сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



P17-81-127

Нгуен Танг

# УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

1981

## ВВЕДЕНИЕ

Для изучения необратимых процессов в неравновесной термодинамике исходят из уравнений баланса. Для системы заряженных частиц в электромагнитном поле эти уравнения построены с помощью уравнений Максвелла [1,2]. В кинетической теории некоторые уравнения баланса такой системы определяются в приближении самосогласованного поля /см., например. [3] /. До сих пор, по нашему мнению, еще не дано статистической основы точных уравнений баланса для системы заряженных частиц. В данной статье получены уравнения баланса для этой системы на основе метода производной по параметру [4].

## 1. ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ

Пусть гамильтониан неравновесной системы имеет вид

$$H = H_0 + H_t = H_0 - \sum_i a_i f_i(t) Q_i - a_1^2 f'(t) Q'. \qquad /1/$$

где $a_i$ - параметры, $f_i(t)$, $f(t)$ - функции, зависящие от времени; $Q_i, Q'$ - соответственно операторы обобщенных координат. Предположим, что система находится в равновесном состоянии в момент $t = -\infty$.

Дифференцируя по параметру $a_1$ оператор

$$F(t) = U^+(t) F U(t), \qquad /2/$$

где $U(t)$ - оператор эволюции по времени, и следуя путем, разработанным в работе [4], получаем формулу

$$\frac{\partial F(t)}{\partial a_1} - \frac{\partial F}{\partial a_1}(t) = -\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} dt' \{ f_1(t')[F(t), Q_1(t')]_- + 2a_1 f'(t)[F(t), Q'(t')] \}. \qquad /3/$$

Таким образом, среднее значение величины F равно

$$\langle F(t)\rangle_a = \langle F\rangle_0 + \sum_i \int_0^{a_i} da_i \left\langle \frac{\partial F}{\partial a_i}(t)\right\rangle_a - \sum_i \int_0^{a_i} da_i' \int_{-\infty}^{\infty} dt' f_i(t') G^{ret}_{FQ_i}(t,t') - \qquad /4/$$
$$- 2\int_0^{a_1} da_1' a_1' \int_{-\infty}^{\infty} f'(t') G^{ret}_{FQ'}(t,t') dt',$$

в котором $G^{ret}_{FG}(t,t')$ есть функция Грина [4]

$$G^{ret}_{FQ}(t,t') = \eta(t-t')\frac{1}{i\hbar}\langle [F(t), Q(t')]_-\rangle_a = \eta(t-t')\frac{1}{i\hbar} Sp\{[F(t), Q(t')]_- \rho_0\}, \qquad /5/$$

где $F(t), Q(t)$ имеет вид /2/.

Формула /4/ является точной для среднего значения. С помощью этой формулы определим уравнения баланса для системы заряженных частиц в электромагнитном поле.

Гамильтониан системы заряженных частиц имеет вид

$$H = \frac{1}{2m} \int \psi^{+}(\vec{x}) \left(\frac{h}{i} - \frac{ea_1}{c} \vec{A}(\vec{x}, t)\right)^2 \psi(\vec{x})\, d\vec{x} + \int ea_2 \phi(\vec{x}, t)\, \psi^{+}(\vec{x})\, \psi(\vec{x})\, d\vec{x} + H_{int}, \qquad /6/$$

где $a_1\vec{A}(\vec{x}, t)$ – векторный потенциал, $a_2\phi(\vec{x}, t)$ – скалярный потенциал, и для простоты рассмотрим лишь один сорт частиц.

Выражение /6/ можно записать в другом виде

$$H = H_0 - \frac{a_1}{c} \int \vec{A}(\vec{x}, t)\, \vec{j}_{oe}(\vec{x})\, d\vec{x} + a_2 \int \phi(\vec{x}, t)\, \rho_e(\vec{x})\, d\vec{x} + \frac{ea_1^2}{2mc^2} \int \vec{A}^2(\vec{x}, t)\, \rho_e(\vec{x})\, d\vec{x}, \qquad /7/$$

где $H_0$ – гамильтониан системы в отсутствие электромагнитного поля

$$H_0 = -\frac{h^2}{2m} \int \psi^{+}(\vec{x}) \nabla^2 \psi(\vec{x})\, d\vec{x} + H_{int}, \qquad /8/$$

$\vec{j}_{oe}(\vec{x})$ – оператор плотности тока в отсутствие поля

$$\vec{j}_{oe}(\vec{x}) = \frac{eh}{2mi} \{\psi^{+}(\vec{x}) \nabla \psi(\vec{x}) - \nabla \psi^{+}(\vec{x})\, \psi(\vec{x})\}, \qquad /9/$$

$\rho_e(\vec{x})$ – оператор плотности заряда

$$\rho_e(\vec{x}) = e\, \psi^{+}(\vec{x})\, \psi(\vec{x}). \qquad /10/$$

Как известно, оператор плотности тока в электромагнитном поле равен

$$\vec{j}_e(\vec{x}) = \vec{j}_{oe}(\vec{x}) - \frac{e^2 a_1}{mc} \vec{A}(\vec{x}, t)\, \psi^{+}(\vec{x})\, \psi(\vec{x}). \qquad /11/$$

Таким образом, оператор $\vec{j}_e(\vec{x})$ явно зависит от параметра $a_1$. Следовательно, используя формулу /4/, имеем точное выражение для плотности тока

$$\langle \vec{j}_e(\vec{x}, t) \rangle_a = -\frac{e\vec{A}(\vec{x}, t)}{mc} \int_0^{a_1} da_1 \langle \rho_e(\vec{x}, t) \rangle_a - \frac{1}{c} \int_0^{a_1} da_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \vec{A}(\vec{x}', t')\, G^{ret}_{\vec{j}_e \vec{j}_{oe}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') +$$
$$+ \int_0^{a_2} da_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \phi(\vec{x}', t')\, G^{ret}_{\vec{j}_e \rho_e}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \qquad /12/$$
$$+ \frac{e}{mc^2} \int_0^{a_1} da_1' a_1' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \vec{A}^2(\vec{x}', t')\, G^{ret}_{\vec{j}_e \rho_e}(\vec{x}, t; \vec{x}', t').$$

Аналогично, точная формула для плотности заряда имеет вид

$$\langle \rho_e(\vec{x}, t) \rangle_a = \langle \rho_e \rangle_0 - \frac{1}{c} \int_0^{a_1} da_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \vec{A}(\vec{x}', t')\, G^{ret}_{\rho_e \vec{j}_{oe}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') +$$
$$+ \int_0^{a_2} da \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \phi(\vec{x}', t')\, G^{ret}_{\rho_e \rho_e}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') + \qquad /13/$$
$$+ \frac{e}{mc^2} \int_0^{a_1} a_1' da_1' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \vec{A}^2(\vec{x}', t')\, G^{ret}_{\rho_e \rho_e}(\vec{x}, t; \vec{x}', t').$$

Можем еще определить приближенное выражение для среднего значения. Так, например, найдем теперь выражения плотностей тока и заряда в первом нелинейном приближении. Разлагая $\langle \vec{j}_e(\vec{x}, t) \rangle_a$ и $\langle \rho_e(\vec{x}, t) \rangle_a$ по параметрам $a_1$ и $a_2$ /4/, получаем выражение для плотности тока

$$\langle \vec{j}_e(\vec{x}, t) \rangle_a = \vec{j}_{лин.} + \vec{j}_{нел.},$$

$$\vec{j}_{лин.} = -\frac{e}{mc} \langle \rho_e(\vec{x}) \rangle_o\, a_1 \vec{A}(\vec{x}, t) - \frac{a_1}{c} \int_{\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \vec{A}(\vec{x}', t')\, G^{ret_o}_{\vec{j}_{oe} \vec{j}_{oe}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') +$$
$$+ a_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}'\, \phi(\vec{x}', t')\, G^{ret_o}_{\vec{j}_{oe} \rho_e}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'),$$

$$\vec{j}_{нел.} = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}' \Big\{ \frac{ea_1^2 \vec{A}(\vec{x}, t)\, \vec{A}(\vec{x}', t')}{mc^2} G^{ret_o}_{\rho_e \vec{j}_{oe}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t') +$$
$$+ \frac{ea_1^2 A^2(x', t')}{2mc^2} G^{ret_o}_{\vec{j}_o \rho_e}(x, t; x', t') - \frac{ea_1 a_2 A(x, t)\, \phi(x', t')}{mc} G^{ret_o}_{\rho_e \rho_e}(x, t; x', t') \Big\} +$$
$$+ \iint_{-\infty}^{\infty} dt' dt'' \iint d\vec{x}'\, d\vec{x}'' \Big\{ \frac{a_1^2 \vec{A}(x', t')\, \vec{A}(x'', t'')}{2c^2} \Big[ \Gamma^{ret_o}_{\vec{j}_{oe} \vec{j}_{oe} \vec{j}_{oe}}(\vec{x}, t; \vec{x}'', t''; \vec{x}', t') +$$
$$+ Д^{ret_o}_{\vec{j}_{oe} \vec{j}_{oe} \vec{j}_{oe}}(\vec{x}, t; \vec{x}', t'; \vec{x}'', t'') \Big] - \frac{a_1 a_2 \vec{A}(x', t')\, \phi(x'', t'')}{2c} \times$$

$$\times[\Gamma^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\rho_e\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') + Д^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'') +$$

$$+\Gamma^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'') + Д^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\rho_e\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t')] +$$

$$+\frac{a_2^2\phi(x',t')\phi(x'',t'')}{2}[\Gamma^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\rho_e\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') +$$

$$+Д^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\rho_e\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'')]\} \qquad /15/$$

и выражение для плотности заряда

$$\langle\rho_e(\vec{x},t)\rangle_a = \rho_{лин.} + \rho_{нел.},$$

$$\rho_{лин.} = \langle\rho(\vec{x})\rangle_o - \frac{a_1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} dt'\int d\vec{x}'\vec{A}(\vec{x}',t')G^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}',t') + \qquad /16/$$

$$+a_2\int_{-\infty}^{\infty} dt'\int d\vec{x}'\phi(\vec{x}',t')G^{ret\,o}_{\rho_e\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t'),$$

$$\rho_{нел} = \frac{1}{2}\iint_{-\infty}^{\infty} dt'dt''\iint d\vec{x}'d\vec{x}''\{\frac{a_1^2}{c^2}\vec{A}(\vec{x}',t')\vec{A}(\vec{x}'',t'') \times$$

$$\times[\Gamma^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') + Д^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'')] -$$

$$-\frac{a_1a_2}{c}\vec{A}(\vec{x}',t')\phi(\vec{x}'',t'')[\Gamma^{ret\,o}_{\rho_e\rho_e\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') +$$

$$+Д^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'') +$$

$$+\Gamma^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'') + Д^{ret\,o}_{\rho_e\rho_e\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t')] +$$

$$+a_2^2\phi(\vec{x}',t')\phi(\vec{x}'',t'')[\Gamma^{ret\,o}_{\rho_e\rho_e\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') +$$

$$+Д^{ret\,o}_{\rho_e\rho_e\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'')]\}, \qquad /17/$$



где $G^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}}$, $\Gamma^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}}$, $Д^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}\rho_e}$ ..... - равновесные функции Грина. Так, например,

$$G^{ret\,o}_{\rho_e\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}',t') = \eta(t-t')\frac{1}{ih}\langle[\rho_e^o(\vec{x},t),\vec{j}^o_{oe}(\vec{x}',t')]_-\rangle_o, \qquad /18/$$

$$\Gamma^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}'',t'';\vec{x}',t') =$$

$$= \eta(t-t'')\eta(t-t')\frac{1}{(ih)^2}\langle[[\vec{j}^o_{oe}(\vec{x},t),\vec{j}^o_{oe}(\vec{x}'',t'')]\vec{j}^o_{oe}(\vec{x}',t')]_-\rangle_o, \qquad /19/$$

$$Д^{ret\,o}_{\vec{j}_{oe}\vec{j}_{oe}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t';\vec{x}'',t'') = \qquad /20/$$

$$= \eta(t-t')\eta(t'-t'')\frac{1}{(ih)^2}\langle[\vec{j}^o_{oe}(\vec{x},t)[\vec{j}^o_{oe}(\vec{x}',t'),\rho_e^o(\vec{x}'',t'')]_-]_-\rangle_o,$$

где

$$\rho_e^o(\vec{x},t) = e^{iH_ot/h}\rho_e(\vec{x})e^{-iH_ot/h},$$

$$\vec{j}^o_{oe}(\vec{x},t) = e^{iH_ot/h}\vec{j}_{oe}(\vec{x})e^{-iH_ot/h}.$$

Линейные члены $\vec{j}_{лин.}, \rho_{лин.}$ совпадают с результатами теории возмущений [5], но выражения нелинейных членов $\vec{j}_{нел.}, \rho_{нел.}$ являются более полными по сравнению с теорией возмущений [4].

## 2. УРАВНЕНИЕ СОХРАНЕНИЯ ЗАРЯДА

Прежде всего напишем уравнение движения оператора $\psi(\vec{x})$

$$ih\frac{\partial\psi(\vec{x})}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\nabla^2\psi(\vec{x}) + \int\Phi(\vec{x}-\vec{x}')n(\vec{x}')\psi(\vec{x})d\vec{x}' + ea_2\phi(\vec{x},t)\psi(\vec{x}) -$$

$$-\frac{eha_1}{mci}\vec{A}(\vec{x},t)\nabla\psi(\vec{x}) + \frac{e^2a_1^2}{2mc^2}\vec{A}^2(\vec{x},t)\psi(\vec{x}), \qquad /21/$$

где мы использовали вид оператора потенциальной энергии взаимодействия

$$H_{int} = \frac{1}{2}\int \Phi(\vec{x}-\vec{x}')\psi^{+}(\vec{x})n(\vec{x}')\psi(\vec{x})\,d\vec{x}'d\vec{x}$$

и перестановочные соотношения для операторов $\psi(\vec{x})$, а также условие $\operatorname{div}\vec{A} = 0$.

Тогда уравнение сохранения зарядов в операторной формуле имеет вид

$$\frac{\partial \rho_e(\vec{x})}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j}_e(\vec{x}) = 0. \qquad /22/$$

Дифференцируя выражение /13/ по времени с замечанием

$$-\frac{1}{c}\int_0^{a_1} da_1 \int d\vec{x}'\vec{A}(\vec{x}',t)\frac{1}{ih}\langle[\rho_e(\vec{x},t),\vec{j}_{oe}(\vec{x}',t)]_-\rangle_a = -\frac{e\vec{A}(\vec{x},t)}{mc}\int_0^{a_1} da_1 \langle\rho_e(\vec{x},t)\rangle_a$$

и используя /12/, /22/, находим уравнение сохранения зарядов

$$\frac{\partial\langle\rho_e(\vec{x},t)\rangle_a}{\partial t} + \operatorname{div}\langle\vec{j}_e(\vec{x},t)\rangle_a = 0. \qquad /23/$$

## 3. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ

Из выражения /9/ можем вывести уравнение для оператора плотности тока частиц $\vec{j}(x) = \frac{1}{e}\vec{j}_{oe}(\vec{x})$

$$\frac{\partial j_\alpha(\vec{x})}{\partial t} + \sum_\beta \nabla_\beta\Big\{\frac{h^2}{2m^2}\Big[\nabla_\beta\psi^{+}(\vec{x})\nabla_\alpha\psi(\vec{x}) + \nabla_\alpha\psi^{+}(\vec{x})\nabla_\beta\psi(\vec{x}) - \frac{1}{2}\nabla^2_{\beta\alpha}n(\vec{x})\Big] -$$

$$-\frac{eha_1}{2m^2ci}\Big[A_\beta(\psi^{+}(\vec{x})\nabla_\alpha\psi(\vec{x}) - \nabla_\alpha\psi^{+}(\vec{x})\psi(\vec{x})) + A_\alpha(\psi^{+}(\vec{x})\nabla_\beta\psi(\vec{x}) - \nabla_\beta\psi^{+}(\vec{x})\psi(\vec{x}))\Big]\Big\} =$$

$$= -\frac{1}{m}\int\nabla_\alpha\Phi(\vec{x}-\vec{x}')\psi^{+}(\vec{x})n(\vec{x}')\psi(\vec{x})\,d\vec{x}' - \frac{en}{m}\Big[a_2\nabla_\alpha\phi(\vec{x},t) + \frac{a_1}{c}\frac{\partial A_\alpha(\vec{x},t)}{\partial t}\Big] -$$

$$-\frac{eha_1}{2m^2ci}\sum_\beta(\nabla_\alpha A_\beta(\vec{x},t) - \nabla_\beta A_\alpha(\vec{x},t))(\nabla_\beta\psi^{+}(\vec{x})\psi(\vec{x}) - \psi^{+}(\vec{x})\nabla_\beta\psi(\vec{x})) -$$

$$-\frac{e^2a_1^2}{2m^2c^2}\Big[\nabla_\alpha\sum_\beta A^2_\beta(\vec{x},t)n(\vec{x}) + 2\sum_\beta A_\beta(\vec{x},t)A_\alpha(\vec{x},t)\nabla_\beta n(\vec{x})\Big], \quad \alpha,\beta = 1,2,3. \qquad /24/$$



Подобно[5], первый член правой части /24/ можно преобразовать к виду дивергенции. Второй член записывается в виде

$$-\frac{e}{m}\Big[a_2\nabla_\alpha\phi(\vec{x},t) + \frac{a_1}{c}\frac{\partial A_\alpha(\vec{x},t)}{\partial t}\Big]n(\vec{x}) = \frac{e}{m}D_\alpha(\vec{x},t)n(\vec{x}),$$

где $\vec{D}$ – вектор электрической индукции

$$\vec{D} = -a_2\nabla\phi(\vec{x},t) - \frac{a_1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{x},t)}{\partial t}. \qquad /25/$$

Третий член равен

$$-\frac{eha_1}{2m^2ci}\sum_\beta(\nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha)(\nabla_\beta\psi^{+}\cdot\psi - \psi^{+}\nabla_\beta\psi) = \frac{1}{mc}(\vec{j}_{oe}\times\vec{B})_\alpha,$$

где $\vec{B}$ – вектор магнитной индукции

$$\vec{B} = a_1\operatorname{rot}\vec{A}. \qquad /26/$$

А последний можно записать в виде

$$-\frac{e^2a_1^2}{2m^2c^2}\Big[\nabla_\alpha\sum_\beta A^2_\beta n(\vec{x}) + 2\sum_\beta A_\beta A_\alpha\nabla_\beta n(\vec{x})\Big] = -\frac{e^2a_1^2}{2m^2c^2}\nabla_\alpha A^2 n(\vec{x}) -$$

$$-\frac{e^2a_1^2}{m^2c^2}\sum_\beta\nabla_\beta(A_\beta A_\alpha n(\vec{x})) + \frac{e^2a_1^2n(\vec{x})}{m^2c^2}\sum_\beta(A_\beta\cdot\nabla_\beta)A_\alpha.$$

Таким образом, уравнение движения системы записано в операторной форме

$$\frac{\partial\vec{p}(\vec{x})}{\partial t} + \operatorname{Div}T(\vec{x}) = e\vec{D}n(\vec{x}) + \frac{1}{c}\vec{j}_e(\vec{x})\times\vec{B}. \qquad /27/$$

Для вывода /27/ мы применили известное соотношение

$$\vec{A}\times\nabla\times\vec{A} = \frac{1}{2}\nabla A^2 - (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{A}.$$

Оператор тензора напряжений системы заряженных частиц равен

$$T_{\beta\alpha}(\vec{x}) = T^{o}_{\beta\alpha}(\vec{x}) - \frac{a_1}{c}\Big[A_\beta j_{oe\alpha}(\vec{x}) + A_\alpha j_{oe\beta}(\vec{x})\Big] + \frac{ea_1^2}{mc}A_\beta A_\alpha\rho_e(\vec{x}). \qquad /28/$$

В /28/ $T^{o}_{\beta\alpha}(x)$ есть оператор тензора напряжений системы в отсутствие электромагнитного поля[5]. Третий член $\frac{ea_1^2}{mc^2}A_\beta A_\alpha\rho_e(\vec{x})$ соответствует конвективному движению частиц в магнитном поле. В том случае, когда система находится в слабом электромагнитном поле, можно считать $T_{\beta\alpha}(\vec{x}) \approx T^{o}_{\beta\alpha}(\vec{x})$, как это предполагается в неравновесной термодинамике[1].

Правая часть уравнения /27/ есть оператор плотности электромагнитной силы /сила Лоренца/.

Согласно /4/, исходя из /28/, получаем точную формулу для тензора напряжения системы

$$\langle T(\vec{x},t)\rangle_a = \langle T(\vec{x})\rangle_0 - \sum_{\alpha,\beta}\int_0^{a_1} da_1' \{ \frac{1}{c}(A_\alpha \langle j_{0e\beta}(\vec{x},t)\rangle_a + A_\beta \langle j_{0e\alpha}(\vec{x},t)\rangle_a \} -$$

$$- \frac{2ea_1'}{mc} A_\beta A_\alpha \langle \rho_e(\vec{x},t)\rangle_a \} - \frac{1}{c}\int_0^{a_1} da_1' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}' A(\vec{x}',t') G^{ret}_{T-T^0, \vec{j}_{0e}}(\vec{x},t;\vec{x}',t') +$$

$$+ \int_0^{a_2} da_2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}' \phi(\vec{x}',t') G^{ret}_{T\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t') + \qquad /29/$$

$$+ \frac{e}{mc^2}\int_0^{a_1} a_1' da_1' \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int d\vec{x}' A^2(\vec{x}',t') G^{ret}_{T\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t').$$

Следовательно, используя /12/, /13/, /27/, /29/, находим уравнение движения системы

$$\frac{\partial \langle \vec{p}(\vec{x},t)\rangle_a}{\partial t} + \mathrm{Div}\langle T(\vec{x},t)\rangle_a = e\vec{D}\langle n(\vec{x},t)\rangle_a + \frac{1}{c}\langle \vec{j}_e(\vec{x},t)\rangle_a \times \vec{B}. \qquad /30/$$

Если система состоит из многих сортов частиц, то нетрудно обобщить уравнение /30/ для получения уравнения движения

$$\frac{\partial \langle \vec{p}(\vec{x},t)\rangle_a}{\partial t} + \mathrm{Div}\langle T(\vec{x},t)\rangle_a = \sum_i e_i \vec{D}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a + \sum_i \frac{e_i}{c}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \times \vec{B},$$

$$\langle \vec{p}(\vec{x},t)\rangle_a = \sum_i \langle \vec{p}_i(\vec{x},t)\rangle_a, \quad \langle T(\vec{x},t)\rangle_a = \sum_i \langle T_i(\vec{x},t)\rangle_a. \qquad /31/$$

Введем скорость центра массы

$$\vec{v}(\vec{x},t) = \frac{\sum_i \langle \vec{p}_i(\vec{x},t)\rangle_a}{\sum_i m_i \langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a} \qquad v \ll c \qquad /32/$$

и оператор диффузного потока

$$\vec{J}_i(\vec{x},t) = m_i [\vec{j}_i(\vec{x},t) - n_i(\vec{x},t)\vec{v}]. \qquad /33/$$

Тогда уравнение баланса импульса /31/ приводится к виду

$$\langle \rho(\vec{x},t)\rangle_a \frac{d\vec{v}}{dt} + \mathrm{Div}\langle P(\vec{x},t)\rangle_a = \qquad /34/$$

$$= \sum_i e_i \vec{D}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a + \sum_i \frac{e_i}{c}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \times \vec{B},$$



$$\langle P(\vec{x},t)\rangle_a = \langle T(\vec{x},t)\rangle_a - \langle \rho(\vec{x},t)\rangle_a \vec{v}\vec{v}. \qquad /35/$$

Из /34/ найдем уравнение баланса для кинетической энергии движения центра массы

$$\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{2}\langle \rho(\vec{x},t)\rangle_a v^2) + \mathrm{div}\{[\frac{1}{2}\langle \rho(\vec{x},t)\rangle_a v^2 + \langle P(\vec{x},t)\rangle_a]\vec{v}\} = \qquad /36/$$

$$= \sum_i e_i \vec{D}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a \vec{v} - \sum_i \frac{e_i}{m_i c}\langle \vec{J}_i(\vec{x},t)\rangle_a \cdot \vec{v}\times\vec{B} + \langle P(\vec{x},t)\rangle_a : \mathrm{Grad}\,\vec{v},$$

где $\langle \vec{J}_i(\vec{x},t)\rangle_a$ – диффузионный поток

$$\sum_i \langle \vec{J}_i(\vec{x},t)\rangle_a = 0.$$

## 4. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ

Исходя из выражения для $H_0(\vec{x})$ и используя /21/, находим уравнение, описывающее изменение энергии:

$$\frac{\partial H_0(\vec{x})}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_{H_0}(\vec{x}) = -ea_2\,\mathrm{grad}\,\phi \cdot \vec{j}_0(\vec{x}) - \frac{e^2 a_1^2}{2mc^2}\mathrm{grad}\,A^2 \cdot \vec{j}_0(\vec{x}), \qquad /37/$$

где

$$\vec{j}_{H_0}(\vec{x}) = \frac{h^3}{4m^2 i}(\nabla\psi^+\nabla^2\psi - \nabla^2\psi^+\nabla\psi) + \frac{1}{2}\int \Phi(\vec{x}-\vec{x}')\psi^+(\vec{x}')\vec{j}_0(\vec{x})\psi(\vec{x}')d\vec{x}' +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}\nabla^{n-1}\int d\vec{x}'(\vec{x}-\vec{x}')^n \nabla\Phi(\vec{x}-\vec{x}')\{\psi^+(\vec{x}')\vec{j}(\vec{x})\psi(\vec{x}') + \qquad /38/$$

$$+ \psi^+(\vec{x})\vec{j}(\vec{x}')\psi(\vec{x})\} - \frac{eh^2 a_1}{2m^2 c}\vec{A}\,\nabla\psi^+\nabla\psi$$

– оператор потока энергии.

Этот оператор зависит от параметра $a_1$, поэтому, согласно /4/, его среднее значение равно

$$\langle \vec{j}_{H_0}(\vec{x},t)\rangle_a = -\int_0^{a_1} da_1 \{\frac{eh^2}{2m^2 c}\vec{A}\langle \nabla\psi^+(\vec{x},t)\nabla\psi(\vec{x},t)\rangle_z +$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{e}{mc}\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}\nabla^{n-1}\int(\vec{x}-\vec{x}')^n \nabla\Phi(\vec{x}-\vec{x}')[\vec{A}(\vec{x},t)\langle \psi^+(\vec{x}',t)n(\vec{x},t)\psi(\vec{x}',t)\rangle_a +$$

$$+\vec{A}(\vec{x}',t)\langle\psi^{+}(\vec{x},t)\,n(\vec{x}',t)\,\psi(\vec{x},t)\rangle_a\,]\,d\vec{x}\}\;-$$

$$-\frac{1}{c}\int_0^{a_1}da_1'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d\vec{x}'\vec{A}(\vec{x}',t')\,G^{ret}_{\vec{j}_{H_0}\,\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}',t')+\int_0^{a_2}da_2\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d\vec{x}'\phi(\vec{x}',t')\times$$

$$\times G^{ret}_{\vec{j}_{H_0}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t')+\frac{e}{mc^2}\int_0^{a_1}a_1'da_1'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d\vec{x}'A^2(\vec{x}',t')\,G^{ret}_{\vec{j}_{H_0}\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t'). \qquad /39/$$

Средняя энергия $\langle H_0(\vec{x},t)\rangle_a$ имеет вид

$$\langle H_0(\vec{x},t)\rangle_a=\langle H_0(\vec{x})\rangle_a-\frac{1}{c}\int_0^{a_1}da_1'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d\vec{x}'\vec{A}(\vec{x}',t')\,G^{ret}_{H_0\vec{j}_{oe}}(\vec{x},t;\vec{x}',t')+ \qquad /40/$$

$$+\int_0^{a_2}da_2\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d\vec{x}'\phi(\vec{x}',t')\,G^{ret}_{H_0\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t')\;+$$

$$+\frac{e}{mc^2}\int_0^{a_1}a_1'da_1'\int_{-\infty}^{\infty}dt'\int d\vec{x}'A^2(\vec{x}',t')\,G^{ret}_{H_0\rho_e}(\vec{x},t;\vec{x}',t').$$

Следовательно, аналогично предыдущему, получаем уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial\langle H_0(\vec{x},t)\rangle_a}{\partial t}+\mathrm{div}\langle\vec{j}_{H_0}(\vec{x},t)\rangle_a=-e a_2\,\mathrm{grad}\,\phi\cdot\langle\vec{j}_0(\vec{x},t)\rangle_a\;-$$

$$-\frac{e^2a_1^2}{2mc^2}\,\mathrm{grad}\,A^2\cdot\langle\vec{j}_0(\vec{x},t)\rangle_a. \qquad /41/$$

Для системы, состоящей из многих сортов частиц, уравнение имеет вид

$$\frac{\partial\langle H_0(\vec{x},t)\rangle_a}{\partial t}+\mathrm{div}\langle\vec{j}_{H_0}(\vec{x},t)\rangle_a=-\sum_i e_i a_2\,\mathrm{grad}\,\phi\langle\vec{j}_{io}(\vec{x},t)\rangle_a\;-$$

$$-\sum\frac{e_i^2a_1^2}{2m_ic^2}\,\mathrm{grad}\,A^2\langle\vec{j}_{io}(\vec{x},t)\rangle_a, \qquad /42/$$

$$\langle H_0(\vec{x},t)\rangle_a=\sum_i\langle H_{io}(\vec{x},t)\rangle_a,\quad\langle\vec{j}_{H_0}(\vec{x},t)\rangle_a=\sum_i\langle\vec{j}_{H_{io}}(\vec{x},t)\rangle_a.$$

В этом случае оператор $\vec{j}_{H_{io}}(\vec{x})$ равен

$$\vec{j}_{H_{io}}(\vec{x})=\frac{h^3}{4m_i^2i}\{\nabla\psi_i^+\nabla^2\psi_i-\nabla^2\psi_i^+\nabla\psi_i\}+\frac{1}{2}\sum_k\int\Phi_{ki}(\vec{x}-\vec{x}')\psi_k^+(\vec{x}')\vec{j}_{io}(\vec{x})\psi_k(\vec{x}')d\vec{x}'\,+$$



$$+\frac{1}{8}\sum_k\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n!}\nabla^{n-1}\int(\vec{x}-\vec{x}')^n\,\nabla\Phi_{ki}(\vec{x}-\vec{x}')\{\psi_k^+(\vec{x}')\vec{j}_i(\vec{x})\psi_k(\vec{x}')\,+$$

$$+\psi_i^+(\vec{x})\vec{j}_k(\vec{x}')\psi_i(\vec{x})+\psi_i^+(\vec{x}')\vec{j}_k(\vec{x})\psi_i(\vec{x}')+\psi_k^+(\vec{x})\vec{j}_i(\vec{x}')\psi_k(\vec{x})\}\,d\vec{x}'\;-$$

$$-\frac{e_i^2h^2a_1}{2m_i^2c}\vec{A}\;\nabla\psi_i^+\nabla\psi_i. \qquad /43/$$

## 5. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ЭНТРОПИИ

Переходя к системе координат, движущейся со скоростью $\vec{v}(\vec{x},t)$, аналогично /5/, имеем

$$\left.\begin{aligned}&n_i(\vec{x},t)=n_i'(\vec{x},t),\\&\vec{p}_i(\vec{x},t)=\vec{p}_i'(\vec{x},t)+\rho_i(\vec{x},t)\vec{v},\\&H_{io}(\vec{x},t)=H_{io}'(\vec{x},t)+\vec{v}\vec{p}_{io}'(\vec{x},t)+\frac{1}{2}\rho_i(\vec{x},t)\,v^2,\end{aligned}\right\} \qquad /44/$$

где согласно /11/

$$\vec{p}_i(\vec{x},t)=\vec{p}_{io}(\vec{x},t)-\frac{e_ia_1}{c}\vec{A}\,n_i(\vec{x},t). \qquad /45/$$

Если система координат движется со скоростью $\vec{v}$, определенной выражением /32/, то ее импульс равен нулю

$$\langle\vec{p}'(\vec{x},t)\rangle_a=\sum_i\langle\vec{p}_i'(\vec{x},t)\rangle_a=0,$$

т.е.

$$\langle\vec{p}_0'(\vec{x},t)\rangle_a=\sum_i\langle\vec{p}_{io}'(\vec{x},t)\rangle_a=\sum_i\frac{e_ia_1}{c}\vec{A}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a. \qquad /46/$$

Тогда из /44/ выводим

$$\langle H_0(\vec{x},t)\rangle_a=\langle H_0'(\vec{x},t)\rangle_a+\sum_i\frac{e_i}{m_ic}a_1\vec{A}\langle\rho_i(\vec{x},t)\rangle_a\vec{v}+\frac{1}{2}\langle\rho(\vec{x},t)\rangle_a\,v^2.$$

Используя /11/ и /31/, можем написать следующее уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\sum_i\frac{e_i}{m_ic}a_1\vec{A}\langle\rho_i(\vec{x},t)\rangle_a\vec{v}\Big]=\sum_i\frac{e_i}{m_ic}a_1\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}[\,m_i\langle\vec{j}_{io}(\vec{x},t)\rangle_a\;-$$

$$
-\frac{e_i a_1}{c}\vec{A}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a ] + \sum_i \frac{e_i}{m_i c} a_1 \vec{A}[-\mathrm{Div}\langle T_i(\vec{x},t)\rangle_a +
$$

$$
+ e_i \vec{D}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a + \frac{e_i}{c}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \times \vec{B} ] . \qquad /47/
$$

Поскольку $a_1\vec{A}$ является поперечным вектором, а $\vec{D}_{\parallel} \equiv -a_2 \mathrm{grad}\,\phi$ - продольным, то имеем

$$
-\sum_i \frac{e_i^2 a_1^2}{m_i c^2}\vec{A}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a + \sum_i \frac{e_i^2 a_1}{m_i c}\vec{A}\vec{D}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a =
$$

$$
= 2\vec{D}_{\perp}\, a_1\vec{A}\sum_i \frac{e_i^2}{m_i c}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a , \qquad /48/
$$

где $\vec{D}_{\perp} = -\frac{a_1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ - поперечное поле.

Кроме того, можем преобразовать

$$
\vec{A}\cdot(\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \times \vec{B}) = -a_1\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a (\vec{A}\times\nabla\times\vec{A}) = -\frac{a_1}{2}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \nabla A^2 +
$$

$$
+ a_1\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a (\vec{A}\nabla)\vec{A} = -\frac{a_1}{2}\langle \vec{j}_{io}(\vec{x},t)\rangle_a \nabla A^2 + a_1\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \mathrm{Div}(\vec{A}\vec{A}) , \qquad /49/
$$

в котором мы использовали соотношение $\mathrm{div}\,\vec{A} = 0$ и свойство продольности поля $\mathrm{grad}\,A^2$.

Подставляя /48/ и /49/ в /47/, получаем уравнение баланса для величины $\sum_i \frac{e_i}{m_i c} a_1\vec{A}\langle \rho_i(\vec{x},t)\rangle_a \vec{v}$:

$$
\frac{\partial}{\partial t}[\sum_i \frac{e_i}{m_i c} a_1\vec{A}\langle \rho_i(\vec{x},t)\rangle_a v] + \mathrm{div}\sum_i [\frac{e_i}{m_i c} a_1\vec{A}\langle T_i(\vec{x},t)\rangle_a -
$$

$$
-\frac{e_i^2 a_1^2}{m_i c^2}\vec{A}\vec{A}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a ] = -\vec{D}_{\perp}\sum_i e_i\langle \vec{j}_{io}(\vec{x},t)\rangle_a - 2\vec{D}_{\perp}\langle \vec{j}_{e\perp}(\vec{x},t)\rangle_a + \qquad /50/
$$

$$
+\sum_i \frac{e_i}{m_i}\langle T_i(\vec{x},t)\rangle_a : \frac{a_1}{c}\mathrm{Grad}\,\vec{A} - \frac{a_1^2\vec{A}\vec{A}}{c^2} : \sum_i \frac{e_i^2}{m_i}\mathrm{Grad}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a -
$$

$$
-\sum_i \frac{e_i^2 a_1^2}{2 m_i c^2}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \mathrm{grad}\,A^2 ,
$$

где

$$
\langle \vec{j}_{e\perp}(\vec{x},t)\rangle_a = -\sum_i \frac{e_i^2 a_1}{m_i c}\vec{A}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a \qquad /51/
$$

- поперечная часть электрического тока.



Таким образом, согласно[6], уравнение баланса энтропии находится из выражения

$$
\frac{\partial s(\vec{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\{\langle H'_o(\vec{x},t)\rangle_a - \sum_i \mu_i^{\circ}\langle n'_i(\vec{x},t)\rangle_a \} ,
$$

т.е. из

$$
\frac{\partial s(\vec{x},t)}{\partial t} = \frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial t}\{\langle H_o(\vec{x},t)\rangle_a - \sum_i \frac{e_i}{m_i c} a_1\vec{A}\langle \rho_i(\vec{x},t)\rangle_a \vec{v} -
$$

$$
-\frac{1}{2}\langle \rho(\vec{x},t)\rangle_a v^2 - \sum_i \mu_i^{\circ}\langle n_i(\vec{x},t)\rangle_a \} , \qquad /52/
$$

где замечаем, что мы рассматриваем систему лишь в отсутствие термического возмущения.

Подставляя /36/, /42/, /47/ в /52/, уравнение баланса энтропии записываем в виде

$$
\frac{\partial s(\vec{x},t)}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_s(\vec{x},t) = \sigma(\vec{x},t), \qquad /53/
$$

$$
\vec{j}_s(\vec{x},t) = \frac{1}{T}\sum_i [\langle \vec{j}_{H_{io}}(\vec{x},t)\rangle_a - \frac{1}{2}\langle \rho_i(\vec{x},t)\rangle_a v^2\vec{v} - \langle P_i(\vec{x},t)\rangle_a \vec{v} -
$$

$$
-\frac{e_i}{m_i c} a_1\vec{A}\langle T_i(\vec{x},t)\rangle_a + \frac{e_i^2 a_1^2}{m_i c^2}\vec{A}\vec{A}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a - \mu_i^{\circ}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a ], \qquad /54/
$$

$$
\sigma(\vec{x},t) = \frac{1}{T}\{\sum_i \frac{e_i}{m_i}\langle \vec{J}_i(\vec{x},t)\rangle_a (\vec{D} + \frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B}) - \langle P(\vec{x},t)\rangle_a : \mathrm{Grad}\,\vec{v} -
$$

$$
-\sum_i \frac{e_i}{m_i}\langle T_i(\vec{x},t)\rangle_a : \frac{a_1}{c}\mathrm{Grad}\,\vec{A} + \qquad /55/
$$

$$
+\frac{a_1^2\vec{A}\vec{A}}{c^2} : \sum_i \frac{e_i^2}{m_i}\mathrm{Grad}\langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a - \langle \vec{j}_i(\vec{x},t)\rangle_a \mathrm{grad}\,\mu_i^{\circ}\} .
$$

Итак, получены точные выражения для плотностей потока и производства энтропии. Все члены в /55/ равны произведениям потоков и сопряженных сил. Третий и четвертый члены в /55/ связаны с явлением магнитной вязкости, которые отсутствуют в известных работах по неравновесной термодинамике. В случае слабого электромагнитного поля можно пренебречь этими членами и получим обычные результаты термодинамики /1/:

$$\vec{j}_s(\vec{x},t)=\frac{1}{T}\sum_i[<\vec{j}_{H_{io}}(\vec{x},t)>_a-\frac{1}{2}<\rho_i(\vec{x},t)>_a v^2\vec{v}-<P_i(\vec{x},t)>_a\vec{v}-$$
$$-\frac{e_i a_i A}{m_i c}<T_i^{\circ}(\vec{x},t)>_a-\mu_i^{\circ}<\vec{j}_i(\vec{x},t)>_a], \qquad /56/$$

$$\sigma(\vec{x},t)=\frac{1}{T}\{\sum_i\frac{e_i}{m_i}<\vec{J}_i(\vec{x},t)>_a(\vec{D}+\frac{1}{c}\vec{v}\times\vec{B})-$$
$$-<P(\vec{x},t)>_a:\mathrm{Grad}\,\vec{v}-<\vec{j}_i(\vec{x},t)>_a\,\mathrm{grad}\,\mu_i^{\circ}\}. \qquad /57/$$

В заключение искренне благодарю профессоров Я.П.Терлецкого и В.К.Федянина за интерес к работе и большую помощь при ее выполнении.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Де Грут С., Мазур П. Неравновесная термодинамика. "Мир", М., 1964.
2. Хаазе Р. Термодинамика необратимых процессов. "Мир", М., 1967.
3. Климонтович Ю.Л. Статистическая теория неравновесных процессов в плазме. Изд. МГУ, М., 1964.
4. Нгуен Танг. ДАН СССР, 1980, 251, с. 1365.
5. Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. "Наука", М., 1971.
6. Терлецкий Я.П. Нгуен Танг. ДАН СССР, 1980, 255, №1, с. 83.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 февраля 1981 года.