сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-81-641

С.Н.Бочков, Н.Г.Иноземцева, Б.И.Садовников

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БОЛЬЦМАНА-ЭНСКОГА

1981

I. ВВЕДЕНИЕ

Проблема изучения асимптотического поведения временных автокорреляционных функций рассматривалась в рамках различных подходов к описанию явлений переноса. Один из них, основанный на последовательной схеме кластерных разложений в цепочке ББГ·КИ /I-3/, позволил связать воедино "аномальные" явления в классической статистической механике твердых сфер, а также учесть эффекты высших порядков по плотности в системе. Достоинством другого подхода, основанного на анализе нелинейных особенностей кинетических уравнений типа уравнений Больцмана /4,5/ либо Больцмана-Энскога, является возможность непосредственного выделения роли нелинейных эффектов при приближении статистических систем к состоянию равновесия. Следует отметить, что интерес к одночастичным кинетическим уравнениям при описании эффектов высшего порядка по плотности был в значительной степени стимулирован работой Н.Н.Боголюбова /6/, впервые установившего и строго доказавшего существование точных микроскопических решений для этого класса уравнений.

В настоящей работе проведено исследование асимптотических свойств временных автокорреляционных функций для нелинейной обобщенной модели Больцмана-Энскога, содержащей дальнодействующую компоненту взаимодействия между частицами.

Как было показано в работе /6/, эта модель обладает точными микроскопическими решениями и может быть использована для изучения высших приближений по плотности. Отметим, что модель рассматривалась ранее в работе /7/, где были определены поправки к скорости звука с учетом дальнодействия в системе, а также собственные функции линеаризованного оператора Больцмана-Энскога с дальнодействующей компонентой. Здесь мы покажем, как, исходя из результатов работы /7/, найти замкнутое выражение для определения коэффициентов в асимптотическом разложении автокорреляционных функций скорости и термодиффузии.

2. АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ В ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ БОЛЬЦМАНА-ЭНСКОГА С ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕЙ КОМПОНЕНТОЙ

Кинетическое уравнение модели может быть записано в виде

$$\frac{\partial f(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial f(t,\vec{r},\vec{v})}{\partial \vec{r}} = na^2 \int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}\geq 0} [(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}][f(t,\vec{r},\vec{v}^*)f(t,\vec{r}+a\vec{\sigma},\vec{v}'^*) - \tag{I}$$

$$- f(t,\vec{r},\vec{v})f(t,\vec{r}-a\vec{\sigma},\vec{v}')]d\vec{v}'d\vec{\sigma} + \frac{n}{m}\int \frac{\partial \Phi(|\vec{r}'-\vec{r}|)}{\partial \vec{r}}\rho(t,\vec{r}')d\vec{r}'\frac{\partial}{\partial \vec{v}}f(t,\vec{r},\vec{v}),$$

где $\rho(t,\vec{r}') = \int f(t,\vec{r}',\vec{v}')d\vec{v}'$; $\vec{\sigma}$ - единичный вектор;

$\vec{v}^* = \vec{v} + \vec{\sigma}((\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma})$; $\vec{v}'^* = \vec{v}' - \vec{\sigma}((\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma})$;

a - диаметр области "жесткого" соударения; $\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)$ – дальнодействующая компонента потенциала взаимодействия двух частиц в системе.

Автокорреляционные функции могут быть представлены в форме

$$C_\delta(t) = \lim_{\substack{V\to\infty \\ n=N/V=const}} V^{-1}\left\langle \sum_k j_\delta(v_k(0)) \sum_l j_\delta(v_l(t))\right\rangle, \tag{2}$$

где V - объем системы взаимодействующих частиц; $\langle \dots \rangle$ - усреднение по равновесному большому каноническому ансамблю; $v_k(t)$ - скорость k-той частицы в момент времени t, $\delta = (\eta, \lambda)$:

$$j_\eta(\vec{v}) = mv_x v_y;\quad j_\lambda(\vec{v}) = \frac{1}{2}(mv^2 - 5\beta^{-1})v_x;\quad \beta = \frac{1}{k_B T}; \tag{3}$$

T - температура; m - масса частицы.

Для произвольного взаимодействия в системе выражение (2) может быть преобразовано к виду

$$C_\delta(t) = n^2 \int d\vec{v}_0\, \varphi(v_0) j_\delta(\vec{v}_0) \int d\vec{r}\, d\vec{v}\, \varphi(v) j_\delta(\vec{v}) \psi(t,\vec{r},\vec{v}), \qquad (4)$$

$\psi(t,\vec{r},\vec{v})$ - отклонение функции распределения $f(t,\vec{r},\vec{v})$ от равновесного значения $\varphi(v)$.

Будем использовать систему нормировки, в которой

$$\varphi(v) = \left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{1}{2}\beta m v^2},$$

при этом

$$f(t,\vec{r},\vec{r}) = \varphi(v)\,(1 + \psi(t,\vec{r},\vec{v})).$$

Заметим, что следствием преобразования формулы (2) к виду (4) является ограничение на функцию $\psi(t,\vec{r},\vec{v})$:

$$\psi(0,r,v) = [n\,\varphi(v_0)]^{-1} N(\vec{r}-\vec{r}_0)\,\delta(\vec{v}-\vec{v}_0) + f(\vec{r}), \qquad (5)$$

здесь $f(\vec{r})$ - произвольная функция координат; первое слагаемое в (5) описывает δ-образное отклонение от равновесия по скоростям в начальный момент времени. Выражение (5) содержит значительный произвол; величина v_0 может быть выбрана в интервале $(-\infty,\infty)$. Единственным ограничением на $N(\vec{r}-\vec{r}_0)$ является условие нормировки:

$$\int d\vec{r}\, N(\vec{r}-\vec{r}_0) = 1. \qquad (6)$$

Следует, однако, подчеркнуть, что подобный произвол устраняется при интегрировании в процессе вычисления $C_\delta(t)$.

Таким образом, для вычисления автокорреляционных функций согласно (4) необходимо, как и в случае уравнения Больцмана-Энскога, найти решение уравнения (I) с начальным условием (5).

С учетом соотношения

$$f(t,\vec{r},\vec{v}) = \varphi(v)(1+\psi(t,\vec{r},\vec{v}))$$

имеем для функции $\psi(t,\vec{r},\vec{v})$ уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}} - n\hat{\Lambda}(\vec{v})\psi(t,\vec{r},\vec{v}) = na^2\int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}>0}[(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}]\hat{T}[\psi(t,\vec{r},\vec{v})\psi(t,\vec{r},\vec{v}')]\varphi(v')d\vec{v}'d\vec{\sigma} +$$

$$+\frac{n}{m}\frac{1}{\varphi(v)}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\int d\vec{r}'d\vec{v}'\varphi(v')\psi(t,\vec{r}',\vec{v}')\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)+ \tag{7}$$

$$+\frac{n}{m}\frac{1}{\varphi(v)}\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial\vec{v}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\int d\vec{r}'d\vec{v}'\varphi(v')\psi(t,\vec{r}',\vec{v}')\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|),$$

где операторы $\hat{\Lambda}(\vec{v})$ и $\hat{T}$ определены следующими соотношениями:

$$\hat{\Lambda}(\vec{v})\psi(t,\vec{r},\vec{v}) = a^2\int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}>0}[(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}][\psi(t,\vec{r},\vec{v}^{*}) + \psi(t,\vec{r}+a\vec{\sigma},\vec{v}'^{*}) - \tag{8}$$

$$-\psi(t,\vec{r},\vec{v}) - \psi(t,\vec{r}-a\vec{\sigma},v')]\varphi(\vec{v}')d\vec{v}'d\vec{\sigma},$$

$$\hat{T}[\psi(t,\vec{r},\vec{v})\psi(t,\vec{r},\vec{v}')] = \psi(t,\vec{r},\vec{v}^{*})\psi(t,\vec{r}+a\vec{\sigma},\vec{v}^{*}) - \psi(t,\vec{r},\vec{v})\psi(t,\vec{r}-a\vec{\sigma},\vec{v}). \tag{9}$$

Отметим, что эффекты конечных размеров области "жесткого" соударения рассматривались ранее в работах /5,8-9/, где было показано, что смещение пространственных аргументов в (8) и (9) на $\pm a\vec{\sigma}$ приводит к поправкам высшего порядка по плотности системы. Здесь при рассмотрении влияния дальнодействующей компоненты в потенциале бинарного взаимодействия частиц системы мы будем считать, что

$$a \ll \left(\frac{|\mathrm{grad}\,\Phi|}{|\Phi|}\right)^{-1},$$

то есть размеры области "жесткого" соударения значительно меньше расстояний, на которых существенно изменяется потенциал Φ. В уравнении (7), таким образом, будем использовать операторы $\hat{\Lambda}_0(\vec{v})$, $\hat{T}_0$:

$$\hat{\Lambda}_0(\vec{v})\psi(t,\vec{\tau},\vec{v}) = a^2 \int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}\geq 0} [(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}][\psi(t,\vec{\tau},\vec{v}^*) + \psi(t,\vec{\tau},\vec{v}'^*) - \tag{10}$$

$$- \psi(t,\vec{\tau},\vec{v}) - \psi(t,\vec{\tau},\vec{v}')]\varphi(v')d\vec{v}'d\vec{\sigma} \quad -$$

– линеаризованный оператор Больцмана;

$$\hat{T}_0[\psi(t,\vec{\tau},\vec{v})\psi(t,\vec{\tau},\vec{v}')] = \psi(t,\vec{\tau},\vec{v}^*)\psi(t,\vec{\tau},\vec{v}'^*) - \psi(t,\vec{\tau},\vec{v})\psi(t,\vec{\tau},\vec{v}'). \tag{11}$$

Нелинейное уравнение (7) естественно исследовать методом теории возмущений. Действительно, для асимптотически больших значений t возмущение $\psi(t,\vec{\tau},\vec{v})$ мало $(f(t,\vec{\tau},\vec{v}) \to \varphi(v),\ t \to \infty)$.

В области малых t нелинейная часть уравнения (7), соответствующая "жесткому" бинарному соударению, также мала по сравнению с линейными слагаемыми, поскольку

$$\int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}\geq 0} \hat{T}_0[\psi(t,\vec{\tau},\vec{v})\psi(t,\vec{\tau},\vec{v}')][(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}]\varphi(v')d\vec{v}'d\vec{\sigma} = 0.$$

Отдельного рассмотрения требует последнее нелинейное слагаемое в (7).

При малых t оно содержит производную от $\delta(\vec{v}-\vec{v}_0)$. Однако, как легко видеть, выражение для автокорреляционных функций (4) содержит усреднение по $\vec{v}_0$. При усреднении (7) по $\vec{v}_0$ нелинейный член $\frac{\partial}{\partial v}(\varphi\psi)$ исчезает, таким образом, для этих целей теорию возмущения можно использовать и в окрестности точки $t = 0$.

Представляя искомое решение уравнения (7) в виде (I2):

$$\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)} + \ldots, \tag{I2}$$

получим с учетом соотношений (I0), (II) и предположения $\psi^{(0)} >> \psi^{(1)}$ линеаризованное уравнение для $\psi^{(0)}$:

$$\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial \vec{r}} - n\hat{\Lambda}_0 \psi^{(0)} - \frac{n}{m}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\int d\vec{r}' d\vec{v}' \varphi(v')\psi^{(0)}(t,\vec{r}',\vec{v}')\,\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|) = 0. \tag{I3}$$

Для следующего члена разложения (I2), очевидно, имеет место неоднородное уравнение:

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \vec{r}} - n\hat{\Lambda}_0 \psi^{(1)} - \frac{n}{m}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\int d\vec{r}' d\vec{v}' \varphi(v')\psi^{(1)}(t,\vec{r}',\vec{v}')\,\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|) =$$
$$= na^2 \int\limits_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}>0} [(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}]\,\hat{T}[\psi^{(0)}(t,\vec{r},\vec{v})\,\psi(t,\vec{r},\vec{v}')]\,\varphi(v')\,d\vec{v}' d\vec{\sigma} + \tag{I4}$$
$$+ \frac{n}{m}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial(\varphi\psi^{(0)})}{\partial \vec{v}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\int d\vec{r}' d\vec{v}' \varphi(v')\psi^{(0)}(t,\vec{r}',\vec{v}')\,\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|).$$

Отметим, что начальные условия для $\psi^{(0)}$, $\psi^{(1)}$ можно выбрать в виде

$$\psi^{(0)}(0,\vec{r},\vec{v}) = \psi(0,\vec{r},\vec{v}),$$
$$\psi^{(1)}(0,\vec{r},\vec{v}) = 0. \tag{I5}$$

Однородное уравнение (I3) не содержит явной зависимости от аргумента t; поэтому его решение с начальным условием (I5) может быть легко найдено:

$$\psi^{(0)}(t,\vec{r},\vec{v}) = e^{-\hat{W}_0(\vec{v})t}\,\psi(0,\vec{r},\vec{v}), \tag{I6}$$

где

$$\hat{W}_0(\vec{v})\eta(\vec{r},\vec{v}) = [\vec{v}\frac{\partial}{\partial \vec{r}} - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})]\eta(\vec{r},\vec{v}) -$$
$$- \frac{1}{\varphi}\frac{n}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{v}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\int d\vec{r}' d\vec{v}' \varphi(v')\eta(\vec{r}',\vec{v}')\,\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|). \tag{I7}$$

Поскольку зависимость правой части неоднородного уравнения (I4) от t может быть определена с помощью (I6), (I7), его решение с нулевым начальным условием можно представить в виде

$$\psi^{(1)}(t,\vec{z},\vec{v}) = \int_0^t e^{\hat{W}_0(v)(t'-t)} Q(t',\vec{z},\vec{v})\,dt',$$

где

$$Q(t,\vec{z},\vec{v}) = na^2 \int_{(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}>0} [(\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma}]\,\hat{T}_0\,[e^{-\hat{W}_0(\vec{v})t}\psi(0,\vec{z},\vec{v})\,e^{-\hat{W}_0(\vec{v}')t}\psi(0,\vec{z},\vec{v}')]\,d\vec{v}\,d\vec{\sigma} +$$

(I8)

$$+\frac{n}{m}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}(\varphi e^{-\hat{W}_0(\vec{v})t}\psi(0,\vec{z},\vec{v}))\frac{\partial}{\partial \vec{z}}\int d\vec{z}'d\vec{v}'\varphi(v')e^{-\hat{W}_0(\vec{v}')t}\psi(0,\vec{z}',\vec{v}')\,\Phi(|\vec{z}-\vec{z}'|).$$

С учетом (I6), (I8) получим следующее разложение для автокорреляционных функций:

$$C_s(t) = C_s^{(1)}(t) + C_s^{(2)}(t), \tag{I9}$$

$$C_s^{(1)}(t) = n^2\int d\vec{v}_0\varphi(v_0)j_s(\vec{v}_0)\int d\vec{z}d\vec{v}j_s(\vec{v})\varphi(v)e^{-\hat{W}_0(\vec{v})}\psi(0,\vec{z},\vec{v}), \tag{I9a}$$

$$C_s^{(2)}(t) = n^2\int d\vec{v}_0\varphi(v_0)j_s(\vec{v}_0)\int d\vec{z}d\vec{v}j_s(\vec{v})\varphi(v)\int_0^t e^{\hat{W}_0(\vec{v})(t'-t)}Q(t',\vec{z},\vec{v})\,dt'. \tag{I9б}$$

3. АСИМПТОТИКА АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Отметим, что вследствие соотношений

$$\int d\vec{v}_0\varphi(v_0)j_s(\vec{v}_0) = 0$$

выражение (I9а) можно записать в форме

(20) $$C_s^{(1)}(t) = n\int d\vec{z}d\vec{v}j_s(\vec{v})\varphi(v)e^{-\hat{W}_0(\vec{v})t}N(\vec{z}-\vec{z}_0)j_s(\vec{v}). \tag{20}$$

Поскольку функция $N(\vec{r}-\vec{r}_0)$ нормирована условием (6), а (20) содержит интегрирование по $\vec{r}$, можно опустить в $\hat{\mathcal{V}}_\varphi(\vec{r})$ все слагаемые, содержащие оператор $\frac{\partial}{\partial \vec{r}}$, после чего найдем $C_\delta^{(1)}(t) = n\left(j_\delta(\vec{v}), e^{n\hat{\Lambda}(v)t} j_\delta(\vec{v})\right)$ – стандартное выражение для автокорреляционной функции в линеаризованной модели Больцмана, экспоненциально убывающее с ростом t /5/.

Переходя к исследованию выражения (I9б), описывающего нелинейные эффекты в нашей модели, заметим, что структура $Q(t,\vec{r},\vec{v})$ (I8) позволяет выделить в $C_\delta^{(2)}(t)$ два слагаемых:

$$C_\delta^{(2)}(t) = C_{\delta_1}^{(2)}(t) + C_{\delta_2}^{(2)}(t), \tag{2I}$$

$$C_{\delta_1}^{(2)}(t) = \frac{na^2}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\int d\vec{v}\,\varphi(v)\,j_\delta(\vec{v})\int_0^t e^{(t-t')n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})}dt' \times \tag{2Ia}$$

$$\times\int d\vec{v}'\varphi(v)\,\hat{T}_0\Big[\Big(e^{-t'\left(i\vec{k}(\vec{v}'-\vec{v})-n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})-n\hat{\Lambda}_0(\vec{v}')-i\vec{k}\left(\pi_{\vec{k}}(\vec{v})-\pi_{\vec{k}}(\vec{v}')\right)\right)}\Big)\times$$

$$\times\Big(\frac{j_\delta(\vec{v})}{\varphi(v)}|N_{\vec{k}}|^2\delta(\vec{v}-\vec{v}')+nf_{\vec{k}}N_{\vec{k}}^*j_\delta(\vec{v}')+nf_{\vec{k}}^*N_{\vec{k}}j_\delta(\vec{v})\Big)\Big],$$

где $f_{\vec{k}}$, $N_{\vec{k}}$ – фурье-образы функций $f(\vec{r})$, $N(\vec{r}-\vec{r}_0)$ соответственно; оператор $\pi_{\vec{k}}(\vec{v})$ определен соотношением

$$\pi_{\vec{k}}(\vec{v})\eta(\vec{v}) = \frac{n}{m}\,\frac{1}{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\vec{v}}\int d\vec{v}'\eta(\vec{v}')\,\tilde{\Phi}(\vec{k}), \tag{22}$$

где $\tilde{\Phi}(\vec{k})$ – фурье-образ дальнодействующей компоненты.

$$C_{\delta_2}^{(2)} = \frac{n}{m}\int d\vec{v}_0\,\varphi(v_0)\,j_\delta(\vec{v}_0)\int d\vec{r}\,d\vec{v}\,\varphi(v)\,j_\delta(\vec{v})\int_0^t e^{(t-t')n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})}dt' \times \tag{2Iб}$$

$$\times\frac{1}{\varphi(v)}\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\Big(\varphi(v)\,e^{-\hat{\mathcal{V}}_\varphi(\vec{v})t'}\Big(\frac{1}{\varphi(v_0)}N(\vec{r}-\vec{r}_0)\delta(\vec{v}-\vec{v}_0)+nf(\vec{r})\Big)\Big)\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\int d\vec{r}'d\vec{v}'\varphi(\vec{v}')\,e^{-\hat{\mathcal{V}}_\varphi(\vec{v}')t'}\Big(\frac{1}{\varphi(v_0)}N(\vec{r}'-\vec{r}_0)\delta(\vec{v}'-\vec{v}_0)+nf(\vec{r}')\Big).$$

Применяя при интегрировании по $\vec{\tau}$ в (21б) соотношение $\int f(\vec{\tau}) g(\vec{\tau}) d\vec{\tau} = \int f(\vec{k}) g(-\vec{k}) d\vec{k}$, представим выражение для $C^{(2)}_{\delta_2}(t)$ в виде

$$C^{(2)}_{\delta_2}(t) = \frac{n}{m}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\int d\vec{v}\,\varphi(v) j_\delta(\vec{v}) \int_0^t e^{(t-t')n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})} dt' \int d\vec{v}'\varphi(v') \times$$

$$\times \frac{1}{\varphi(v)}\frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\varphi(v) e^{-t'(i\vec{k}(\vec{v}-\vec{v}') - n\hat{\Lambda}_0(v) - n\hat{\Lambda}_0(v') - i\vec{k}(\pi_{\vec{k}}(\vec{v}) - \pi_{-\vec{k}}(\vec{v}')))}\right) \times \quad (23)$$

$$\times \left(\frac{j_\delta(\vec{v})}{\varphi(v)} |N_{\vec{k}}|^2 \delta(\vec{v}-\vec{v}') + n f_{\vec{k}} N^*_{\vec{k}} j_\delta(\vec{v}') + n f^*_{\vec{k}} N_{\vec{k}} j_\delta(\vec{v})\right)(-i\vec{k}\Phi(\vec{k}))).$$

Асимптотическое поведение $C^{(2)}_{\delta_1}(t)$, $C^{(2)}_{\delta_2}(t)$ при $t \to \infty$ определяется структурой особенностей функции $C^{(2)}_{\delta_i}(p) = \int_0^\infty e^{pt} C^{(2)}_{\delta_i}(t) dt$ в конечной области комплексной p - плоскости. Непосредственное вычисление $C^{(2)}_{\delta_i}(p)$ дает

$$C^{(2)}_{\delta_1}(p) = n\left(\frac{j_\delta(\vec{v})}{p - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})}, \int d\vec{v}'\varphi(v') \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3} \times\right. \quad (24а)$$

$$\left. \times \hat{T}^1_0 \left[\frac{P_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{v}')}{p + i\vec{k}(\vec{v} - \pi_{\vec{k}}(\vec{v}) + \pi_{-\vec{k}}(\vec{v}') - \vec{v}') - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v}) - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v}')}\right]\right),$$

где $(A(\vec{v}), B(\vec{v})) = \int \varphi(v) A^*(\vec{v}) B(\vec{v}) d\vec{v}$,

$$P_k(\vec{v},\vec{v}') = \frac{j_\delta(\vec{v})}{\varphi(v)} |N_{\vec{k}}|^2 \delta(\vec{v}-\vec{v}') + n f_{\vec{k}} N^*_{\vec{k}} j_\delta(\vec{v}') + n f^*_{\vec{k}} N_{\vec{k}} j_\delta(\vec{v}). \quad (25)$$

$$C^{(2)}_{\delta_2}(p) = \frac{n}{m}\left(\frac{j_\delta(\vec{v})}{p - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})}, \int d\vec{v}'\varphi(v') \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}(-i\vec{k}\Phi(\vec{k}))\frac{1}{\varphi(v)} \times\right. \quad (24б)$$

$$\left. \times \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\varphi(v)\frac{P_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{v}')}{p + i\vec{k}(\vec{v} - \pi_{\vec{k}}(\vec{v}) - \vec{v}' + \pi_{-\vec{k}}(\vec{v}')) - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v}) - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v}')}\right)\right).$$

Поскольку среди собственных значений оператора $\hat{\Lambda}_0(\vec{v})$ есть ненулевое, очевидно, что для функций (24а),(24б) точка $p=0$ является крайней правой особой точкой, и, таким образом, поведение величин(24а)-(24б) в окрестности P=0 определяет искомые ведущие члены в асимптотике автокорреляционных функций при $t\to\infty$.

Все собственные функции оператора $\hat{\Lambda}_t(\vec{v})$, соответствующие нулевому собственному значению, ортогональны $j_\varepsilon(\vec{v})$, скалярное произведение определено посредством (25); вследствие чего структуры $\dfrac{j_\varepsilon(\vec{v})}{p - n\hat{\Lambda}_t(\vec{v})}$ в (24а)-(24б)не дают сингулярной особенности в точке p=o, и достаточно исследовать выражение типа

$$\left(\frac{j_\varepsilon(\vec{v})}{-n\hat{\Lambda}_o(\vec{v})},\ \int d\vec{r}\,\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\varphi(\vec{r})\,\hat{T}_o\,\frac{\rho_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{r}\,')}{p+\hat{S}_{\vec{k}}(\vec{v})-\hat{S}_{-\vec{k}}(\vec{v}\,')} \right), \tag{26}$$

где введено обозначение

$$\hat{S}_{\vec{k}}(\vec{v}) = i\vec{k}(\vec{v}-\pi_{\vec{k}}(\vec{v})) - n\hat{\Lambda}_o(\vec{v}). \tag{27}$$

Собственные функции оператора $\hat{S}_{\vec{k}}(\vec{v})$, соответствующие собственным значениям, обращающимся в нуль при $|\vec{k}|\to 0$, были найдены в работе /7/. В нулевом приближении по $/\vec{k}/$ имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{(1,2)}_{o\vec{k}}(\vec{v}) &= \left(2\alpha(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\delta^2})\right)^{-1/2}\left(\delta\psi_o^{(1)}+(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\delta^2})\,\psi_o^{(2)}\right), \\ \tilde{\varphi}^{(j)}_{o\vec{k}} &= \psi_o^{(j)},\ j=3,4,5, \end{aligned} \tag{28}$$

где $\{\psi_o^{(j)}\}$ - ортонормированный базис собственных функций оператора Λ_o, соответствующий элементарным гидродинамическим решениям линеаризованного уравнения Больцмана с волновым вектором $\vec{k}$ /5/;

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{5}{3}} - \delta\ ; \qquad \delta = \beta n\,\tilde{\Phi}(0)\sqrt{\tfrac{3}{20}}.$$

Отметим, что функции $\tilde{\varphi}^{(1,2)}_{o\vec{k}}$ не являются взаимно ортогональными.

Разложим величину $P_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{v}')$ по собственным функциям $\hat{S}_{\vec{k}}(\vec{v})$, $\hat{S}_{\vec{k}}(v')$, оставляя лишь член с функциями (28):

$$P_{\vec{k}}(\vec{v},\vec{v}') = \sum_{i,j} P_{\vec{k}}^{(ij)} \tilde{\varphi}^{(i)}_{o\vec{k}}(\vec{v})\, \tilde{\varphi}^{(j)}_{o-\vec{k}}(\vec{v}'). \tag{29}$$

При этом для определения ведущей сингулярности в точке p=o достаточно рассмотреть вместо (24а)-(24б) выражения

$$C_{H}^{(2)}(p) \simeq n\left(\frac{j_S(\vec{v})}{-n\Lambda_o(\vec{v})}, \int d\vec{v}'\varphi(v')\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\times\right. \tag{30а}$$

$$\left.\times\sum_{i,j}\hat{T}_o P_{\vec{k}}^{(ij)}\tilde{\varphi}^{(i)}_{o\vec{k}}(\vec{v})\tilde{\varphi}^{(j)}_{o\vec{k}}(\vec{v}')(p+z_{\vec{k}}^{(i)}+z_{\vec{k}}^{(j)})^{-1}\right),$$

$$C_{\delta_2}^{(2)}(p) \simeq n/m\left(\frac{j_S(\vec{v})}{-n\Lambda_o(\vec{v})}, \int d\vec{v}'\varphi(v')\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\,\tilde{\Phi}(\vec{k})\frac{1}{\varphi(v)}\times\right. \tag{30б}$$

$$\left.\times\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\left(\varphi(v)\sum_{i,j}(p+z_{\vec{k}}^{(i)}+z_{-\vec{k}}^{(j)})P_{\vec{k}}^{(ij)}\tilde{\varphi}^{(i)}_{o\vec{k}}(\vec{v})\tilde{\varphi}^{(j)}_{o-\vec{k}}(\vec{v}')\right)\right),$$

где $z_{\vec{k}}^{(i)}$ - собственные значения $\hat{S}_{\vec{k}}(\vec{v})$, соответствующие собственным функциям $\tilde{\varphi}^{(i)}_{o\vec{k}}(\vec{v})$. Следует подчеркнуть, что $P_{\vec{k}}^{(ij)}$ не содержат величины $f_{\vec{k}}$, поскольку одночастичные токи $j_S(\vec{v})$ ортогональны всем используемым нами функциям $\tilde{\varphi}_{o\vec{k}}(\vec{v})$.

Величины $z_{\vec{k}}^{(i)}$ для малых значений $|\vec{k}|$ были вычислены в работе /7/:

$$z_{\vec{k}}^{(1,2)} \simeq \pm\frac{i}{\sqrt{\beta m}}\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\,|\vec{k}| + |\vec{k}|^2\frac{(\mathcal{D}_T+2\mathcal{D}_l)}{3}, \tag{31}$$

$$z_{\vec{k}}^{(3)} \simeq |\vec{k}|^2\mathcal{D}_T, \quad z_{\vec{k}}^{(4,5)} = |\vec{k}|^2\mathcal{D}_l,$$

где $\mathcal{D}_T$, $\mathcal{D}_l$ - коэффициенты сдвиговой вязкости и термодиффузии, определяемые из уравнения Больцмана.

Заметим, что структура особенности при p=o определяется интегрированием в (30а)-(30б) в области малых $|\vec{k}|$, причем ведущий член в (30а)-(30б), определяющий асимптотику корреляционных функций, соответствует тем слагаемым в суммах по (i,j), для которых $z_{\vec{k}}^{(i)}+z_{-\vec{k}}^{(j)} \sim |\vec{k}|^2$. Поскольку числитель подынтегрального выражения в (30б) содержит $\vec{k}$, в окрестности точки p=o $C_{\delta_1}^{(2)}(p) \gg C_{\delta_2}^{(2)}(p)$, и поэтому $C_{\delta_1}^{(2)}(t) \gg C_{\delta_2}^{(2)}(t)$ при $t\to\infty$.

Следовательно, для изучения асимптотического поведения $C_\delta^{(2)}(t)$ достаточно рассмотреть выражение

$$C_\delta^{(2)}(t) \simeq n\Big(\frac{j_\delta(\vec{v})}{-n\hat{\Lambda}_o(\vec{v})}, \int d\vec{v}'\varphi(v')\int\frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3}\times \tag{32}$$

$$\times\sum_{ij}{}'\hat{T}_o\tilde{\varphi}_{o\vec{k}}^{(i)}(\vec{v})\tilde{\varphi}_{o-\vec{k}}^{(j)}(\vec{v}')\rho_{\vec{k}}^{(ij)}e^{-t(z_{\vec{k}}^{(i)}+z_{-\vec{k}}^{(j)})}\Big),$$

где $\sum_{ij}'$ означает суммирование по значениям индексов (i,j), определяемых условием $(z_{\vec{k}}^{(i)}+z_{-\vec{k}}^{(j)}) = const\cdot k^2$. Полагая в (32) $z_{\vec{k}}^{(i)}+z_{-\vec{k}}^{(j)} = k^2(\lambda_{\vec{k}}^{(i)}+\lambda_{-\vec{k}}^{(j)})$, найдем

$$C_\delta^{(2)}(t) = -t^{-3/2}\Big(j_\delta(\vec{v}), \int\frac{d\Omega_{\vec{k}}}{4\pi}\int d\vec{v}'\varphi(v')\,\times \tag{33}$$

$$\times\sum_{ij}{}'\hat{T}_o\tilde{\varphi}_{o\vec{k}}^{(i)}(\vec{v})\tilde{\varphi}_{o-\vec{k}}^{(j)}(\vec{v}')\rho_{\vec{k}}^{(ij)}\frac{(\lambda_{\vec{k}}^{(i)}+\lambda_{-\vec{k}}^{(j)})^{-3/2}}{4\pi^{3/2}}\Big).$$

Таким образом, в нелинейной модели Больцмана-Энскога с дальнодействующей компонентой автокорреляционные функции также обладают степенной асимптотикой $t^{-3/2}$. Постоянные $\lambda_{\vec{k}}^{(i)}, \lambda_{-\vec{k}}^{(j)}$ могут быть вычислены в рамках теории Энскога; эффекты, связанные с "включением" дальнодействующей компоненты $\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)$, приводят к изменению величины коэффициента при $t^{-3/2}$ согласно (29), (33).

Авторы глубоко благодарны академику Н.Н.Боголюбову за советы и указания.

Литература

1. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М.-Л., 1946.
2. Ernst M.H., Dorfman J.R. Physica, 1972, 61, p. 157.
3. Dorfman J.R., Cohen E.G.D. Phys. Rev., 1972, A6, p. 776.
4. Ubbink J.T., Hauge E.H. Physica, 1973, 70, p. 297.
5. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. ТМФ, 1977, 31, с.260.
6. Боголюбов Н.Н. ТМФ, 1975, 24, с.242.
7. Бочков С.Н., Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. ОИЯИ, Р17-81-10, Дубна, 1981.
8. Dorfman J.R., Cohen E.G.D. Phys. Rev., 1975, A12, p. 292.
9. Sadovnikov B.I., Inozemtseva N.G. Physica, 1978, 94A, p.615.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1981 года.