объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-81-465

Н.Н.Боголюбов (мл.), Фам Ле Киен, А.С.Шумовский

О КИНЕТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ДВУХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Направлено в ТМФ

1981

I. Введение

В последнее десятилетие заметно возрос интерес к теоретическому исследованию двухуровневых и многоуровневых систем, резонансно взаимодействующих с когерентными электромагнитными полями (см., например, работы [I-32] и монографию [33]). Это обусловлено, в первую очередь, стремительным развитием эксперимента в области квантовой электроники и нелинейной оптики, в частности, изучением явления кооперативного спонтанного излучения в макроскопических системах и связанных с ним нелинейных оптических эффектов, имеющих квантовую природу [33,34]. Подчеркнем, что по своей физической природе двухуровневые излучатели могут сильно отличаться друг от друга – быть, например, молекулярными, атомными или ядерными. Однако характерные особенности поведения макроскопических систем таких излучателей не зависят от их конкретной физической природы и определяются условиями, при которых резонансное (или квазирезонансное) взаимодействие с электромагнитным полем вызывает в каждом излучателе только один переход [33].

Простейшая модельная задача формулируется обычно следующим образом: рассматривается $\mathcal{N}$ двухуровневых излучателей с частотами перехода Ω_j , $j = 1, 2, \dots, \mathcal{N}$ в рабочем объеме

$$V_c = \prod_i L_i \,, \quad i = x, y, z \,,$$

например, в случае системы излучателей, расположенных в узлах простой кубической решетки, $V_c = \mathcal{N} a^3$, где a – постоянная решетки. В этом случае обычно предполагают $a \ll \lambda$ – длины волны электромагнитного излучения, что соответствует оптическому диапазону. Возможные физические эффекты, связанные с условием $a \sim \lambda$, рассматривались в работах /11,17/.

Электромагнитное поле квантуется в объеме $V \gg V_c$. Двухуровневому переходу в j-м излучателе под действием поля сопоставляются операторы $r_j^{\pm}$, связанные с матрицами Паули $\sigma_{j\alpha}$, $\alpha = x, y, z$, линейным соотношением

$$r_j^{\pm} = (r_{jx} \pm i r_{jy}), \qquad r_{j\alpha} = \frac{1}{2}\sigma_{j\alpha}.$$

Если пренебречь электростатическим дипольным взаимодействием, то модельный гамильтониан рассматриваемой системы можно представить в виде (обобщенная модель Дикке)

$$\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_M + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{MF}. \tag{1}$$

Здесь первый член описывает энергию свободных излучателей ("вещество"):

$$\mathcal{H}_M = \sum_{j=1}^{N} \hbar\Omega_j r_{jz} + \mathcal{H}_0,$$

где $\mathcal{H}_0$ – кинетическая энергия излучателей. Второй член соответствует свободному электромагнитному полю:

$$\mathcal{H}_F = \sum_k \hbar\omega_k b_k^+ b_k,$$

где b_k^+, b_k – операторы фотонов с волновым вектором $\vec{k}$. Взаимодействие "вещества" с полем задается оператором вида

$$\mathcal{H}_{MF} = \hbar N^{-1/2} \sum_{k,j} g_k e^{\varepsilon t} \left\{ b_k e^{i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^+ + \mu r_j^-) + b_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^- + \mu r_j^+) \right\}.$$

Здесь $\vec{x}_j$ – радиус-вектор j-го излучателя, μ – вещественный параметр и

$$g_k = \sqrt{\frac{2\pi\hbar}{\omega_k v}} \langle + | \mathcal{J} | - \rangle,$$

где v – удельный объем "вещества" ($v \equiv V_c/\mathcal{N}$) и $\mathcal{J}$ – фурье-компонента положительно-частотной части оператора тока перехода [33].

Отметим, что эффекты, связанные с рассмотрением электростатического дипольного взаимодействия, обсуждались в работах [24,26,28].

Модельная задача с гамильтонианом (I) допускает точное решение в термодинамическом пределе (при $\mathcal{N} \to \infty$), причем развитый в работе [8] вариант метода аппроксимирующих гамильтонианов [35] оказывается весьма эффективным и позволяет исследовать ряд обобщений модельной задачи (I). В частности, удалось показать, что гамильтониан (I) описывает фазовый переход в состояние, характеризуемое макроскопическим заполнением резонансной моды электромагнитного поля и спонтанной поляризацией в системе излучателей, причем величина заполнения оказывается пропорциональной квадрату удельной поляризации "вещества" [9].

Значительный интерес представляет решение динамической неравновесной задачи, т.е. описание кинетических свойств системы с гамильтонианом (I). Особое значение указанная проблема приобретает в связи с разработкой теории сверхизлучательного лазера рентгеновского и гамма-диапазонов. Действительно, при генерации коротковолнового когерентного электромагнитного излучения основную роль должны играть процессы коллективного спонтанного излучения в безрезонаторных системах коррелированных двухуровневых излучателей. При этом для выбора активной среды и рабочего режима особенно важно адекватное описание динамических процессов, приводящих к корреляции в системе излучателей и сверхизлучению, а также оценка времен релаксации из сверхизлучательного в невозбужденное состояние (т.е. времени высвечивания лазера) [36,37,27].

Проблема получения точного кинетического уравнения для такой системы из первых принципов сталкивается со значительными математическими трудностями. Поэтому при выводе такого уравнения обычно делают целый ряд дополнительных физических предположений и упрощений (см.,например, [6]).

С другой стороны, недавно был развит подход, позволяющий получить точное кинетическое уравнение для динамической системы, взаимодействующей с фононным полем в кристалле [38,39]. С помощью указанного подхода, в частности, удалось получить ряд важных результатов в теории полярона [39].

Отметим существование глубоких аналогий в математической формулировке рассматриваемой здесь проблемы и модельных задач, исследованных в работе [39], описывающих фермионную систему, взаимодействующую с фононами. Действительно, имеет место соответствие [40]

$$\sigma_f^- = a_f^+ a_{-f}^+ \,,\ \sigma_f^+ = a_{-f} a_f \,,\ \sigma_f^\pm = (\sigma_{fx} \pm i\sigma_{fy})/2 \ ,$$

где a_f^+, a_f – ферми-амплитуды; $f = (\vec{f}, s)$; вектор $\vec{f}$ принадлежит к квазидискретному спектру и s – спиновый индекс. С учетом указанного соответствия нетрудно установить эквивалентность в операторной структуре гамильтониана (I) и гамильтониана (5),(8) работы [39]. Пользуясь такой эквивалентностью, в настоящей работе мы построим кинетическое уравнение для системы с гамильтонианом (I) и рассмотрим некоторые его физические следствия.

2. Обобщенное кинетическое уравнение для системы двухуровневых излучателей, взаимодействующих с электромагнитным полем

Следуя работе [39], обозначим через $\mathcal{D}_t$ статистический оператор MF-системы (I), удовлетворяющий уравнению Лиувилля:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}_t = [\mathcal{H}_t, \mathcal{D}_t], \tag{2}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{t_0} = \rho(M) \cdot \mathcal{D}(F), \\ \mathcal{D}(F) \equiv e^{-\beta \mathcal{H}_F} \Big/ \underset{(F)}{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}_F}, \\ \underset{(M)}{Tr}\, \rho(M) = 1 \ , \end{cases} \tag{3}$$

соответствующими равновесному состоянию поля, причем его взаимодействие с M -системой ("веществом") считается включенным в момент времени $t = t_0$. Как нетрудно видеть из (2), (3), оператор $\mathcal{D}_t$ нормирован на единицу:

$$\underset{(M,F)}{Tr}\, \mathcal{D}_t = 1 .$$

Введем представление Гейзенберга для динамической величины $\mathfrak{A}(t, M, F)$, заданной в представлении Шредингера, соотношением [39]

$$\mathfrak{A}(t, M_t, F_t) = U^{-1}(t, t_0)\, \mathfrak{A}(t, M, F)\, U(t, t_0), \tag{4}$$

где унитарный оператор

$$U(t, t_0)$$

удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t,t_0) = \mathcal{H}_t U(t,t_0),$$

$$U(t_0,t_0) = 1.$$

Рассмотрим оператор $f(M)$, действующий на собственные функции гамильтониана (I) только как на функции переменных, относящихся к M - системе. Уравнение движения для оператора $f(M)$ в представлении Гейзенберга (4) имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(M_t) = [f(M_t), \mathcal{H}_t]. \tag{5}$$

Применяя развитый в работе[39] метод исключения бозонных переменных, уравнение (5) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
&\underset{(M)}{Tr} \left\{ f(M) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + (i\hbar)^{-1} \Big[\mathcal{H}_0 + \sum_j \hbar\Omega_j r_{jz}, f(M) \Big] \rho_t(M) \right\} = \\
&= \mathcal{N}^{-1} \sum_k g_k^2 \int_{t_0}^{t} d\tau \underset{(M,F)}{Tr}\, e^{-i\omega_k(t-\tau)} e^{\varepsilon(t+\tau)} \Big\{ \mathcal{N}_k \sum_j e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^-(\tau) + \\
&+ \mu r_j^+(\tau)) \Big[f(M_t), \sum_j e^{i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^+(t) + \mu r_j^-(t)) \Big] + (1+\mathcal{N}_k) \Big[\sum_j e^{i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^+(t) + \\
&+ \mu r_j^-(t)), f(M_t) \Big] \sum_j e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^-(\tau) + \mu r_j^+(\tau)) \Big\} \mathcal{D}_{t_0} + \\
&+ \mathcal{N}^{-1} \sum_k g_k^2 \int_{t_0}^{t} d\tau \underset{(M,F)}{Tr}\, e^{i\omega_k(t-\tau)} e^{\varepsilon(t+\tau)} \Big\{ (1+\mathcal{N}_k) \sum_j e^{i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^+(\tau) + \\
&+ \mu r_j^-(\tau)) \Big[f(M_t), \sum_j e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^-(t) + \mu r_j^+(t)) \Big] + \mathcal{N}_k \Big[\sum_j e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^-(t) + \\
&+ \mu r_j^+(t), f(M_t) \Big] \sum_j e^{i\vec{k}\vec{x}_j} (r_j^+(\tau) + \mu r_j^-(\tau)) \Big\} \mathcal{D}_{t_0},
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\rho_t(M) = \underset{(F)}{Tr}\, \mathcal{D}_t$ и

$$\mathcal{N}_k \equiv \frac{e^{-\frac{\beta\hbar\omega_k}{2}}}{2\, sh \frac{\beta\hbar\omega_k}{2}},$$

β - обратная температура.

В ряде случаев оказывается более удобным использовать вместо индивидуальных переменных $r_j^{\pm}$ формализм коллективных операторов излучателей /6/. Пусть вектор $\vec{\nu}$ соответствует модам в рабочем объеме V_c, число которых равно $\mathcal{N}$:

$$\nu_j = \frac{2\pi n_i}{L_i} \quad , \quad i = x, y, z ,$$

где n_i – целые числа. Определим коллективные операторы излучателей соотношением /6/

$$\begin{cases} R_{\nu}^{\pm} \equiv \sum\limits_j r_j^{\pm} e^{\pm i\vec{\nu}\vec{x}_j} , \\ R_{\nu z} \equiv \sum\limits_j r_{jz} \, e^{i\vec{\nu}\vec{x}_j} , \\ \Omega_{\nu} \equiv \sum\limits_j \Omega_j \, e^{-i\vec{\nu}\vec{x}_j} . \end{cases}$$

Совершая замену переменных и учитывая очевидные соотношения:

$$\begin{cases} \mathcal{N}^{-1} \sum\limits_j e^{i(\vec{\nu}-\vec{\nu}')\vec{x}_j} = \delta_{\nu\nu'} , \\ \mathcal{N}^{-1} \sum\limits_j e^{i\vec{\nu}(\vec{x}_j - \vec{x}_j')} = \delta_{jj'} , \end{cases}$$

уравнение (6) легко преобразовать к виду

$$\underset{(M)}{Tr} \left\{ f(M) \frac{\partial \rho_t(M)}{\partial t} + (i\hbar)^{-1} \Big[\sum_{\nu} \hbar \Omega_{\nu} R_{\nu z} + \mathcal{H}_o , f(M) \Big] \rho_t(M) \right\} =$$

$$= \mathcal{N}^{-1} \sum_{k,\nu} g_k^2 \int_{t_o}^{t} d\tau \underset{(M,F)}{Tr} e^{-i\omega_k (t-\tau)} e^{\varepsilon(t+\tau)} \Big\{ \mathcal{N}_k \mathcal{R}_{\nu}^{+}(\tau) [f(M_t), \mathcal{R}_{\nu}(t)] +$$

$$+ (1 + \mathcal{N}_k) [\mathcal{R}_{\nu}(t), f(M_t)] \mathcal{R}_{\nu}^{+}(\tau) \Big\} \mathcal{D}_{t_o} +$$

$$+ \mathcal{N}^{-1} \sum_{k,\nu} g_k^2 \int_{t_o}^{t} d\tau \underset{(M,F)}{Tr} e^{i\omega_k (t-\tau)} e^{\varepsilon(t+\tau)} \Big\{ (1 + \mathcal{N}_k) \mathcal{R}_{\nu}(\tau) [f(M_t), \mathcal{R}_{\nu}^{+}(t)] +$$

$$+ \mathcal{N}_k [\mathcal{R}_{\nu}^{+}(t), f(M_t)] \mathcal{R}_{\nu}(\tau) \Big\} \mathcal{D}_{t_o} , \tag{7}$$

где использованы обозначения

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\nu}(t) = R_{\nu}^{+}(t)\,\varphi(\vec{k}-\vec{\nu}) + \mu\, R_{\nu}^{-}(t)\,\varphi(\vec{k}+\vec{\nu}), \\ \mathcal{R}_{\nu}^{+}(t) = R_{\nu}^{-}(t)\,\varphi^{*}(\vec{k}-\vec{\nu}) + \mu\, R_{\nu}^{+}(t)\,\varphi^{*}(\vec{k}+\vec{\nu}), \\ \varphi(\vec{\varkappa}) = \mathcal{N}^{-1}\sum\limits_{j} e^{i\vec{\varkappa}\vec{x}_j}. \end{cases}$$

Уравнение (6) и эквивалентное ему уравнение (7) в представлении коллективных операторов в пределе при $t_0 \to -\infty$ представляют собой искомое обобщенное кинетическое уравнение для динамической системы, описываемой гамильтонианом (I). Перейдем теперь к рассмотрению возможных следствий полученного уравнения.

3. Проблема спонтанного излучения

Рассмотрим специальный случай, когда в начальный момент t_0 излучение (поле в системе) отсутствует:

$$\mathcal{Z}_F = |0\rangle\langle 0| . \qquad (8)$$

Появление поля при $t > t_0$ можно в этом случае трактовать как спонтанное излучение. С учетом начального условия (8) уравнение (7) можно преобразовать к виду

$$\operatorname*{Tr}_{(H)}\Big\{ f(H)\,\frac{\partial \rho_t(H)}{\partial t} + (i\hbar)^{-1}\big[\sum_{\nu}\hbar\Omega_{\nu} R_{\nu z} + \mathcal{H}_0,\, f(H)\big]\rho_t(H)\Big\} =$$

$$= \mathcal{N}^{-1}\sum_{k,\nu} g_k^2 \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \operatorname*{Tr}_{(H,F)}\Big\{ e^{-i\omega_k(t-\tau)}\, e^{\varepsilon(t+\tau)}\big[\mathcal{R}_{\nu}(t), f(H_t)\big]\mathcal{R}_{\nu}^{+}(\tau) +$$

$$+ e^{i\omega_k(t-\tau)}\, e^{\varepsilon(t+\tau)}\, \mathcal{R}_{\nu}(\tau)\big[f(H_t), \mathcal{R}_{\nu}^{+}(t)\big]\Big\}\, \mathcal{Z}_{t_0} , \qquad (9)$$

$$\mathcal{Z}_{t_0} \equiv \rho(H)\cdot|0\rangle\langle 0| .$$

Имея в виду сравнение с известными результатами, предположим, что излучатели жестко закреплены в узлах простой кубической решетки. Тогда

$$\mathcal{H}_0 = 0 .$$

Будем далее предполагать, что распределение собственных частот излучателей Ω_j симметрично относительно некоторой частоты Ω и не зависит от координат излучателей $\vec{x}_j$. Усредняя по распределению частот $\mathcal{J}(\omega)$, имеем

$$\overline{exp(i\Omega_j t)} = e^{i\Omega t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\mathcal{J}(\omega)\,d\omega .$$

Ограничимся рассмотрением специального случая, так называемого лоренцева неоднородного уширения /33/, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}\mathcal{J}(\omega)\,d\omega = e^{-\frac{|t|}{2T}},$$

где T - так называемое время жизни осциллятора. Подчеркнем, что обычно рассматривается более простой случай, когда для всех значений j имеет место равенство $\Omega_j = \Omega$. Предположим, что $\varepsilon = 0$, и пренебрежем быстро осциллирующими членами типа $R^+R^+, R^-R^-(\mu=1)$. Если $T \gg t \gg \tau_{max} \sim max\ \frac{L_i}{c}$, где c - скорость света, то в силу определения

$$R_\nu^{\pm}(\tau) \equiv \sum_j r_j^{\pm}(\tau)\, e^{\pm i\vec{\nu}\vec{x}_j} \simeq \sum_j r_j^{\pm}(t)\, e^{\mp i\Omega_j(t-\tau)}\, e^{\pm\vec{\nu}\vec{x}_j} =$$
$$= R_\nu^{\pm}(t)\, e^{\mp i\Omega(t-\tau)}\, e^{-\frac{t-\tau}{2T}} .$$

Заметим, что функция $\varphi(\vec{k}-\vec{\nu})$ имеет острый максимум при $\vec{k}=\vec{\nu}$. Поэтому величина

$$p(\nu,\nu';t,\tau) \equiv \mathcal{N}^{-1}\sum_k g_k^2\,\varphi(\vec{k}-\vec{\nu})\cdot\varphi(\vec{k}-\vec{\nu}')\cdot e^{-i\omega_k(t-\tau)}$$

также имеет острый пик при $\vec{\nu}=\vec{\nu}'$, и величинами $p(\cdot)$ при $\vec{\nu}\neq\vec{\nu}'$ можно пренебречь. С учетом сказанного уравнение (8) преобразуется к виду

$$\mathop{Tr}_{(H)}\left\{ f(H)\,\frac{\partial\rho_t(H)}{\partial t} + (i)^{-1}\Omega\sum_\nu [R_{\nu z}, f(H)]\,\rho_t(H)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_\nu\left\{ \Gamma_\nu^-[R_\nu^+, f(H)]R_\nu^- + \Gamma_\nu^+[R_\nu^-, f(H)]R_\nu^+ + \text{э.с.}\right\}\mathcal{D}_{t_0}, \qquad (10)$$

где

$$\Gamma_\nu^{\mp} \equiv \gamma_\nu^{\mp} - i\,\Omega_\nu^{\mp} ,$$

$$\gamma_\nu^{\mp} \equiv 2(2\pi)^{-3}\int d\vec{k}\ \frac{2T g_k^2\,\varphi^2(\vec{k}-\vec{\nu})}{1+4T^2(\omega_k \mp \Omega)^2} ,$$

$$\Omega_\nu^{\mp} \equiv 2(2\pi)^{-3}\int d\vec{k}\, g_k^2\,\varphi^2(\vec{k}-\vec{\nu})\ \frac{\omega_k \mp \Omega}{1+4T^2(\omega_k \mp \Omega)^2}\,4T^2 ,$$

и совершен переход от суммирования к интегрированию:

$$\sum_k \to (2\pi)^{-3}\int d\vec{k} .$$

Определим оператор[6]

$$S_\nu \equiv \sum_{jj'} r_j^+ r_{j'}^- \,e^{i\vec{\nu}(\vec{x}_j - \vec{x}_{j'})} .$$

Тогда из (10) получаем

$$\operatorname*{Tr}_{(H)}\Big\{ f(H)\frac{\partial\rho_t(H)}{\partial t} + i(\Omega+\Omega')[f(H_t),\sum_\nu R_{\nu z}]\rho_t(H) -$$

$$-\frac{i}{2}\sum_\nu \tilde{\Omega}_\nu\,[f(H), S_\nu]\rho_t(H) = \frac{1}{2}\sum_\nu \gamma_\nu^- \Big\{[R_\nu^+, f(H)]R_\nu^- +$$

$$+R_\nu^+[f(H), R_\nu^-]\Big\}\mathcal{D}_{t_0} + \frac{1}{2}\sum_\nu \gamma_\nu^+\Big\{[R_\nu^-, f(H)]R_\nu^+ + R_\nu^-[f(H), R_\nu^+]\Big\}\mathcal{D}_{t_0} , \qquad (11)$$

где величина

$$\Omega' \equiv \frac{1}{2}\sum_\nu (\Omega_\nu^+ - \Omega_\nu^-)$$

определяет постоянный сдвиг частот – так называемую бете-часть сдвига Лэмба[6], тогда как

$$\tilde{\Omega}_\nu \equiv \Omega_\nu^+ + \Omega_\nu^-$$

определяет коллективный сдвиг частот. Заметим, что определенные таким образом величины Ω', $\tilde{\Omega}$, $\gamma^{\pm}_{\nu}$ отличаются от соответствующих величин работы [6] и переходят в них в пределе при $T \to \infty$. В этом пределе уравнение (II) совпадает с марковским Master Equation работы [6], полученным в приближении слабого взаимодействия и описывающим коллективное спонтанное излучение. Простейший вариант уравнения (II) был получен для одномодового случая в работе [41]. Подчеркнем, что уравнение коллективного спонтанного излучения (II) найдено в настоящей работе как частный случай обобщенного кинетического уравнения (7) с начальными условиями (8).

4. Обсуждение результатов

Таким образом, проведенное в настоящей работе распространение метода работ [38,39] на случай динамической двухуровневой системы, взаимодействующей с электромагнитным полем, позволяет получить обобщенное кинетическое уравнение для такой системы (7). Указанное уравнение является точным.

Для начальных условий специального вида (8) обобщенное кинетическое уравнение (7) может быть преобразовано в уравнение коллективного спонтанного излучения (II). На основе обобщенного кинетического уравнения (7) можно получить и другие известные результаты теории сверхизлучения, в частности, уравнение для угла Блоха ψ, вводимого соотношением

$$\langle R_z \rangle = \frac{N}{2} \cos \psi ,$$

а также зависимость интенсивности излучения

$$I(t) \equiv -\frac{\partial}{\partial t} \langle R_z \rangle$$

от времени.

Подчеркнем, что подход к описанию динамики двухуровневой системы, взаимодействующей с электромагнитным полем, рассмотренный в настоящей работе, представляется наиболее общим. В дальнейшем мы предполагаем использовать указанный подход для исследования релаксационных процессов в сверхизлучательных системах, а также обобщить уравнение (7) на случай системы излучателей на сжимаемой решетке [26].

Литература

1. Hepp K., Lieb E. Ann. Phys. (N.Y.), 1973, 76, p. 360.
2. Wang Y.K., Hioe F.T. Phys. Rev., 1973, A7, p. 831.
3. Загребнов В.А., Бранков Й.Г., Тончев Н.С. ДАН СССР, 1975, 225, с. 71.
4. Thompson B.V. J. Phys. A, 1975, 8, p. 126.
5. Bonifatio R., Lugiato L.A. Phys. Rev., 1975, A11, p. 1507; Phys. Rev., 1975, A12, p. 587.
6. Banfi G., Bonifatio R. Phys. Rev., 1975, A12, p. 2068.
7. Заславский Г.М., Куденко Ю.А., Сливинский А.П. ЖЭТФ, 1975, 68, с. 2276.
8. Bogolubov N.N. Jr., Plechko V.N. Physica, 1976, 82A, p. 163.
9. Боголюбов Н.Н. (мл.), Плечко В.Н. ДАН СССР, 1976, 228, с. 1061.
10. Gilmore R., Bowden C.M. J.Math. Phys., 1976, 17, p. 1617.
11. Klemm A., Zagrebnov V.A. Physica, 1976, 86A, p. 400.
12. Боголюбов Н.Н. (мл.), Курбатов А.М., Плечко В.Н. ОИЯИ, Д17-9737, Дубна, 1976.
13. Емельянов В.И., Климонтович Ю.Л. Квантовая электроника, 1976, 3, с. 848.
14. Ермилов А.Н., Курбатов А.М. ОИЯИ, Р17-10247, Дубна, 1976.
15. Gilmore R. Phys. Lett., 1977, 60A, p. 387.
16. Мощинский Б.В., Федянин В.К. ТМФ, 1977, 32, с. 96.
17. Klemm A., Zagrebnov V.A., Ziesche P. J. Phys. A, 1977, 10, p.198.
18. Rzazewski K., Wodkiewicz K., Zakowicz W. Phys. Lett., 1977, 58A, p. 211.
19. Емельянов В.И., Климонтович Ю.Л. Письма в ЖЭТФ, 1978, 27, с. 7.
20. Майминстров А.И., Манукян Э.А. Журнал прикладной спектроскопии, 1978, 29, с. 353.
21. Gilmore R., Narducci L.M. Phys. Rev., 1978, A17, p. 1747.
22. Слюсарев В.А., Янкелевич Р.П. ТМФ, 1979, 40, с. 124.
23. Боголюбов Н.Н. (мл.), Возяков В.И., Плечко В.Н. ОИЯИ, Е17-12987, Дубна, 1979.
24. Kudryavtsev I.K., Shumovsky A.S. Optica Acta, 1979, 26, P. 827.
25. Зданьский А.К., Курбатов А.М. Препринт ИТФ-79-41Р, Киев, 1979.
26. Кудрявцев И.К., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1979, 248, с. 335.
27. Андреев А.В., Арутюнян Р.В., Ильинский Ю.А. Вестник Московского ун-та. Сер. физ., астроном., 1979, 20, с. 47.
28. Кудрявцев И.К., Мелешко А.Н., Шумовский А.С. Квантовая электро-

ника, 1979, 6, с. 2434; Квантовая электроника, 1976, 6, с. 2573.
29. Aharonov Y., Knight J.M. Phys. Rev. Lett., 1980, 45, p. 1920.
30. Кирьянов В.Б., Ярунин В.С. ТМФ, 1980, 43, с. 91.
31. Campagno G. Phys. Lett., 1980, 80A, p. 125.
32. Ахметели А.М., Меленко А.Н., Шумовский А.С. ДАН СССР, 1981, 256, с. 1094.
33. Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. "Мир", М., 1978.
34. Электромагнитное сверхизлучение. Изд. Физико-технического ин-та Казанского филиала АН СССР, Казань, 1975.
35. Боголюбов Н.Н. (мл.). Метод исследования модельных гамильтонианов. "Наука", М., 1974.
36. Андреев А.В., Ильинский Ю.А., Хохлов Р.В. ЖЭТФ, 1977, 73, с.1296.
37. Андреев А.В. ЖЭТФ, 1977, 72, с. 1397.
38. Боголюбов Н.Н. ОИЯИ, Е17-11822, Дубна, 1978.
39. Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.). ЭЧАЯ, 1980, 11, с. 245.
40. Шумовский А.С. В кн.: Международный симпозиум по избранным проблемам статистической механики. ОИЯИ, Д17-11490, Дубна, 1978, с. 168.
41. Bonifatio R., Schwandimann P., Haake F. Phys. Rev., 1971, A4, p. 302, 854.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 июля 1981 года.