сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-81-10

С.Н.Бочков, Н.Г.Иноземцева, Б.И.Садовников

О ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА-ЭНСКОГА

1981

Введение

Одной из важных проблем современной статистической теории является построение приближенных кинетических уравнений, применимых для исследования сравнительно плотных систем частиц. На основе функциональной гипотезы Н.Н.Боголюбова [I] и кластерных разложений в цепочке ББГКИ [2] в последние годы получен ряд важных результатов относительно описания процесса приближения систем к состоянию статистического равновесия. В частности, получены веские указания на аномалии в уравнениях гидродинамики в высших порядках по плотности [3]. Нашло объяснение "аномальное" /с точки зрения стандартных представлений/ степенное убывание автокорреляционных функций, открытое в машинных экспериментах [4] с системами "упругих шаров". Во многом неожиданным оказался тот факт, что степенное убывание можно получить при рассмотрении нелинейных эффектов в обычном уравнении Больцмана [5]. Более того, поправки высшего порядка по плотности, рассчитанные по теории Энскога [6], позволяют успешно описать экспериментальные данные для весьма плотных систем. На возможное объяснение этого явления впервые указал Н.Н.Боголюбов [7], заметивший, что уравнение Больцмана-Энскога обладает, помимо обычно рассматривавшихся, точными микроскопическими решениями /т.е. решениями уравнения Лиувилля/.

В работе [7] было указано, что класс кинетических уравнений, обладающих подобным свойством, существенно шире, чем считалось ранее. Так, все уравнения типа

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t,\vec{r}_1,\vec{V}_1) + \vec{V}_1 \frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} f(t,\vec{r}_1,\vec{V}_1) =$$

$$= na^2 \int\limits_{(\vec{V}_{2,1}\cdot\vec{\sigma})\geq 0} (\vec{V}_{2,1}\cdot\vec{\sigma})\{f(t,\vec{r}_1,\vec{V}_1^*)f(t,\vec{r}_1+a\vec{\sigma},\vec{V}_2^*) - f(t,\vec{r}_1,\vec{V}_1)f(t,\vec{r}_1-a\vec{\sigma},\vec{V}_2)\}d\vec{\sigma}\,d\vec{V}_2 + \qquad (\mathrm{I})$$

$$+ \frac{n}{m}\int \frac{\partial\Phi(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)}{\partial\vec{r}_1}\rho(t,\vec{r}_2)\,d\vec{r}_2 \frac{\partial}{\partial\vec{V}_1} f(t,\vec{r}_1,\vec{V}_1)$$

также имеют микроскопические решения, соответствующие полному динамическому описанию систем частиц с бинарным взаимодействием

$$U(\vec{r}_1-\vec{r}_2) = \begin{cases} \infty, & (|\vec{r}_1-\vec{r}_2|<a), \\ \Phi_0(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|), & (|r_1-r_2|>a). \end{cases} \qquad (2)$$

В уравнении (I), которое естественно назвать обобщённым уравнением Больцмана-Энскога, $\rho(t,\vec{r}_2) = \int f(t,\vec{r}_2,\vec{V}_2)\,d\vec{V}_2$, $\vec{\sigma}$ – единичный вектор, $\vec{V}_{2,1} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$, $\vec{V}_1^* = \vec{V}_1 + \vec{\sigma}(\vec{V}_{2,1}\cdot\vec{\sigma})$, $\vec{V}_2^* = \vec{V}_2 - \vec{\sigma}(\vec{V}_{2,1}\cdot\vec{\sigma})$, a – диаметр области "твёрдого кора".

Дальнодействующая компонента потенциала $\Phi_0(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$ позволяет применить уравнение (I) для описания процессов в реальных системах.

Здесь мы рассмотрели некоторые свойства решений (I), соответствующих малым отклонениям функции распределения $f(t,\vec{r},\vec{V})$ от равновесной. Отметим, что для уравнения Больцмана-Энскога ($\Phi_0 = 0$) структура подобных решений была изучена в работах [8]. Тем не менее учёт дальнодейсвующей компоненты приводит к новым существенным особенностям решений (I), анализ которых является необходимым для исследования асимптотики автокорреляционных функций в модели с потенциалом (2).

§I. Приближение первого порядка по параметру однородности

Состояние системы, описываемой уравнением (I) вблизи равновесия, характеризуется параметром

$$\xi = r_0\left|\frac{\nabla f}{f}\right|, \qquad (3)$$

где r_0 – масштаб убывания $\Phi(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$, $r_0 \gg a$.

Для гидродинамических возмущений,которые мы будем рассматривать, $\xi \ll 1$;поэтому естественно искать решение в виде разложения по степеням ξ. Предполагая амплитуду возмущения малой, представим функцию распределения $f(t,\vec{r},\vec{v})$ в форме

$$f = \varphi_0 (1+\psi), \tag{4}$$

$$\varphi_0 = \left(\frac{m}{2\pi\theta}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m v^2}{2\theta}\right\}.$$

Из (I) следует,что ψ удовлетворяет линейному уравнению

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \vec{v}\frac{\partial\psi}{\partial\vec{r}} - \frac{n}{m}\frac{1}{\varphi_0}\left[\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\varphi_0(1+\psi)\right]\frac{\partial}{\partial\vec{r}}\int\varphi_0(\vec{v}')\psi(t,\vec{r}',\vec{v}')\Phi(|\vec{r}-\vec{r}'|)d\vec{r}'d\vec{v}' - n\hat{\Lambda}\psi = 0, \tag{5}$$

где $\hat{\Lambda}$ – оператор Больцмана-Энскога ,

$$\hat{\Lambda}\psi = a^2 \int\limits_{((\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma})>0} ((\vec{v}'-\vec{v})\vec{\sigma})\left[\psi(t,\vec{r},\vec{v}^*) + \psi(t,\vec{r}+a\vec{\sigma},\vec{v}'^*) - \psi(t,\vec{r},\vec{v}) - \psi(t,\vec{r}-a\vec{\sigma},\vec{v}')\right]\varphi_0(\vec{v}')d\vec{v}'d\vec{\sigma}. \tag{6}$$

Отметим,что для наших целей достаточно рассмотреть случай $r_0 \gg a$,т.е. допустимо пренебречь в (6) различием пространственных аргументов слагаемых. При использовании представления

$$\psi(t,\vec{r},\vec{v}) = \int e^{i\vec{k}\vec{r}}\psi_{\vec{k}z}(\vec{v})\, e^{-zt} dt\, d\vec{k} \tag{7}$$

получаем из (5-6) уравнение для функции $\psi_{\vec{k}z}(\vec{v})$:

$$(-z + i\vec{k}\vec{v})\psi_{\vec{k}z}(\vec{v}) - \frac{n}{m}\frac{1}{\varphi_0}\frac{\partial\varphi_0}{\partial\vec{v}}\, i\vec{k}\left[\int\psi_{\vec{k}z}(\vec{v}')\varphi_0(\vec{v}')d\vec{v}'\right]\times \tag{8}$$
$$\times\tilde{\Phi}(\vec{k}) - n\hat{\Lambda}_0(\vec{v})\psi_{\vec{k}z}(\vec{v}) = 0,$$

где $\tilde{\Phi}(\vec{k}) = \int\Phi_0(|\vec{q}|)e^{i\vec{k}\vec{q}}d\vec{q}$, $\hat{\Lambda}_0(\vec{v})$ – оператор Больцмана.

Следует подчеркнуть,что разложение решений по параметру однородности (3) $\xi = r_0|\vec{k}|$ непосредственно связано с функциональной зависимостью $\tilde{\Phi}(\vec{k})$ при малых $|\vec{k}|$,т.е. поведением медленно убывающей компоненты на больших расстояниях. В дальнейшем мы будем предполагать,что существуют величины $\tilde{\Phi}(0) = \int\Phi_0(|\vec{q}|)d\vec{q}$, $\tilde{\Phi}_1(0) = \int\Phi_0(|\vec{q}|)\vec{q}^2 d\vec{q}$.

При этом $\tilde{\Phi}(\vec{k})$можно представить в виде

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}) = \tilde{\Phi}(0) - \frac{\vec{k}^2}{6}\tilde{\Phi}_1(0),$$

т.е. в первых двух порядках по параметру однородности можно положить $\tilde{\Phi}(\vec{k}) = \tilde{\Phi}(0)$.

Вводя обозначения

$$\hat{Q}\psi(\vec{v}) = \vec{e}\vec{v}\int\psi(\vec{v})\varphi_0(\vec{v}')d\vec{v}', \quad \beta=\frac{1}{\theta}, \quad \vec{e}=\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}, \tag{9}$$

запишем (8) в виде

$$z\psi_{\vec{k}z}(\vec{v}) = [-n\hat{\Lambda}_0 + i\vec{k}\vec{v} - i\beta n\tilde{\Phi}(0)k\hat{Q}]\psi_{\vec{k}z}(\vec{v}). \tag{I0}$$

Эрмитово сопряженным относительно скалярного произведения $(\psi,\chi)=\int\psi^*\chi\varphi_0^2(\vec{v})d\vec{v}$ является оператор

$$\hat{Q}^+\chi(\vec{v}) = \int d\vec{v}'\varphi_0(\vec{v}')(\vec{e}\vec{v}')\chi(\vec{v}'). \tag{II}$$

Отметим, что операторы $\hat{Q}$ и $\hat{Q}^+$ не коммутируют, вследствие этого собственные функции оператора, стоящего в правой части (I0), вообще говоря, не ортогональны. Естественным базисом для вычисления $\psi_{\vec{k}z}(\vec{v})$, соответствующих гидродинамическим возмущениям $z(\vec{k})\to 0$ при $k\to 0$, является ортонормированный набор [8]

$$\psi_0^{(1)}(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{30}}\beta m\vec{v}^2 + \left(\tfrac{1}{2}\beta m\right)^{1/2}(\vec{e}\vec{v});$$

$$\psi_0^{(2)}(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{30}}\beta m\vec{v}^2 - \left(\tfrac{1}{2}\beta m\right)^{1/2}(\vec{e}\vec{v});$$

$$\psi_0^{(3)}(\vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{10}}(\beta m\vec{v}^2-5); \quad \psi_0^{(4)}(\vec{v}) = (\beta m)^{1/2}\vec{e}_{1\perp}\vec{v}; \tag{I2}$$

$$\psi_0^{(5)}(\vec{v}) = (\beta m)^{1/2}\vec{e}_{2\perp}\vec{v}; \quad \vec{e}_{1\perp}\perp\vec{e}_{2\perp}\perp\vec{e}.$$

Представим искомое решение в виде

$$\psi_{\vec{k}z} = \sum_{i=1}^{5}C_{0i}\psi_0^{(i)} + k\sum_{i=1}^{5}C_{1i}\psi_0^{(i)} + k\sum_{c+s\neq 0}C_{1m}\psi_m + \ldots \tag{I3}$$

Система уравнений для величин C_{0i}, определяющих $\psi_{\vec{k}z}$ в нулевом приближении, может быть записана в форме

$$\sum_{j=1}^{5}[(\psi_0^{(j)}, (i\vec{e}\vec{v} - i\beta n\tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_0^{(i)}) - z_1\delta_{ij}] = 0. \tag{I4}$$

Матричные элементы оператора $i\vec{e}\vec{v}$ известны [8]:

$$i(\psi_0^{(j)}, \vec{e}\vec{v}\psi_0^{(i)}) = i\begin{cases}(-1)^{i+1}\dfrac{1}{(\beta m)^{1/2}}\sqrt{\dfrac{5}{3}}\delta_{ij}, & i,j=1,2,\\ 0, & i>2, j>2.\end{cases}$$

Вычисляя тензор $F_{ji}=(\psi_0^{(j)}, \hat{Q}\psi_0^{(i)})$, найдём, что отличны от нуля лишь следующие его компоненты:

$$F_{11} = F_{12} = -F_{21} = -F_{22} = \sqrt{\frac{3}{20\beta m}}\,;$$

$$F_{13} = F_{23} = \frac{3}{\sqrt{10\beta m}}\,.$$

Из условия разрешимости системы (I4) получим величины z_1, определяющие частоты в первом порядке по параметру однородности:

$$(z_1)_{1,2} = \pm\frac{i}{\sqrt{\beta m}}\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\,;\quad (z_1)_{3,4,5} = 0\,; \tag{I5}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{5}{3}} - \beta n\,\tilde{\Phi}(0)\sqrt{\frac{3}{10}}\,;\ \delta = \beta n\,\tilde{\Phi}(0)\sqrt{\frac{3}{20}}$.

Используя в (I4) значения (I5), найдём коэффициенты C_{0i}:

$$\begin{aligned}
&C_{01}^{(1)} = A_1\delta\,;\quad C_{02}^{(1)} = A_1\left(\alpha-\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\right);\quad C_{03}^{(1)} = 0\,;\\
&C_{01}^{(2)} = A_2\delta\,;\quad C_{02}^{(2)} = A_2\left(\alpha+\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\right);\quad C_{03}^{(2)} = 0\,;\\
&C_{0i}^{(j)} = \delta_{ij}\,,\quad j = 3,4,5.
\end{aligned} \tag{I6}$$

Таким образом, нормированные решения уравнения (I0) в первом порядке по параметру однородности можно представить в форме

$$\tilde{\psi}_0^{(1,2)} = \left[2\alpha^2 \mp 2\alpha\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\right]^{-1/2}\left[\delta\psi_0^{(1)} + \left(\alpha\mp\sqrt{\alpha^2-\delta^2}\right)\psi_0^{(2)}\right],$$

$$\tilde{\psi}_0^{(j)} = \psi_0^{(j)}\,;\quad j = 3,4,5\,.$$

Как и следовало ожидать, вследствие $[Q, Q^+] \neq 0$ функции $\psi_0^{(j)}$ не являются ортогональными. Отметим также, что решения (I6) получены в предположении о достаточно быстром убывании $\Phi_0(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)$.

§2. Обобщённое уравнение Больцмана-Энскога в гидродинамическом приближении

Для определения поправок второго порядка по параметру однородности, в отличие от обычной теории возмущений, необходимо непосредственно использовать разложение (I3). Неоднородная система алгебраических уравнений, определяющих величины z_2, C_{1i}, имеет вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{5} C_{1i}\left(\left(\psi_0^{(j)}, i(\vec{e}\vec{V}-\beta n\tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_0^{(i)}\right) - z_1\delta_{ij}\right) = z_2 C_{0j} -\\
&-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} C_{0i}\sum_{s}\frac{\left(\psi_0^{(j)}, i(\vec{e}\vec{V}-\beta n\tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_s\right)}{\lambda_s}\times\left(\psi_s, i(\vec{e}\vec{V}-\beta n\tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_0^{(i)}\right).
\end{aligned} \tag{I7}$$

где ψ_s – собственные функции оператора Больцмана $\hat{\Lambda}_0$, соответствующие собственным значениям λ_s; суммирование в правой части (I7) производится по всем s, для которых $\lambda_s \neq 0$.

Условие разложимости системы (I7) может быть представлено в виде [8]:

$$\sum_{j=1}^{5} x_j^* \left[z_2 C_{0j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{5} C_{0i} \sum_{s} \frac{(\psi_0^{(j)}, i(\vec{e}\vec{v} - \beta n \tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_s)}{\lambda_s} \times \right. \tag{I8}$$

$$\left. \times (\psi_s, i(\vec{e}\vec{v} - \beta n \tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_0^{(i)}) \right] = 0,$$

где $\{x_j\}$ – решение однородной системы, эрмитово сопряженной (I4).

Воспользовавшись формулой

$$\sum_{s} \frac{(\psi_0^{(j)}, \hat{P}\psi_s)(\psi_s, \hat{P}\psi_0^{(i)})}{\lambda_s} =$$

$$= \left(\psi_0^{(j)}, \hat{P}\frac{1}{\hat{\Lambda}_0}\left(\hat{P}\psi_0^{(i)} - \sum_{j'=1}^{5} \psi_0^{(j')}(\psi_0^{(j')}, \hat{P}\psi_0^{(i)})\right)\right),$$

представим сумму по $\{s\}$ в виде

$$\sum_{s} \frac{(\psi_0^{(j)}, i(\vec{e}\vec{v} - \beta n \tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_s)}{\lambda_s} \times (\psi_s, i(\vec{e}\vec{v} - \beta n \tilde{\Phi}(0)\hat{Q})\psi_0^{(i)}) = \tag{I9}$$

$$= \left(\chi_2^{(j)}, \frac{1}{\hat{\Lambda}_0}\chi_1^{(i)}\right),$$

где

$$\chi_1^{(i)} = \hat{A}\psi_0^{(i)} - \sum_{i'=1}^{5} (\psi_0^{(i')}, \hat{A}\psi_0^{(i)})\psi_0^{(i')},$$

$$\chi_2^{(j)} = \hat{A}^+\psi_0^{(j)} - \sum_{j'=1}^{5} (\psi_0^{(j)}, \hat{A}\psi_0^{(j')})\psi_0^{(j')}, \quad \hat{A} = i(\vec{e}\vec{v} - \beta n \tilde{\Phi}(0)\hat{Q}). \tag{20}$$

Поскольку $\chi_1^{(i)}$, $\chi_2^{(j)}$ ортогональны всем собственным функциям оператора Λ_0 (I2), то, учитывая определения (9), (II), найдём, что в (20) можно положить $\hat{A} = i\vec{e}\vec{v}$.

Действительно, согласно (9), (II) действие операторов $\hat{Q}$, $\hat{Q}^+$ на произвольные функции даст инварианты столкновения $const$, $\vec{e}\vec{v}$, которые не должны содержаться в $\chi_1^{(i)}$, $\chi_2^{(j)}$. Таким образом, компоненты тензора (I9) не зависят от $\tilde{\Phi}(0)$ и могут быть вычислены в рамках стандартной процедуры для уравнения Больцмана с потенциалом твёрдых сфер [8].

Решения системы, эрмитово сопряженной (I4), имеют вид

$$x_1^{(1)} = -\delta; \quad x_2^{(1)} = \alpha - \sqrt{\alpha^2 - \delta^2}; \quad x_j^{(1)} = 0, \ j > 2;$$

$$x_1^{(2)} = -\delta;\quad x_2^{(2)} = \alpha + \sqrt{\alpha^2 - \delta^2};\quad x_j^{(2)} = 0,\ j > 2; \tag{21}$$

$$x_j^{(i)} = \delta_{ij},\quad i = 3,4,5.$$

Поправка второго приближения к собственным значениям $z_2^{(i)}$ согласно (18) может быть представлена в форме

$$z_2^{(i)} = \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{5} C_{0\ell}\, G_{j\ell}\, x_j^{(i)} \Big/ \sum_{j=1}^{5} x_j^{*(i)} C_{0j}^{(i)} . \tag{22}$$

Учитывая свойства симметрии тензора $G_{j\ell} = -\sum_s \frac{(\psi_0^{(j)}, \vec{e}\vec{v}\psi_s)(\psi_s, \vec{e}\vec{v}\psi_0^{(\ell)})}{\lambda_s}$

и соотношения (16),(21),(22),получим $z_2^{(i)} = \frac{1}{n} G_{ii}$,где

$G_{11} = G_{22} = \frac{n}{3}(\mathcal{D}_T + 2\mathcal{D}_\eta)$; $G_{33} = n\mathcal{D}_T$; $G_{44} = G_{55} = n\mathcal{D}_\eta$;

$\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_\eta$ – коэффициенты термодиффузии и кинетической вязкости, определяемые уравнением Больцмана.

Таким образом,величины $z_2^{(i)}$,соответствующие второму порядку по параметру однородности,для достаточно быстро убывающих потенциалов $\Phi_0(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ положительны и не зависят от конкретного вида Φ_0. Структура решений уравнения (8) определяется коэффициентами $C_{0j}^{(i)}$ (16),содержащими параметр $\tilde{\Phi}(0)$.

Отметим,что для потенциалов,асимптотически убывающих как $\frac{const}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^4}$,поправки второго порядка по параметру однородности к $z^{(i)}$ возникают в первом порядке теории возмущений для оператора (10),поскольку в этом случае разложение $\tilde{\Phi}(\vec{k})$ имеет вид

$$\tilde{\Phi}(\vec{k}) = \tilde{\Phi}(0) + k\tilde{\Phi}_1 + \ldots$$

Учитывая свойства симметрии тензора $G_{j\ell} = -\sum_s{}' \frac{(\psi_0^{(j)}, \vec{e}\vec{v}\psi_s)(\psi_s, \vec{e}\vec{v}\psi_0^{(\ell)})}{\lambda_s}$ и соотношения (16),(21),(22), получим $z_2 = \frac{1}{n} G_{ii}$, где

$G_{11} = G_{22} = \frac{n}{3}(\mathcal{D}_T + 2\mathcal{D}_\eta)$; $G_{33} = n\mathcal{D}_T$; $G_{44} = G_{55} = n\mathcal{D}_\eta$;

$\mathcal{D}_T, \mathcal{D}_\eta$ -коэффициенты термодиффузии и кинетической вязкости, определяемые уравнением Больцмана.

Таким образом, величины $z_2^{(i)}$, соответствующие второму порядку по параметру однородности, для достаточно быстро убывающих потенциалов $\Phi_0(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$ положительны и не зависят от конкретного вида Φ_0 . Структура решений уравнения (8) определяется коэффициентами $C_{0j}^{(i)}$ (16), содержащими параметр $\tilde{\Phi}(0)$.

Отметим, что для потенциалов, асимптотически убывающих как $\frac{const}{|r_1 - r_2|^4}$, поправки второго порядка по параметру однородности к $z^{(i)}$ возникают в первом порядке теории возмущений для оператора (I0), поскольку в этом случае разложение $\tilde{\Phi}(k)$ имеет вид $\tilde{\Phi}(k) = \tilde{\Phi}(0) + k\,\tilde{\Phi}_1$.

При этом в отличие от (22) члены, пропорциональные k^2, комплексны. Следует также отметить, что влияние сравнительно медленно убывающей компоненты потенциала становится преобладающим для $\Phi(|\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2|) \sim \frac{1}{|\vec{\xi}_1 - \vec{\xi}_2|^{\alpha}}$, $\alpha \leqslant 2$, и требует специального рассмотрения.

Авторы выражают глубокую благодарность академику Н.Н.Боголюбову за ценные советы и указания.

Литература

I. Боголюбов Н.Н. Проблемы динамической теории в статистической физике. Гостехиздат, М.-Л., 1946.
2. Dorfman J.R., Cohen E.G.D. Phys.Rev., 1972, A6, 776.
3. Ernst M.H., Dorfman J.R. Physica, 1972, 61, 157; J.Stat.Phys., 1975, 12, 345.
4. Alder B.J., Wainwright T.E. Phys.Rev., 1970, A1, 18.
5. Ubbink J.T., Hauge E.H. Physica, 1973, 70, 297,
6. Dorfman J.R., Cohen E.G.D.;Phys.Rev., 1975,A12, 292; Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. ТМФ,1977, 3I, 260.
7. Боголюбов Н.Н. ТМФ, 1975, 24, 242; JINR, preprint E4-8789, 1975.
8. Иноземцева Н.Г., Садовников Б.И. Препринт ИТФ-76-I49Р,1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
2I января 198I года.