ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р17-81-588

Н.М.Плакида, Г.М.Вуйичич,* А.Л.Куземский

УРАВНЕНИЯ СВЕРХПРОВОДИМОСТИ ДЛЯ ПЕРЕХОДНЫХ МЕТАЛЛОВ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ВАНЬЕ

Направлено в ТМФ

* Институт ядерных наук им. Б.Кидрича, Белград, СФРЮ.

1981

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы большой интерес вызывает исследование сверхпроводящих свойств переходных металлов, их сплавов и соединений [1]. В отличие от простых металлов, в переходных, помимо широкой s-зоны, имеется частично заполненная относительно узкая d-зона. В ряде работ [2-5] было показано, что сильносвязанные d-электроны в значительной степени ответственны за сверхпроводящие свойства переходных металлов. Даже в случае сильной корреляции кулоновское взаимодействие между сильносвязанными электронами может приводить к возникновению куперовских пар в полупроводнике Мотта-Хаббарда [6].

Простейшей моделью, описывающей корреляцию сильносвязанных электронов в переходных металлах и их соединениях, является модель Хаббарда [7], с помощью которой удается объяснить целый ряд электрических и магнитных свойств переходных металлов, их сплавов и соединений [8,9]. Необходимо отметить, что гамильтониан Хаббарда представляет собой сильно упрощенный вариант полярной модели металла Шубина-Вонсовского-Боголюбова [10], и в этом смысле является начальным шагом к построению последовательной микроскопической теории переходных металлов и их соединений.

В настоящей работе выводится система уравнений сверхпроводимости для сильносвязанных электронов переходного металла, взаимодействующих с фононами. Уравнения сверхпроводимости записаны в базисе локализованных волновых функций Ванье. Такое представление подчеркивает сильносвязанный характер d-электронов и, кроме того, оно необходимо при описании сверхпроводящих свойств неупорядоченных сплавов переходных металлов [1,11-14] и аморфных сверхпроводников [14,15].

При выводе уравнений сверхпроводимости используется метод уравнений движения для двухвременных функций Грина [16], в котором процедура расцепления проводится только для приближенного вычисления массового оператора матричной электронной функции Грина. При этом замкнутая система уравнений получается в пренебрежении перенормировкой вершины в электрон-ионном взаимодействии, как и в работах [17,18]. Найденная система уравнений сверхпроводимости для сильносвязанных электронов в локализованном базисе аналогична уравнениям Элиашберга [18] для блоховских электронов и позволяет изучать сверхпроводящие свойства переходных металлов и их сплавов в рамках единой системы уравнений.

2. ГАМИЛЬТОНИАН ЭЛЕКТРОН-ИОННОЙ МОДЕЛИ УЗКОЗОННОГО МЕТАЛЛА

Полный гамильтониан электрон-ионной системы представим в виде суммы

$$H = H_e + H_i + H_{e-i} , \qquad /1/$$

где H_e - электронная часть гамильтониана, представляющая собой оператор Хаббарда [7]

$$H_e = \sum_{ij\sigma} t_{ii}\, a^{+}_{i\sigma} a_{j\sigma} + \frac{U}{2} \sum_{i\sigma} n_{i\sigma} n_{i-\sigma} \quad . \qquad /2/$$

Операторы $a^{+}_{i\sigma}$ и $a_{i\sigma}$ - ферми-операторы рождения и уничтожения электронов в узле i ; U - энергия кулоновского отталкивания электронов с противоположными спинами на одном узле, $t_{ij} = N^{-1} \sum_{\vec{k}} \epsilon_{\vec{k}} \exp[i\vec{k}(\vec{R}_i - \vec{R}_j)]$ - интеграл перескока, $\epsilon_{\vec{k}}$ - зонная энергия.

Ионная подсистема описывается оператором

$$H_i = \frac{1}{2} \sum_n \frac{P_n^2}{2M_n} + \frac{1}{2} \sum_{nm} \Phi^{\alpha\beta}_{nm} u^{\alpha}_n u^{\beta}_m , \qquad /3/$$

где $\vec{P}_n$ - оператор импульса, M_n - масса иона, $\vec{u}_n$ - смещение атома из равновесного положения в узле решетки $\vec{R}_n$.

Оператор электрон-ионного взаимодействия имеет вид

$$H_{e-i} = \sum_{\sigma} \sum_{n,i \neq j} V^{\alpha}_{ij} (\vec{R}^{\circ}_n)\, a^{+}_{i\sigma} a_{j\sigma} u^{\alpha}_n , \qquad /4/$$

где

$$\sum_n V^{\alpha}_{ij} (\vec{R}^{\circ}_n)\, u^{\alpha}_n = \frac{\partial t_{ij}(R^{\circ}_{ij})}{\partial R^{\circ}_{ij}} (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \; . \qquad /5/$$

Удобно переписать операторы /2/ и /4/ с помощью операторов Намбу и матриц Паули:

$$H_e = \sum_{ij} t_{ij} \psi^{+}_i \tau_3 \psi_j + \frac{U}{2} \sum (\psi^{+}_i \tau_3 \psi_i)(\psi^{+}_i \tau_3 \psi_i), \qquad /6/$$

$$H_{e-i} = \sum_{n,i \neq j} V_{ijn} \psi^{+}_i \tau_3 \psi_j u_n , \qquad /7/$$

где

$$\psi_i = \begin{pmatrix} a_{i\uparrow} \\ a^{+}_{i\downarrow} \end{pmatrix}, \quad \psi^{+}_i = (a^{+}_{i\uparrow} , a_{i\downarrow}) ; \; \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \tau_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad /8/$$

Заметим, что в рассматриваемой здесь модели металла s-электроны явно не учитываются. Вместо двух зон s- и d-электронов, как и в модели Хаббарда, рассматривается одна "эффективная" зона электронов, взаимодействующих с фононами. Однако косвенно влияние s-электронов учтено. Считается, что все три нормальных частоты фононов без учета d-электронов $\omega^{\circ}(q\nu)$ соответствуют акустическим частотам, а величина кулоновского отталкивания u перенормирована за счет экранировки s-электронами /3,19/.

3. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Рассмотрим уравнения движения для функций Грина электронов, которые представим в виде матрицы

$$G_{ij}(\omega) = \begin{bmatrix} \langle\langle a_{i\uparrow} | a^{+}_{j\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} & \langle\langle a_{i\uparrow} | a_{j\downarrow} \rangle\rangle_{\omega} \\ \langle\langle a^{+}_{i\downarrow} | a^{+}_{j\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} & \langle\langle a^{+}_{i\downarrow} | a_{j\downarrow} \rangle\rangle_{\omega} \end{bmatrix} = \langle\langle \psi_i | \psi^{+}_j \rangle\rangle_{\omega} . \quad /9/$$

Дифференцирование $G_{ij}(t-t')$ по первому времени дает для фурье-компонент следующее уравнение движения

$$\sum_j (\omega\tau_0 \delta_{ij} - t_{ij}\tau_3) \langle\langle \psi_j | \psi^{+}_{i'} \rangle\rangle_{\omega} = \delta_{ii'}\tau_0 +$$

$$+ \sum_{nj} V_{ijn} \langle\langle u_n \tau_3 \psi_j | \psi^{+}_{i'} \rangle\rangle_{\omega} + U \langle\langle (\psi^{+}_i \tau_3 \psi_i)\tau_3 \psi_i | \psi^{+}_{i'} \rangle\rangle_{\omega} . \quad /10/$$

Так же, как и в /17/, отделим перенормировку энергии электронов в приближении среднего поля Хартри-Фока-Боголюбова /20/ /с учетом аномальных средних/ от перенормировки в высших порядках, обусловленной неупругим рассеянием. Для этого введем далее неприводимые (ir) части функций Грина согласно следующему определению /для примера возьмем две ФГ из четырех/:

$$\langle\langle a_{i\uparrow} a^{+}_{i\downarrow} a_{i\downarrow} | a^{+}_{i'\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} = \langle\langle (a_{i\uparrow} n_{i\downarrow})^{ir} | a^{+}_{i'\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} +$$

$$+ \langle n_{i\downarrow} \rangle \langle\langle a_{i\uparrow} | a^{+}_{i'\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} - \langle a_{i\uparrow} a_{i\downarrow} \rangle \langle\langle a^{+}_{i\downarrow} | a^{+}_{i'\uparrow} \rangle\rangle_{\omega} , \quad /11/$$

$$\langle\langle a_{i\uparrow} a^{+}_{i\downarrow} a_{i\downarrow} | a_{i'\downarrow} \rangle\rangle_{\omega} = \langle\langle (a_{i\uparrow} n_{i\downarrow})^{ir} | a_{i'\downarrow} \rangle\rangle_{\omega} + \quad /12/$$

$$+ \langle n_{i\downarrow} \rangle \langle\langle a_{i\uparrow} | a_{i'\downarrow} \rangle\rangle_{\omega} - \langle a_{i\uparrow} a_{i\downarrow} \rangle \langle\langle a^{+}_{i\downarrow} | a_{i'\downarrow} \rangle\rangle_{\omega} .$$

Выбор неприводимых частей функций Грина в /11/ и /12/ задается следующими условиями:

$$<[(a_{i\uparrow} n_{i\downarrow})^{ir}, \psi_i^+]_+> = 0. \qquad /13/$$

Соотношение /13/ позволяет однозначно ввести неприводимые части и обратить в нуль неоднородные члены в уравнениях для них. С учетом /11/ и /12/ уравнение /10/ примет вид

$$\sum_j (\omega\tau_0\delta_{ij} - t_{ij}\tau_3 - \Sigma^c_{i\sigma}\delta_{ij}) \ll \psi_j | \psi^+_{i'} \gg = \qquad /14/$$

$$= \delta_{ii'}\tau_0 + \sum_j \ll (\rho_{ij}\tau_3\psi_j)^{ir} | \psi^+_{i'} \gg ,$$

где введены обозначения:

$$\rho_{ij} = U\rho_i\delta_{ij} + \sum_n V_{ijn} u_n (1-\delta_{ij}),$$

$$\rho_i = \psi_i^+\tau_3\psi_i = \sum_\sigma a^+_{i\sigma} a_{i\sigma} = \sum_\sigma n_{i\sigma}. \qquad /15/$$

Величина $\Sigma^c_{i\sigma}$ представляет собой массовый оператор в приближении среднего поля

$$\Sigma^c_{i\sigma} = U \begin{pmatrix} n_{i-\sigma} & -<a_{i\sigma} a_{i-\sigma}> \\ -<a^+_{i-\sigma} a^+_{i\sigma}> & -n_{i\sigma} \end{pmatrix}. \qquad /16/$$

В представлении операторов Намбу

$$\psi_{i,-\sigma} = \begin{pmatrix} a_{i-\sigma} \\ a^+_{i\sigma} \end{pmatrix}, \qquad \psi^+_{i,-\sigma} = (a^+_{i-\sigma}, a_{i\sigma})$$

массовый оператор /16/ можно записать в виде

$$\Sigma^c_{i\sigma} = -U\tau_3 <\psi_{i,-\sigma}\psi^+_{i,-\sigma}> \tau_3 + \frac{U}{2}(\tau_0 + \tau_3). \qquad /17/$$

Для вычисления неприводимой матричной функции Грина в /14/ запишем для нее уравнение движения по отношению ко второму времени t′ /см., напр., [17]/. Для фурье-компоненты функции Грина получаем уравнение

$$\sum_{j'} \ll (\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} | \psi^+_{j'} \gg_\omega (\omega\tau_0\delta_{i'j'} - t_{j'i'}\tau_3) =$$

$$= \sum_{mj'} V_{j'i'm} \ll(\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} \mid \psi_{j'}^{+}\tau_3 u_m\gg_\omega + \qquad /18/$$

$$+ \frac{U}{2} \ll(\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} \mid (\psi_{i'}^{+}\tau_3\rho_{i'} + \rho_{i'}\psi_{i'}^{+}\tau_3)\gg_\omega .$$

Процедуру выделения неприводимой части относительно операторов в правой части функции Грина в /17/ можно провести аналогично тому, как это было проделано в /14/. В результате получим

$$\sum_{j'} \ll(\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} \mid \psi_{j'}^{+}\gg(\omega\tau_0\delta_{i'j'} - t_{j'i'}\tau_3 - \Sigma_{i'\sigma}^{c}\delta_{i'j'}) =$$

$$= \sum_{j'} \ll(\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} \mid (\psi_{j'}^{+}\tau_3\rho_{j'i'})^{ir}\gg . \qquad /19/$$

Для того, чтобы решить систему уравнений /14/, /19/, введем нулевую функцию Грина:

$$\sum_j (\omega\tau_0\delta_{ij} - t_{ij}\tau_3 - \Sigma_{i\sigma}^{c}\delta_{ij})\, G_{ji}^{\circ}(\omega) = \delta_{ii'} . \qquad /20/$$

Использование /20/ в /14/ и /18/ приводит к уравнению

$$G_{ii'}(\omega) = G_{ii'}^{\circ}(\omega) + \sum_{kk'} G_{ik}^{\circ}(\omega)\, T_{kk'}(\omega)\, G_{k'i'}^{\circ}(\omega) . \qquad /21/$$

Матрица рассеяния определяется неприводимой частью многочастичной функции Грина в /19/:

$$T_{kk'}(\omega) = \sum_{jj'} \ll(\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} \mid (\psi_{j'}^{+}\tau_3\rho_{j'k'})^{ir}\gg_\omega . \qquad /22/$$

Если ввести массовый оператор $M_{kk'}$, который является связанной частью матрицы рассеяния

$$T_{kk'}(\omega) = M_{kk'}(\omega) + \sum_{mn} M_{km}(\omega)\, G_{mn}^{\circ}(\omega)\, T_{nk'}(\omega) , \qquad /23/$$

то уравнение /21/ можно представить в виде уравнения Дайсона

$$G_{ii'}(\omega) = G_{ii'}^{\circ}(\omega) + \sum_{kk'} G_{ik}^{\circ}(\omega)\, M_{kk'}(\omega)\, G_{k'i'}(\omega) . \qquad /24/$$

Массовый оператор $M_{kk'} = \{T_{kk'}\}^p$ не содержит частей, которые можно разрезать по линии G_0, что указывается индексом "p" /собственная часть/

$$M_{kk'} = \sum_{jj'} \ll(\rho_{kj}\tau_3\psi_j)^{ir} \mid (\psi_{j'}^{+}\tau_3\rho_{j'k'})^{ir}\gg_\omega^{p} . \qquad /25/$$

Таким образом, наиболее общее выражение для электронной функции Грина в локализованном базисе с учетом электрон-фононного взаимодействия в виде /4/ можно записать в следующем матричном виде:

$$\bar{G}^{-1} = \bar{G}_0^{-1} - \bar{M} . \qquad /26/$$

Вычисление полной функции Грина $\bar{G}$ сведено к нахождению $\bar{G}_0$ и $\bar{M}$.

4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ МАССОВОГО ОПЕРАТОРА

Явное выражение для массового оператора в /26/ имеет вид

$$M_{ii'}(\omega) = \sum_{jj'} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{\omega - \omega'} (e^{\beta\omega'} + 1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{-i\omega' t} \times$$
$$\begin{bmatrix} \langle \rho_{j'i\uparrow}(t)\, a^+_{j'\uparrow}(t)\, a_{j\uparrow}\rho_{ij\uparrow}\rangle^{p,ir} & -\langle a_{j'\downarrow}(t)\, \rho_{i'j'\downarrow}(t)\, a_{j\uparrow}\rho_{ij\uparrow}\rangle^{p,ir} \\ -\langle \rho_{j'i'\uparrow}(t)\, a^+_{j'\uparrow}(t)\, \rho_{ji\downarrow}\, a^+_{j\downarrow}\rangle^{p,ir} & \langle a_{j'\downarrow}(t)\, \rho_{i'j'\downarrow}(t)\, \rho_{ji\downarrow} a^+_{j\downarrow}\rangle^{p,ir} \end{bmatrix} . \qquad /27/$$

Чтобы получить замкнутую самосогласованную систему уравнений для массового оператора /27/, необходимо использовать то или иное приближение с тем, чтобы выразить его через функцию Грина /9/. Массовый оператор /27/ описывает неупругое рассеяние электронов /упругая часть содержится в $\Sigma^c_{i\sigma}$ /16// на флуктуациях плотности полного электрон-ионного заряда в решетке. По аналогии с работой [17] /см. также [19,21]/ найдем аналитическое выражение для массового оператора в приближении "двух взаимодействующих мод". Это приближение состоит в пренебрежении перенормировкой вершины, т.е. корреляцией в распространении выделенного электрона /дырки/ и распространении флуктуаций плотности заряда. Этому приближению отвечает следующее представление в /27/ высших корреляционных функций через низшие:

$$\langle \rho_{j'i'\uparrow}(t)\, a^+_{j'\uparrow}(t)\, a_{j\uparrow}\, \rho_{ij\uparrow}\rangle^{p,ir} \approx \langle \rho_{j'i'\uparrow}(t)\, \rho_{ij\uparrow}\rangle \langle a^+_{j'\uparrow}(t)\, a_{j\uparrow}\rangle . \qquad /28/$$

Заметим, что одновременные средние уже учтены в массовом операторе $\Sigma^c_{i\sigma}$ /16/.

Записывая далее спектральные представления для корреляционных функций в /28/, массовый оператор /27/ представим, с учетом определения /15/, в виде суммы

$$M_{ii'}(\omega) = M^1_{ii'}(\omega) + M^2_{ii'}(\omega) , \qquad /29/$$

где

$$M^1_{ii'} = \sum_{mn'} \sum_{jj'} V_{ijn} V_{j'i'n'} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega-(\omega_1+\omega_2)} \frac{1}{2}\left(\mathrm{th}\frac{\beta\omega_1}{2} + \mathrm{cth}\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle u_n | u_{n'}\rangle\rangle_{\omega_2+i\epsilon}\right] \tau_3\, \mathrm{Im}\langle\langle \psi_j | \psi^+_{j'}\rangle\rangle_{\omega_1+i\epsilon}\, \tau_3 . \qquad /30/$$

Массовый оператор /30/ имеет вид, характерный для взаимодействующей электрон-фононной системы [18,19,21]. Вклад $M^2_{ii'}$ имеет более сложную структуру:

$$M^2_{ii'} = U^2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{\omega-(\omega_1+\omega_2)} \frac{1}{2}\left(\mathrm{th}\frac{\beta\omega_1}{2} + \mathrm{cth}\frac{\beta\omega_2}{2}\right) \times$$

$$\begin{bmatrix} [-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle n_{i\downarrow}|n_{i'\downarrow}\rangle\rangle_{\omega_2}][-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle a_{i\uparrow}|a^+_{i'\uparrow}\rangle\rangle_{\omega_1}] & [\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle n_{i\downarrow}|n_{i'\uparrow}\rangle\rangle_{\omega_2}][-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle a_{i\uparrow}|a_{i'\downarrow}\rangle\rangle_{\omega_1}] \\ [\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle n_{i\downarrow}|n_{i'\uparrow}\rangle\rangle_{\omega_2}][-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle a^+_{i\downarrow}|a^+_{i'\uparrow}\rangle\rangle_{\omega_1}] & [-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle n_{i\uparrow}|n_{i'\uparrow}\rangle\rangle_{\omega_2}][-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\langle\langle a^+_{i\downarrow}|a_{i'\downarrow}\rangle\rangle_{\omega_1}] \end{bmatrix} \qquad /31/$$

Из соотношений /30/ и /31/ видно, что, в отличие от электрон-ионной модели простого металла, учитывающей прямое кулоновское взаимодействие электронов[17], эффективное электрон-электронное взаимодействие, определяемое в /31/ функцией Грина флуктуаций плотности заряда, не может быть выражено в простых приближениях через полную диэлектрическую проницаемость электрон-ионной системы для модели Хаббарда. Это является отражением одного из недостатков модели Хаббарда - пренебрежением обменным взаимодействием на разных узлах. Диэлектрическую функцию для модели Хаббарда можно формально записать для k, $\omega \neq 0$ через продольную динамическую проводимость[22]. Однако при k и $\omega \to 0$, получаемое таким образом выражение для диэлектрической проницаемости не определено. В полярной модели металла[10] электронная система описывается более последовательным образом. Поэтому вывод уравнений сверхпроводимости для полярной модели металла /с учетом электрон-фононного взаимодействия/ представляет особый интерес.

С этим обстоятельством связаны известные трудности вычисления частотной зависимости корреляционной функции $\langle n_{i\sigma}(t)\, n_{j\sigma'}\rangle$ для модели Хаббарда. По существу трудности эти аналогичны тем, которые возникают при вычислении корреляционной функции $\langle S^z_i(t) S^z_j\rangle$ в изотропном гейзенберговском ферромагнетике [23,24]. При вычислении функции Грина $\langle\langle S^+_i | S^-_j\rangle\rangle$ возникает функция Грина

$\langle\langle \delta S^z S^+ | \delta S^z S^- \rangle\rangle$ /здесь $\delta S^z = S^z - \langle S^z \rangle$ /. Обычно при расцеплении $\langle \delta S^z_i(t) \delta S^z_j \rangle \langle\langle S^+ | S^- \rangle\rangle$ для корреляционной функции $\langle \delta S^z_i \delta S^z_j \rangle$ используется статическое приближение /24,25/. Приближенный метод расчета корреляционной функции $\langle n_{i\sigma} n_{j\sigma'} \rangle$ в статическом пределе обсуждается, напр., в /26/. Дальнейший анализ полученной системы уравнений /26/ и /29/ для сильносвязанных электронов в переходном металле может быть проведен известными методами /см., напр., /27,28//.

В заключение заметим, что для сильносвязанных электронов переходного металла оператор электрон-фононного взаимодействия может быть выражен через небольшое число характерных параметров переходного металла /3,19,21/:

$$\frac{\partial t(\vec{R}_i - \vec{R}_j)}{\partial(\vec{R}_i - \vec{R}_j)} = q_0 t_{ij} \frac{\vec{R}_i - \vec{R}_j}{|\vec{R}_i - \vec{R}_j|}, \qquad /32/$$

здесь q_0 - слейтеровский коэффициент, характеризующий экспоненциальное убывание d-функций /3/. Интеграл перескока t_{ij} для ближайших соседей z выражается через ширину зоны $W = 2tz$. Таким образом полученная в настоящей работе самосогласованная система уравнений сверхпроводимости /26/ и /29/ в представлении Ванье позволяет с единой точки зрения исследовать реальные переходные металлы, их сплавы и соединения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вонсовский С.В., Изюмов Ю.А., Курмаев Э.З. Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений. "Наука", М., 1975.
2. Fröhlich H. Superconductivity and the Many Body Problem. In: Perspectives in Modern Physics (ed. R.E.Marshak). John Wiley and Sons, 1966, p.539-552.
3. Barišić S., Labbe J., Friedel J. Phys.Rev.Lett., 1970, vol.25, No.14, p.919-922.
4. Appel J., Kohn W. Phys.Rev., 1971, vol.4B, p.2162-2174.
5. Appel J., Kohn W. Phys.Rev., 1972, vol.5B, No.5, p.1823-1830.
6. Bari R.A. Phys.Rev., 1973, vol.7B, No.5, p.2128-2132.
7. Hubbard J. Proc.Roy.Soc., 1963, vol.A276, p.238-257.
8. Куземский А.Л. ТМФ, 1978, т.36, №2, с.208-224.
9. Куземский А.Л. ЭЧАЯ, 1981, т.12, вып.2, с.366-423.
10. Боголюбов Н.Н. Лекции по квантовой статистике. В кн.: Избранные труды в трех томах. "Наукова думка", Киев, 1970, т.2, с.287-493.
11. Weinkauf A., Zittartz J. Solid State Commun., 1974, vol.14, No.3, p.365-368.

12. Weinkauf A., Zittartz J. J.Low Temp.Phys., 1975, vol.18, No.3,4, p.229-239.
13. Kerker G., Bennemann K.H. Solid State Commun., 1974, vol.14, No.4, p.399-401.
14. Poon S.J. Solid State Commun., 1976, vol.18, No.11, p.1489-1491.
15. Poon S.J. Solid State Commun., 1980, vol.34, No.7, p.659-661.
16. Боголюбов Н.Н., Тябликов С.В. ДАН СССР, сер. математика, физика, 1959, т.126, №1, с.53-56.
17. Вуйичич Г.М., Петру З.К., Плакида Н.М. ТМФ, 1981, т.46, №1, с.91-98.
18. Элиашберг Г.М. ЖЭТФ, 1960, т.39, №5, с.1437-1441.
19. Холас А., Плакида Н.М., Куземский А.Л. ОИЯИ, Р17-80-741, Дубна, 1980.
20. Боголюбов Н.Н. ДАН СССР, сер. математика, физика, 1958, т.119, №2, с.244-246.
21. Плакида Н.М., Холас А., Куземский А.Л. ОИЯИ, Р17-80-773, Дубна, 1980.
22. Gasser W. phys.stat.sol.(b), 1978, vol.89, No.1, p.165-169.
23. Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. "Наука", М., 1975.
24. Вакс В.Г., Ларкин А.И., Пикин С.А. ЖЭТФ, 1967, т.53, №3, с.1089-1106.
25. Plakida N.M. Phys.Lett., 1973, vol.A43, No.9, p.481-482.
26. Elk K. phys.stat.sol.(b), 1979, vol.96, p.251-257.
27. Peter M. et al. Helv.Phys.Acta, 1974, vol.47, No.7, p.807-832.
28. Allen P.B. Phonons and the Superconducting Transition Temperature. In: Dynamical Properties of Solids (Ed. by G.K.Horton, A.A,Maradudin). North-Holland Publ.Comp., 1980, ch.2, p.95-196.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 сентября 1981 года.