могут послужить основой для эвристических оценок поведения структурного формфактора.

В заключение авторы благодарят А.В.Ефремова и А.В.Радюшкина за полезные обсуждения и дискуссии по результатам данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rañada A.F., Rañada M.F. Journ. of Math.Phys., 1977, vol.18, No.12.
2. Гришин В.Е. и др. ОИЯИ, Р2-1226, Дубна, 1979; Grishin V.E. Phys.Lett., 1980, nol.78A, No.5,6.
3. Jackiw R. Rev.Mod.Phys., 1977, 49, p.681.
4. Goldstone J., Jackiw R. Phys.Rev., 1975, D11, p.1486.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 октября 1981 года.