объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-81-514

Н.Н.Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен,
А.С.Шумовский

ДИНАМИКА ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ И ОЦЕНКА ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ

Направлено в ТМФ

1981

В предыдущей работе[I] было показано, что метод исключения бозонных переменных из кинетического уравнения[2,3] позволяет получить обобщенное кинетическое уравнение для системы двухуровневых излучателей, взаимодействующих с электромагнитным полем. В настоящей работе мы продолжим изучение динамических свойств таких систем, основываясь на указанном уравнении (уравнение (6) или эквивалентное ему уравнение (7) работы[I]). Из соображений простоты и наглядности ограничимся случаем, когда частота рабочего перехода Ω одинакова для всех излучателей, и энергию взаимодействия "вещества" с электромагнитным полем запишем в приближении вращающейся волны[4]. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид[I]:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_M + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{MF}, \\
&\mathcal{H}_M = \mathcal{H}_0 + \hbar\Omega R_3, \quad \mathcal{H}_0 = \sum_{j=1}^{N} \frac{p_j^2}{2m}, \\
&\mathcal{H}_F = \sum_k \hbar\omega_k b_k^+ b_k, \\
&\mathcal{H}_{MF} = \mathcal{N}^{-1/2} \sum_k \{ g_k(t) b_k R_k^+ + g_k^*(t) b_k^+ R_k^- \}.
\end{aligned} \tag{I}
$$

Здесь p_j – импульс j-го излучателя, R_3, $R^{\pm}$ – коллективные операторы излучателей[I,5]

$$R_3 \equiv \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} r_{j3}\,,$$

$$R_k^{\pm} \equiv \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} r_j^{\pm} e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j}\,,$$

где r_{j3} – z -компонента оператора спина I/2 и операторы $r_j^{\pm}$ связаны с матрицами Паули соотношением

$$r_j^{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_j^x \pm i\sigma_j^y)\,.$$

Функция $g_k(t)$ имеет вид

$$g_k(t) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k v}} \langle + | \mathcal{J}^+ | - \rangle e^{i(\omega_k - \Omega)t}$$

Остальные обозначения такие же, как и в работе [I].

Полученное в [I] обобщенное операторное тождество в представлении коллективных переменных принимает в случае гамильтониана (I) вид

$$\underset{(M)}{Tr}\left\{ f(M)\frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}[f(M), \mathcal{H}_M]\rho_t(M)\right\} =$$

$$= \mathcal{N}^{-1}\sum_k |g_k|^2 \int_{t_0}^{t} d\tau \underset{(MF)}{Tr}\; e^{-i\omega_k(t-\tau)}\left\{ \mathcal{N}_k R_k^-(\tau)[f(M_t), R_k^+(t)] + \right.$$

$$\left. + (1+\mathcal{N}_k)[R_k^+(t), f(M_t)]R_k^-(\tau)\right\} \mathcal{D}_{t_0} +$$

$$+ \mathcal{N}^{-1}\sum_k |g_k|^2 \int_{t_0}^{t} d\tau \underset{(MF)}{Tr}\; e^{i\omega_k(t-\tau)}\left\{ (1+\mathcal{N}_k) R_k^+(\tau)[f(M_t), R_k^-(t)] + \right.$$

$$\left. + \mathcal{N}_k [R_k^-(t), f(M_t)] R_k^+(\tau)\right\} \mathcal{D}_{t_0}\,. \tag{2}$$

Здесь, как обычно, $f(M)$ – оператор, действующий на переменные M системы, $\rho_t(M) = \underset{(F)}{Tr}\,\mathcal{D}_t$, статистический оператор $\mathcal{D}_t$ удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}_t = \hbar^{-1}\mathfrak{L}\mathcal{D}_t \quad , \; \mathfrak{L} \equiv i[\mathcal{H}_t , \dots]$$

с начальными условиями /3/

$$\mathcal{D}_{t_0} = \rho(M)\otimes\mathcal{D}_F ,$$

$$\mathcal{D}_F \equiv e^{-\beta\mathcal{H}_F}\Big/\underset{(F)}{Tr}\, e^{-\beta\mathcal{H}_F} ,$$

$$\underset{(M)}{Tr}\,\rho(M) = 1$$

и

$$\mathcal{N}_k \equiv \frac{e^{-\beta\frac{\hbar\omega_k}{2}}}{2\,Sh\,\beta\frac{\hbar\omega_k}{2}} ,$$

где β - обратная температура. Заметим, что величина $|g_k|^2$ от времени не зависит. Пусть для определенности $f(M) = f(\vec{p}_j , r_{j3})$. Для таких операторов $f(M)$ справедливы перестановочные соотношения вида:

$$e^{i\vec{k}\vec{x}_j} f(\vec{p}_j) = f(\vec{p}_j - \hbar\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{x}_j} ,$$

$$f(\vec{p}_j)\, e^{i\vec{k}\vec{x}_j} = e^{i\vec{k}\vec{x}_j} f(\vec{p}_j + \hbar\vec{k}) ,$$

$$r_{j3}^{+} f(r_{j3}) = f(r_{j3} - 1)\, r_{j3}^{+} ,$$

$$r_j^{-} f(r_{j3}) = f(r_{j3} + 1)\, r_j^{-} ,$$

объединяя которые, получаем

$$r_j^{\pm} e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j} f(\vec{p}_j , r_{j3}) = f(\vec{p}_j \mp \hbar\vec{k}, r_{j3} \mp 1)\, r_j^{\pm} e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j} . \qquad (3)$$

С другой стороны, при $j \neq j'$

$$[\, r_j^{\pm} e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j} , f(\vec{p}_{j'} , r_{j'3})\,] = 0 . \qquad (4)$$

С учетом перестановочных соотношений (3) и (4) входящие в правую часть кинетического уравнения (2) коммутаторы могут быть представлены в виде

$$[f(\vec{p}_j, r_{j3}), R_k^{\pm}] = \{f(\vec{p}_j, r_{j3}) \mp f(\vec{p}_j \mp \hbar\vec{k}, r_{j3} \mp 1)\} r_j^{\pm} e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j} \quad (5)$$

Предположим теперь, что взаимодействие в $\mathcal{H}_{HF}$ мало, и приближенно представим $R_k^{\pm}(\tau)$ через $R_k^{\pm}(t)$. Имеем в "нулевом приближении"

$$\vec{x}_j(\tau) = \vec{x}_j(t) - \frac{\vec{p}_j(t)}{m}(t-\tau),$$

$$r_j^{\pm}(\tau) = r_j^{\pm}(t)\, e^{\mp i\Omega(t-\tau)}.$$

Отсюда с помощью операторного соотношения

$$exp(A+B) = exp(A)\cdot exp(B)\cdot exp\left(-\tfrac{1}{2}[A,B]\right)$$

нетрудно получить, что

$$e^{i\vec{k}\vec{x}_j(\tau)} = e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{\vec{p}_j^{\,2}(t)}{2m} - \frac{(\vec{p}_j(t)-\hbar\vec{k})^2}{2m}\right\}(t-\tau)} \cdot e^{i\vec{k}\vec{x}_j(t)} =$$

$$= e^{i\vec{k}\vec{x}_j(t)}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{(\vec{p}_j(t)+\hbar\vec{k})^2}{2m} - \frac{\vec{p}_j^{\,2}(t)}{2m}\right\}(t-\tau)}.$$

Теперь для $R_k^{\pm}(\tau)$ имеем:

$$R_k^{\pm}(\tau) = \sum_j r_j^{\pm}(\tau)\, e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j(\tau)} =$$

$$= \sum_j r_j^{\pm}(t)\, e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j(t)}\, e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{(\vec{p}_j(t)\pm\hbar\vec{k})^2}{2m} - \frac{p_j^2(t)}{2m} \pm \hbar\Omega\right\}(t-\tau)} =$$

$$= \sum_j e^{\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{(\vec{p}_j(t)\mp\hbar\vec{k})^2}{2m} - \frac{p_j^2(t)}{2m} \mp \hbar\Omega\right\}(t-\tau)}\, r_j^{\pm}(t)\, e^{\pm i\vec{k}\vec{x}_j(t)}. \quad (6)$$

С помощью (6) и перестановочных соотношений (3), (4) можно далее вычислить коммутаторы

$$R_k^{\pm}(\tau)[f(\vec{p}_j(t), r_{j3}], R_k^{\mp}(t)],\ [R_k^{\mp}(t), f(\vec{p}_j(t), r_{j3})]R_k^{\pm}(\tau),$$

входящие в правую часть кинетического уравнения (2). В возникающих при этом выражениях, очевидно, будет иметь место суммирование по всем j', в том числе и по $j' \neq j$. Представим его в виде

$$\sum_{j'} \mathfrak{U}_{j'} = \sum_{j' \neq j} \mathfrak{U}_{j'} + \mathfrak{U}_{j} .$$

Каждый из членов суммы по $j' \neq j$ содержит множитель вида

$$e^{\pm i\vec{k}(\vec{x}_{j'} - \vec{x}_j)} \, r_{j'}^{\pm} \, r_j^{\mp} . \tag{7}$$

В силу сделанного нами ранее предположения о слабости взаимодействия величины типа (7) с $j' \neq j$ при суммировании и усреднении дадут лишь малый вклад, которым можно пренебречь. Поэтому

$$R_k^{\pm}(\tau)\left[f(\vec{p}_j(t), r_{j3}), R_k^{\mp}(t)\right] \cong e^{\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{(\vec{p}_j(t) \mp \hbar\vec{k})^2}{2m} - \frac{\vec{p}_j^{\,2}(t)}{2m} \mp \hbar\Omega\right\}(t-\tau)} \times$$

$$\times \left\{f(\vec{p}_j(t) \mp \hbar\vec{k}, r_{j3}(t) \mp 1) - f(\vec{p}_j(t), r_{j3}(t))\right\} r_j^{\pm}(t) \, r_j^{\mp}(t) ,$$

$$\left[R_k^{\mp}(t), f(\vec{p}_j(t), r_{j3}(t)\right] R_k^{\pm}(\tau) \cong e^{-\frac{i}{\hbar}\left\{\frac{(\vec{p}_j(t) \pm \hbar\vec{k})^2 - \vec{p}_j^{\,2}(t)}{2m} \pm \hbar\Omega\right\}(t-\tau)} \times$$

$$\times \left\{f(\vec{p}_j(t) \pm \hbar\vec{k}, r_{j3}(t) \pm 1) - f(\vec{p}_j(t), r_{j3}(t)\right\} r_j^{\mp}(t) \, r_j^{\pm}(t) .$$

Теперь кинетическое уравнение (2) принимает вид

$$\operatorname*{Tr}_{(M)} f(\vec{p}_j, r_{j3}) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} = \mathcal{N}^{-1} \sum_k |g_k|^2 \int_{t_0}^{t} d\tau \operatorname*{Tr}_{(M)} e^{i\omega_k \tau} (1 + \mathcal{N}_k) \times$$

$$\times \exp\left\{\left[\frac{(\vec{p}_j - \hbar\vec{k})^2 - \vec{p}_j^{\,2}}{2m} - \hbar\Omega\right](t-\tau)\right\} \cdot \left\{f(\vec{p}_j - \hbar\vec{k}, r_{j3} - 1) - f(\vec{p}_j, r_{j3})\right\} r_j^{+} r_j^{-} \rho_t +$$

$$+ \mathcal{N}^{-1} \sum_k |g_k|^2 \int_{t_0}^{t} d\tau \operatorname*{Tr}_{(M)} e^{-i\omega_k \tau} \mathcal{N}_k \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{(\vec{p}_j + \hbar\vec{k})^2 - \vec{p}_j^{\,2}}{2m} + \hbar\Omega\right](t-\tau)\right\} \times$$

$$\times \left\{f(\vec{p}_j + \hbar\vec{k}, r_{j3} + 1) - f(\vec{p}_j, r_{j3})\right\} r_j^{-} r_j^{+} \rho_t , \tag{8}$$

где

$$\rho_t \equiv \mathop{Tr}_{(F)} \mathcal{D}_{t_0} .$$

Введем одночастичную функцию распределения/5/

$$W_t(\vec{p}, n) \equiv \mathop{Tr}_{(2,\dots,N)} \rho_t(\vec{p}_1, n_1; \vec{p}_2, n_2; \dots; \vec{p}_N, n_N) . \qquad (9)$$

Так как из известных свойств операторов Паули

$$\begin{cases} r_j^{+} r_j^{-} = \frac{1}{2} + r_{j3} \backsim \delta(r_{j3} - 1/2), \\ r_j^{-} r_j^{+} = \frac{1}{2} - r_{j3} \backsim \delta(r_{j3} + 1/2), \end{cases}$$

то с учетом (9)

$$Tr\{f(\vec{p}_j, r_{j3}) r_j^{\pm} r_j^{\mp} \rho_t\} = Tr\{f(\vec{p}_j, r_{j3}) r_j^{\pm} r_j^{\mp} W_t\} =$$

$$= \sum_n \int d\vec{p}\, f(\vec{p}, n)\, \delta(n \mp 1/2)\, W_t(\vec{p}, n) .$$

Поэтому кинетическое уравнение (8) можно теперь переписать в виде:

$$\sum_n \int d\vec{p}\, f(\vec{p}, n) \frac{\partial}{\partial t} W_t(\vec{p}, n) =$$

$$= 2\pi N^{-1} \sum_n \sum_k |g_k|^2 \int d\vec{p} \Big\{ (1+N_k)\, \delta\Big(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2 - (\vec{p} + \hbar\vec{k})^2}{2m}\Big) \times$$

$$\times \delta(n + 1/2)\, W_t(\vec{p} + \hbar\vec{k}, n+1) - (1+N_k)\, \delta\Big(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2 - (\vec{p} + \hbar\vec{k})^2}{2m}\Big) \times$$

$$\times \delta(n - 1/2)\, W_t(\vec{p} - \hbar\vec{k}, n-1) + N_k\, \delta\Big(\hbar\omega_k - \hbar\Omega - \frac{p^2 - (\vec{p} - \hbar\vec{k})^2}{2m}\Big) \times$$

$$\times \delta(n - 1/2)\, W_t(\vec{p} - \hbar\vec{k}, n-1) + N_k\, \delta\Big(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2 - (\vec{p} + \hbar\vec{k})^2}{2m}\Big) \times$$

$$\times \delta(n + 1/2)\, W_t(\vec{p}, n) \Big\} f(p, n) .$$

Так как $f(p, n)$ – произвольная функция, отсюда получается следующее уравнение для одночастичной функции распределения:

$$\frac{\partial}{\partial t} W_t(p, n) = 2\pi \sum_k |g_k|^2 \{ (1+N_k)\, W_t(p + \hbar k, 1/2) - N_k\, W_t(p, -1/2) \} \times$$

$$\times\, \delta(n+\tfrac{1}{2})\, \delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2-(p+\hbar k)^2}{2m}\right) +$$

$$+\, 2\pi \sum_k |g_k|^2 \left\{ N_k\, W_t(p+\hbar k, -\tfrac{1}{2}) - (1+N_k)\, W_t(p, \tfrac{1}{2}) \right\} \delta(n-\tfrac{1}{2}) \times$$

$$\times\, \delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{(p-\hbar k)^2-p^2}{2m}\right).$$

Принимая во внимание явный вид функции g_k и переходя от суммирования к интегрированию

$$\sum_k \to \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\;, \quad V \equiv v\cdot N,$$

получаем отсюда окончательный вид уравнений для одночастичной функции распределения

$$\frac{\partial}{\partial t} W_t(p,-\tfrac{1}{2}) = \frac{d^2}{2\pi}\int d\vec{k}\, \frac{1}{\omega_k} \Big\{ (1+N_k)\, W_t(p+\hbar k, \tfrac{1}{2}) -$$

$$- N_k\, W_t(p,-\tfrac{1}{2}) \Big\}\, \delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2-(p+\hbar k)^2}{2m}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} W_t(p,+\tfrac{1}{2}) = \frac{d^2}{2\pi}\int d\vec{k}\, \frac{1}{\omega_k} \Big\{ N_k\, W_t(p+\hbar k, -\tfrac{1}{2}) - (1+N_k)\, W_t(p,\tfrac{1}{2}) \Big\} \times \qquad (10)$$

$$\times\, \delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega - \frac{p^2-(p-\hbar k)^2}{2m}\right),$$

где $d \equiv \langle + | J^+ | - \rangle$.

Перейдем теперь к проблеме вычисления времени релаксации. Как нетрудно видеть из уравнений (10), вероятность того, что излучатель с импульсом $\vec{p}$ поглощает фотон и переходит в возбужденное состояние $|+\rangle$, есть

$$\Gamma_+ = \frac{d^2}{2\pi}\int d\vec{k}\, N_k\, \delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{p^2-(p+\hbar k)^2}{2m}\right).$$

Аналогично вероятность испускания фотона имеет вид

$$\Gamma_- = \frac{d^2}{2\pi}\int d\vec{k}\, (1+N_k)\, \delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega + \frac{(p+\hbar k)^2-p^2}{2m}\right).$$

Определим соответствующие характерные времена

$$\tau_{\pm} = \Gamma_{\pm}^{-1} . \qquad (11)$$

Замечая, что

$$\delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega \mp \frac{(\vec{p}+\hbar\vec{k})^2 - p^2}{2m}\right) = \frac{m}{\hbar p k}\,\delta\left(\frac{mc}{p} - \frac{m\Omega}{pk} \mp \left(\cos\theta + \frac{\hbar k}{2p}\right)\right),$$

где c – скорость света и θ – угол между векторами $\vec{k}$ и $\vec{p}$, имеем

$$\int d\vec{k}\,\delta\left(\hbar\omega_k - \hbar\Omega \mp \frac{(\vec{p}+\hbar\vec{k})^2 - p^2}{2m}\right)F(k) =$$

$$= 2\pi\,\frac{m}{\hbar p}\int_{\mathcal{D}_\pm} k\,F(k)\,dk ,$$

где

$$\mathcal{D}_\pm \equiv \left\{k>0 : \left|\frac{mc}{p} - \frac{m\Omega}{pk} \pm \frac{\hbar k}{2p}\right| < 1\right\}.$$

Естественно положить $\hbar\Omega \ll mc^2$. В этом случае:

$$\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_- \equiv \mathcal{D} = \left\{k>0 : \left|\frac{mc}{p} - \frac{m\Omega}{pk}\right| < 1\right\}.$$

Теперь для времен $\tau_\pm$ (11) имеем:

$$\tau_\pm = \frac{\beta\hbar^2 p c^2}{m d^2}\left\{\ln\frac{\mp e^{\mp\beta\hbar c k_2} \pm 1}{\mp e^{\mp\beta\hbar c k_1} \pm 1}\right\}^{-1}, \qquad (12)$$

где

$$k_1 \equiv \frac{\Omega}{c + \frac{p}{m}} , \quad k_2 \equiv \frac{\Omega}{c - \frac{p}{m}} .$$

Будем далее рассматривать случай нерелятивистских частиц в среде: $p \ll mc$. В случае высоких температур $\beta \ll (\hbar\Omega)^{-1}$, когда сверхизлучательное состояние в системе не возникает /6/, из (12) имеем

$$\tau_+ = \tau_- \equiv \tau = \frac{\hbar^2 c^2}{2d^2}\beta .$$

Это выражение соответствует времени релаксации в системе некоррелированных излучателей.

В противоположном случае низких температур, когда $\beta \gg (\hbar\Omega)^{-1}$ и система находится в сверхизлучательном состоянии, получаем

$$\Gamma_+ \simeq 0 \;, \quad \tau_+ \to \infty \;, \quad \tau_- = \frac{\hbar c^2}{2d\Omega} \;.$$

Это последнее выражение для времени τ_- хорошо согласуется с оценкой для времени, соответствующего максимуму испускания в сверхизлучательной системе, полученной в работе /7/ в связи с выбором рабочего режима однопроходного сверхизлучательного гамма-лазера /8-II/.

Заметим по поводу этой проблемы, что так как расстояния между узлами кристаллической решетки являются величиной порядка нескольких ангстрем, что сравнимо с длиной волны мессбауэровского гамма-излучения или даже превосходит ее, при выборе рабочего режима и оценке времени высвечивания в гамма-лазере необходимо учитывать эффекты, возникающие за счет тепловых колебаний атомов в кристалле. При этом в точном кинетическом уравнении типа (2) должны появиться бозонные переменные еще одного "сорта" - переменные фононной системы в кристалле. Исключение двух типов бозонных переменных из кинетического уравнения представляет самостоятельную проблему, исследование которой мы предполагаем провести в следующей работе.

Литература

I. Боголюбов Н.Н. (мл.), Фам Ле Киен, Шумовский А.С. ОИЯИ, PI7-81-465, Дубна, I98I.
2. Боголюбов Н.Н. ОИЯИ, EI7-II822, Дубна, I978.
3. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). ЭЧАЯ, I980, II, с. 245.
4. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", М., I978.
5. Боголюбов Н.Н. Лекции по квантовой статистике. Избр. труды, т. 2, "Наукова думка", Киев, I970.
6. Bogolubov N.N. Jr, Plechko V.N. Physica, 1976, 82A, p.1061.
7. Андреев А.В., Ильинский Ю.А., Хохлов Р.В. ЖЭТФ, I977, 73, с. I296.
8. Terhune I.H., Baldwin G.S. Phys.Rev.Lett., 1965, 14, p. 589.
9. Афанасьев А.М., Каган Ю. Письма в ЖЭТФ, I965, 2, с. 33.
I0. Baldwin G.S. Khokhlov R.V. Phys. Today, 1975, 28, p. 33.
II. Ильинский Ю.А., Хохлов Р.В. Изв. вузов. Радиофизика, I976, I9, с.792.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 июля I98I года.