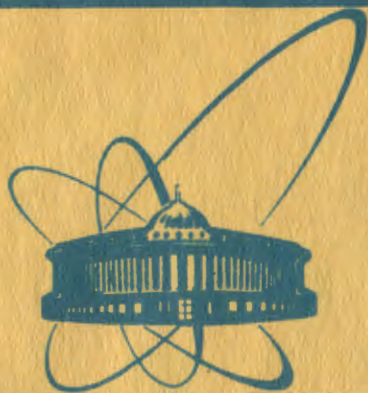


9/11-80

+



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

2452/2-80

P17-80-86

Н.Д.Гагунашвили, В.Б.Приезжев

СТАТИСТИКА ДИМЕРОВ
НА КУБИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ.

II. УЛУЧШЕННАЯ НИЖНЯЯ ОЦЕНКА

1980

В первой части работы^{/1/} было найдено число разбиений N -брикета на димеры, не порождающих ни одного замкнутого пути на подрешетках A_0 и B_0 (модель I):

$$f_c^* = \exp\left\{\frac{N}{4\pi^2}\right\} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \ln\left[4 \sum_{i=1}^3 \sin^2 \theta_i\right].$$

Такие разбиения находятся среди всех возможных разбиений N -брикета на димеры, поэтому для числа произвольных разбиений справедлива оценка

$$f_c \geq f_c^*.$$

Для величины $\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln f_c$ имеем

$$\lambda \geq \lambda^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln f_c^*,$$

что совпадает с оценкой, полученной Хаммерсли^{/2/}.

Оценку для λ можно улучшить, если учесть разбиения, порождающие замкнутые пути (циклы) на подрешетках.

В дальнейшем нам будет удобно пользоваться следующей эквивалентной формулировкой задачи о разбиении N -брикета на димеры. Представим N -брикет как совокупность единичных кубов. Рассмотрим, как и в части I, кубическую решетку L с узлами в центрах кубов и с ребрами, соединяющими ближайшие узлы. Разбиению N -брикета на димеры соответствует выделение из всей совокупности ребер множества из $N/2$ ребер, не соприкасающихся друг с другом. Димерами здесь являются ребра из выделенного множества.

Рассмотрим произвольное разбиение модели I. Назовем контуром замкнутую не пересекающую себя линию, составленную из ребер решетки, половина из которых - димеры. Если x_1, x_2, \dots, x_n - узлы решетки, принадлежащие контуру, и $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n-1}, x_n$ - димеры, то под сдвигом этих димеров вдоль контура будем понимать замену их на димеры $x_2, x_3, x_4, x_5, \dots, x_n, x_1$.

Рассмотрим любое множество не пересекающихся между собой контуров для данного разбиения. Сдвиг димеров вдоль каждого из контуров приводит к разбиению, отличному от данного. Может оказаться, что новое разбиение, полученное таким образом, порождает циклы на подрешетках.

Ниже мы покажем, что множества непересекающихся контуров, сдвиг димеров вдоль которых приводит к разбиениям, порождающим циклы на подрешетках, действительно существуют. Мы найдем нижнюю оценку для числа разбиений с простейшими циклами на одной из подрешеток и получим новую оценку для λ .

Рассмотрим конфигурацию из семи димеров, показанную на рис. I (назовем ее конфигурацией Ω_1^1), четыре из которых расположены на ребрах подрешетки A_0 и два на ребрах подрешетки B_0 . Димеры a , b , c и ребра, помеченные пунктиром, образуют контур. Разбиение модели I, в котором содержится такая конфигурация, при сдвиге димеров a , b , c вдоль контура превращается в разбиение с циклом на подрешетке A_0 .

Определим коррелятор любой фиксированной конфигурации димеров в модели I как отношение числа разбиений, содержащих эту конфигурацию, к общему числу разбиений. Если $\langle \Omega_1^1 \rangle$ - коррелятор конфигурации Ω_1^1 , то в пределе $N \rightarrow \infty$ разбиение N -брикета с вероятностью единица содержит $\frac{\langle \Omega_1^1 \rangle \cdot N}{8}$ таких конфигураций ($\frac{N}{8}$ - число узлов подрешетки A_0). Легко заметить, что контуры, содержащиеся в различных конфигурациях вида Ω_1^1 , в любом разбиении не пересекаются. Поэтому число различных множеств контуров, содержащихся в таких $\frac{\langle \Omega_1^1 \rangle \cdot N}{8}$ конфигурациях, равно $2^{\frac{\langle \Omega_1^1 \rangle \cdot N}{8} - 1}$. Следовательно, сдвиг димеров вдоль контуров каждого из множеств дает $2^{\frac{\langle \Omega_1^1 \rangle \cdot N}{8} - 1}$ различных разбиений с циклами на подрешетке A_0 . Оценка для числа разбиений N -брикета на димеры принимает вид

$$f_c \geq f_c^* \cdot 2^{\frac{\langle \Omega_1^1 \rangle \cdot N}{8}}$$

а оценка для λ

$$\lambda \geq \lambda^* + \frac{\langle \Omega_1^1 \rangle}{8} \ln 2. \quad (I)$$

Чтобы улучшить оценку (I), нужно увеличить число рассматриваемых

мых множеств непересекающихся контуров, приводящих к разбиениям с циклами на подрешетках. Рассмотрим для этого еще четыре конфигурации, $\Omega_1^2, \Omega_1^3, \Omega_1^4, \Omega_1^5$, показанные на рис.2. Эти конфигурации димеров отличаются от конфигурации Ω_1^1 только положением димера d . Учет вклада этих конфигураций в λ приводит к оценке

$$\lambda \geq \lambda^* + \frac{\sum_{i=2}^5 \langle \Omega_1^i \rangle}{8} \ln 2.$$

Далее, кроме конфигураций $\{\Omega_1^i\}$, будем рассматривать еще 7 конфигураций (рис.3), в каждой из которых димер d может находиться в пяти различных положениях. Каждая из рассматриваемых конфигураций может быть ориентирована в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Общее число различных конфигураций составит, таким образом, 120. Все они содержат контуры, приводящие к циклам на подрешетке A_0 . Несмотря на то, что различные конфигурации могут иметь общие димеры, указанные 120 видов конфигураций димеров обладают требуемым свойством непересекаемости контуров.

Оценка для λ принимает вид

$$\lambda \geq \lambda^* + \frac{3 \sum_{j=1}^8 \sum_{i=1}^5 \langle \Omega_j^i \rangle}{8} \ln 2.$$

На рис.4 мы вводим обозначения для различных конфигураций димеров, корреляторы которых нам понадобятся для дальнейших оценок. Пунктир на рисунке означает, что димер может находиться в любом из 5 помеченных пунктиром положений.

В части I/1 работы было показано, что расположения димеров на подрешетках, не порождающие замкнутые пути, однозначно определяют положения димеров на точках, не принадлежащих сверхрешеткам в разбиении. Так как димеры на подрешетке A_0 и B_0 можно располагать независимо друг от друга, сумма $\sum_{i=1}^5 \langle \Omega_1^i \rangle$ может быть представлена в виде произведения корреляторов циклической модели^{3/}

$$\sum_{i=1}^5 \langle \Omega_1^i \rangle = \langle \omega_1 \rangle \cdot \langle \omega_2 \rangle.$$

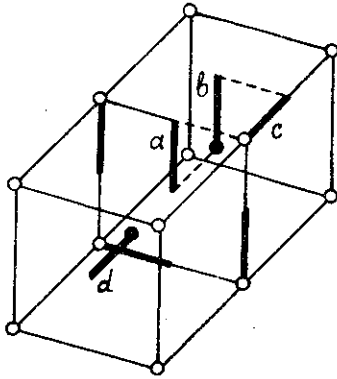


Рис. 1.
 Конфигурация димеров Ω_1^1 .
 ○ - узлы сверхрешетки A_0 .
 ● - узлы сверхрешетки B_0 .

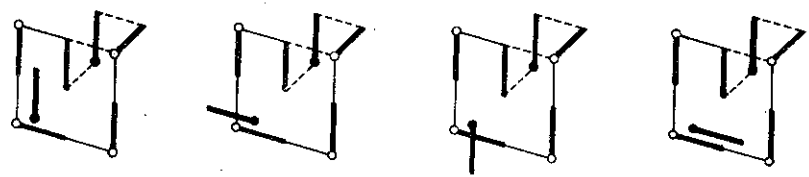


Рис. 2. Конфигурации димеров $\Omega_1^2, \Omega_1^3, \Omega_1^4, \Omega_1^5$.

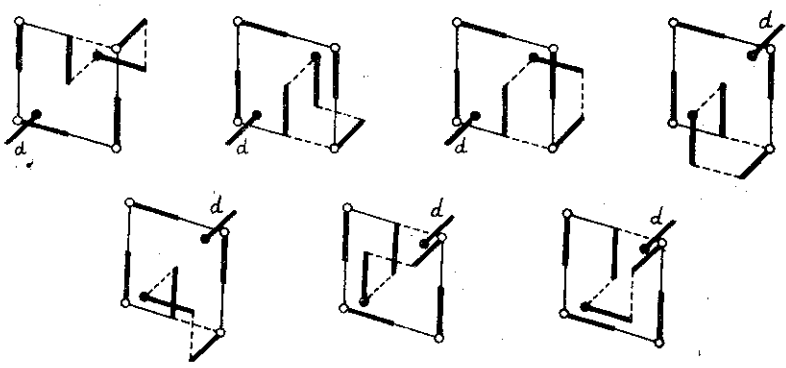


Рис. 3. Конфигурации димеров $\Omega_2^1, \Omega_3^1, \Omega_7^1, \Omega_5^1, \Omega_6^1, \Omega_7^1, \Omega_8^1$.

Под $\langle \omega_2 \rangle$ надо понимать сумму корреляторов по всем положениям димера, помеченных пунктиром. Легко видеть, что суммы корреляторов $\sum_{j=1}^7 \langle \Omega_j \rangle$ ($j=1, 2, 3, \dots, 7$) представляются в виде того же произведения $\langle \omega_1 \rangle \langle \omega_2 \rangle$. Выражение оценки для λ , таким образом, принимает вид

$$\lambda \geq \lambda^* + \frac{24 \langle \omega_1 \rangle \cdot \langle \omega_2 \rangle}{8} \ln 2. \quad (2)$$

Так как точно вычислить корреляторы $\langle \omega_1 \rangle$ и $\langle \omega_2 \rangle$ в циклической модели довольно трудно, получим для них нижние оценки.

Для коррелятора димеров в циклической модели, порождающих любой направленный путь $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{n-1} P_n$ на подрешетке, можно получить нижнюю оценку в общем виде.

Рассмотрим все узлы подрешетки, являющиеся ближайшими соседями узлов $P_1 \dots P_{n-1}$. Запишем все конфигурации димеров на ближайших соседях. Тогда коррелятор димеров, порождающих путь $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{n-1} P_n$, равен

$$\langle P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{n-1} P_n \rangle = \frac{\sum_{i=1}^K \Psi_i^c}{\Psi_c}.$$

Здесь, K - число различных конфигураций димеров на ближайших соседях, а Ψ_i^c - число конфигураций циклической модели с фиксированной i -той конфигурацией димеров на ближайших соседях и фиксированным положением димеров, порождающих путь $P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{n-1} P_n$. Поскольку число конфигураций циклической модели с фиксированным положением одного димера составляет 1/6 от числа всех конфигураций, то в этих обозначениях

$$\Psi_c = 6 \sum_{i=1}^K \Psi_i^c a_i,$$

где a_i - это число различных конфигураций димеров, расположенных на узлах P_1, P_2, \dots, P_{n-1} при фиксированной i -той конфигурации димеров на ближайших соседях и фиксированном положении димера, порождающего путь $P_{n-1} P_n$. Оценка при этом получается в виде

$$\langle P_1 P_2, P_2 P_3, \dots, P_{n-1} P_n \rangle = \frac{\sum_{i=1}^K \Psi_i^c}{6 \sum_{i=1}^K \Psi_i^c a_i} \geq \frac{1}{6 \max_{1 \leq i \leq K} \{a_i\}}.$$

В частном случае конфигурации ω_1

$$\max_{1 \leq i \leq 3} \{a_i\} = 204$$

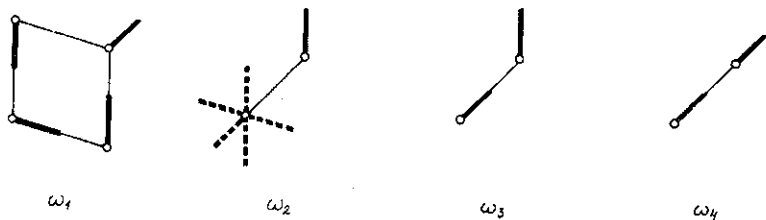


Рис.4

и мы получаем оценку

$$\langle \omega_1 \rangle \geq \frac{1}{1224}.$$

Для коррелятора $\langle \omega_2 \rangle$ имеет место следующее равенство:

$$\langle \omega_2 \rangle + \langle \omega_3 \rangle = \frac{1}{6}. \quad (3)$$

Так как $\langle \omega_4 \rangle \geq \frac{1}{36}$ и

$$4 \langle \omega_3 \rangle + \langle \omega_4 \rangle = \frac{1}{6},$$

то $\langle \omega_3 \rangle \leq \frac{5}{144}$.

Из равенства (3) следует, что

$$\langle \omega_2 \rangle \geq \frac{19}{144}.$$

Подставляя оценки $\langle \omega_1 \rangle$ и $\langle \omega_2 \rangle$ в формулу (2), получаем

$$\lambda \geq \lambda^* + \frac{19}{58752} \ln 2.$$

Итак, новая нижняя оценка λ принимает вид

$$\lambda \geq 0,418571.$$

В этой работе мы ограничились оценкой вклада в значение λ самых простых разбиений, порождающих циклы на подрешетках. Предложенный метод позволяет учитывать вклад разбиений с более сложными циклами, хотя при этом возрастает трудность проверки условия независимости контуров.

Литература

1. Приезжев В.Б. ОИЯИ, РГ7-80-185, Дубна, 1980.
- 2.ammersley J.M. Proc.Cambridge Phil.Soc.,1968, 64, p.455.
3. Приезжев В.Б. ТМФ, 1977, 31, с. 89.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 марта 1980 года.