объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P17-80-814

Г.М.Гавриленко, Д.Михалаке,
В.К.Федянин

ФОККЕР-ПЛАНКОВСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕРМОЛИЗАЦИИ ПУЧКОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ ПРИ КАНАЛИРОВАНИИ

Направлено в "Physica A"

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы каналирование и связанные с ним эффекты, возникающие при движении заряженных энергетических частиц сквозь монокристаллы, интенсивно исследовались как теоретически, так и экспериментально [1-4].

В этой работе мы получим уравнение типа Фоккера-Планка для редуцированной матрицы плотности ρ_S, описывающей одночастичную систему S /протон или ион/, во втором порядке по взаимодействию с большой системой Σ /ионами кристалла/:

$$\frac{\partial \rho_S(\ell, E_\perp)}{\partial \ell} = \frac{\partial}{\partial E_\perp}\left[D_n E_\perp \left(\frac{\partial \rho_S}{\partial E_\perp} + \beta E_\perp \right) \right] . \qquad /1/$$

где D_n - диффузионная функция; β - обратная температура кристалла; ℓ - глубина проникновения в кристалл и $E_\perp$ - поперечная энергия каналируемых частиц.

Заметим, что /1/ содержит дополнительный к простому диффузионному смещению член $\frac{\partial \rho_S}{\partial E_\perp}$, ведущий к уменьшению поперечной энергии частицы до определенного значения, которое определяется температурой кристалла [5].

Обозначив через $(x_\perp, p_\perp)$ операторы координаты и импульса в поперечном движении частицы при плоскостном каналировании, покажем, что, начиная с определенной глубины проникновения,

$$\bar{x}_\perp(\ell) \sim c_1(\ell, \beta)\, e^{-\ell/\ell_c}, \qquad \bar{p}_\perp(\ell) \sim c_2(\ell, \beta)\, e^{-\ell/\ell_c},$$

$$\bar{E}_\perp(\ell) \sim c_3(\ell, \beta)\, e^{-2\ell/\ell_c} + E_{th}(\beta),$$

где c_1, c_2, c_3 - периодические функции по ℓ.

Отметим, что эффект фокусировки впервые был рассмотрен в работе [6]. Там была обсуждена возможность экспоненциального уменьшения поперечной энергии по мере проникновения энергетических протонов в кристалл. В дополнение к экспоненциальному спаду в поперечной энергии мы получим член $E_{th}(\beta)$, описывающий термолизацию каналируемой частицы. Заметим, что проблема охлаждения пучков частиц представляет большой интерес для физики высоких энергий [7-10].

В параграфе 2 будет выведено уравнение Фоккера-Планка для редуцированной матрицы плотности ρ_S; в параграфе 3 - рассчитана средняя поперечная энергия каналируемых частиц в зависимости от глубины проникновения в кристалл. Параграф 4 посвящен рассмотрению классического решения полученных уравнений и изучению фракции каналирования. В последнем параграфе кратко обсуждаются полученные результаты.

2. УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

Мы рассмотрим только случай плоскостного каналирования. Гамильтониан нашей системы (S,Σ) состоит из части S /протон или положительный ион/ и кристалла Σ /кристалл нами в дальнейшем будет трактоваться как упорядоченная структура ионов/, взаимодействующего с

$$H = H_S + H_\Sigma + H_{S\Sigma} ,$$

где $H_S = \dfrac{p^2}{2M}$, $\quad H_{S\Sigma} = \sum\limits_i V_p(x - x_i)$.

Здесь V_p - линдхардовский непрерывный потенциал для плоскостного каналирования [2]; x и x_i - положение частицы и кристаллических плоскостей; M - масса каналируемой частицы.

Заметим, что $H_{S\Sigma}$ отнормирован так, что при $x=0$ $H_{S\Sigma}=0$. Матрица плотности сложной системы (S,Σ) вводится как

$$\rho_{S\Sigma}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\rho_{S\Sigma}(0)\,e^{\frac{i}{\hbar}Ht}, \text{ где } \rho_{S\Sigma}(0) = \rho_S(0)\,\rho_\Sigma$$

- начальное значение матрицы плотности; $\rho_S(0)$ описывает начальное распределение пучка; ρ_Σ - гиббсовское распределение для кристалла: $\rho_\Sigma = (\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_\Sigma})^{-1}\, e^{-\beta H_\Sigma}$

Определим редуцированную матрицу плотности для S-системы как

$$\rho_S(t) = \mathrm{Tr}_\Sigma\, \rho_{S\Sigma}(t). \qquad /2/$$

Тогда редуцированная матрица плотности подчиняется следующему уравнению движения [11,12]:

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[H_S, \rho_S(t)] - \frac{i}{\hbar}\mathrm{Tr}_\Sigma [H_{S\Sigma}, \rho_\Sigma \rho_S(t)] -$$

$$-\frac{i}{\hbar}\mathrm{Tr}_\Sigma [H_{S\Sigma}, \Delta_{S\Sigma}(t)], \qquad /3/$$

где

$$\Delta_{S\Sigma}(t) = \rho_{S\Sigma}(t) - \rho_\Sigma \rho_S(t).$$

Во втором порядке теории возмущения мы получим кинетическое уравнение:

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2M} + \frac{M\omega^2}{2}x^2, \rho_S(t)\right] +$$

$$+\frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[H_{S\Sigma}\rho_\Sigma \rho_S(t)\int_0^t dt' \rho_S(t')H_{S\Sigma}(t-t')\right] -$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[\rho_\Sigma \rho_S(t)\int_0^t dt' \rho_S(t')H_{S\Sigma}(t-t')H_{S\Sigma}\right] + \qquad /4/$$

$$+\frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[\int_0^t dt' H_{S\Sigma}(t-t')\rho_\Sigma \rho_S(t')H_{S\Sigma}\right] -$$

$$-\frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[H_{S\Sigma}\int_0^t dt' H_{S\Sigma}(t-t')\rho_\Sigma \rho_S(t')\right],$$

где

$$\frac{M\omega^2}{2} = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k \frac{k^2}{2}\nu(k)\left\langle \sum_i e^{-ikx_i}\right\rangle_\Sigma;$$

$\nu(k)$ есть фурье-представление плоскостного континиум-потенциала Линдхарда; скобки $\langle ... \rangle_\Sigma$ обозначают гиббсовское усреднение по кристаллу. Здесь мы ограничимся только гармонической аппроксимацией кристаллического поля:

$$H_{S\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{L}}\sum_k \nu(k)e^{ikx}\sum_i e^{-ikx_i} \quad \text{и} \quad \langle H_{S\Sigma}\rangle_\Sigma \simeq \frac{M\omega^2}{2}x^2.$$

Обозначим характерное время релаксации кристалла через τ_Σ и рассмотрим эволюцию $\rho_S(t)$ во времени $t-\tau_S \gg \tau_\Sigma$. Тогда для $t-\tau_S \gg \tau_\Sigma$ мы можем пренебречь памятью системы в уравнении для $\rho_S(t)$. В этом случае имеем следующее марковское представление для /4/:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2M}+\frac{M\omega^2}{2}x^2, \rho_S(t)\right] + \\
& + \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[H_{S\Sigma}\rho_\Sigma\rho_S(t)\int_0^\infty d\tau\, H_{S\Sigma}(\tau)\right] - \\
& - \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[\rho_\Sigma\rho_S(t)\int_0^\infty d\tau\, H_{S\Sigma}(\tau)H_{S\Sigma}\right] + \\
& + \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[\int_0^\infty d\tau\, H_{S\Sigma}(\tau)\rho_\Sigma\rho_S(t)H_{S\Sigma}\right] - \\
& - \frac{1}{\hbar^2}\mathrm{Tr}_\Sigma\left[H_{S\Sigma}\int_0^\infty d\tau\, H_{S\Sigma}(\tau)\rho_\Sigma\rho_S(t)\right].
\end{aligned}
\tag{/5/}
$$

Выведем корреляционные функции:

$$
\Phi_{kk'}(\tau) = \left\langle \sum_i e^{-ikx_i(0)}\sum_j e^{-ik'x_j(\tau)}\right\rangle_\Sigma - \left\langle \sum_i e^{-ikx_i(0)}\right\rangle \left\langle\sum_j e^{-ik'x_j(\tau)}\right\rangle_\Sigma ,
$$

/6/

$$
\psi_{kk'}(\tau) = \left\langle \sum_i e^{-ikx_i(\tau)}\sum_j e^{-ik'x_j(0)}\right\rangle_\Sigma - \left\langle \sum_i e^{-ikx_i(\tau)}\right\rangle_\Sigma \left\langle\sum_j e^{-ik'x_j(0)}\right\rangle_\Sigma .
$$

И получим для /6/

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar}\left[\frac{p^2}{2M}+\frac{M\omega^2}{2}x^2, \rho_S(t)\right] + \\
& + \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{L}\sum_{k,k'} kk'\nu(k)\nu(k')\int_0^\infty d\tau\left[\Phi_{kk'}(\tau)\, x(0)\, x(\tau)\,\rho_S(t) + \right. \\
& \left. + \psi_{kk'}(\tau)\,\rho_S(t)\, x(\tau)\, x(0)\right] - \\
& - \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{L}\sum_{k,k'} kk'\nu(k)\nu(k')\int_0^\infty d\tau\left[\Phi_{kk'}(\tau)\, x(\tau)\rho_S(t)x(0) + \psi_{kk'}(\tau)x(0)\rho_S(t)x(\tau)\right].
\end{aligned}
\tag{/7/}
$$

Перепишем /7/ в представлении вторичного квантования:

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -i[\omega a^+ a, \rho_S(t)] +$$

$$+ \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{L}\sum_{k,k'} kk'\nu(k)\nu(k')(\frac{\hbar}{2M\omega})\int_0^\infty d\tau\, [\Phi_{kk'}(\tau)(a+a^+)(a(\tau)+a^+(\tau))\rho_S(t)+$$

$$+ \psi_{kk'}(\tau)\rho_S(t)(a(\tau)+a^+(\tau))(a+a^+)] -$$

$$/8/$$

$$- \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{L}\sum_{k,k'} kk'\nu(k)\nu(k')(\frac{\hbar}{2M\omega})\int_0^\infty d\tau\, [\Phi_{kk'}(\tau)(a(\tau)+a^+(\tau))\rho_S(t)(a+a^+)+$$

$$+ \psi_{kk'}(\tau)(a+a^+)\rho_S(t)(a(\tau)+a^+(\tau))],$$

где $[a, a^+] = 1$ и $a(\tau) = e^{-i\omega\tau}a$

Определим следующие действительные параметры:

$$g = \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{L}\sum_{k,k'}(\frac{\hbar}{2M\omega})kk'\nu(k)\nu(k')2\mathrm{Re}\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\omega\tau}\Phi_{kk'}(\tau),$$

$$/9/$$

$$h = \frac{1}{\hbar^2}\frac{1}{L}\sum_{k,k'}(\frac{\hbar}{2M\omega})kk'\nu(k)\nu(k')2\mathrm{Re}\int_0^\infty d\tau\, e^{i\omega\tau}\Phi_{kk'}(\tau)$$

Легко установить, что $g = e^{\hbar\beta\omega}h$. Пусть $g = (n_0+1)\gamma$, $h = n_0\gamma$, где $n_0 = (e^{\hbar\beta\omega}-1)^{-1}$.

Опустим комплексную часть функций в уравнении /8/, так как они вели бы к простой перенормировке ω. Тогда для матрицы плотности $\rho_S(t)$ имеем

$$\frac{\partial \rho_S(t)}{\partial t} = -i\omega(a^+ a\rho_S - \rho_S a^+ a) + ga\rho_S a^+ + ha^+\rho_S a + \qquad /10/$$

$$+ \frac{1}{2}g(a^+\rho_S a^+ + a\rho_S a) + \frac{1}{2}h(a^+\rho_S a^+ + a\rho_S a) -$$

$$-\frac{1}{2}(haa^{+}\rho_S + ga^{+}a\rho_S + h\rho_S aa^{+} + g\rho_S a^{+}a) -$$

$$-\frac{1}{2}g(aa\rho_S + \rho_S a^{+}a^{+}) - \frac{1}{2}h(a^{+}a^{+}\rho_S + \rho_S aa).$$

Заметим, что уравнения такого типа часто появляются в теориях линейного отклика системы на внешнее возмущение /см., например, [12,13] /. Далее для матрицы плотности используем представление когерентных состояний [14]:

$$|z\rangle = \exp(-\frac{1}{2}|z|^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}|n\rangle, \quad \frac{1}{\pi}\int d^2z\,|z\rangle\langle z| = 1,$$

где $|n\rangle$ - квантовое состояние осциллятора:

$$\rho_S(t) = \frac{1}{\pi}\int d^2z\,P(z, z^*, t)\,|z\rangle\langle z|. \qquad /11/$$

Используем следующую цепочку равенств:

$$\langle z_0|\,a^{+}a\rho_S - \rho_S a^{+}a\,|z_0\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\,(z^*\frac{\partial P}{\partial z^*} - z\frac{\partial P}{\partial z})\,|\langle z_0|z\rangle|^2,$$

$$\langle z_0|\,2a\rho_S a^{+} - (\rho_S aa^{+} + aa^{+}\rho_S)\,|z_0\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\,(z\frac{\partial P}{\partial z} + z^*\frac{\partial P}{\partial z^*})\,|\langle z_0|z\rangle|^2,$$

$$\langle z_0|\,a\rho_S a^{+} + a^{+}\rho_S a - (\rho_S a^{+}a + aa^{+}\rho_S)\,|z_0\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2z\,\frac{\partial^2 P}{\partial z\partial z^*}|\langle z_0|z\rangle|^2,$$

$$\langle z_0|\,aa\rho_S + \rho_S a^{+}a^{+} - (a^{+}\rho_S a^{+} + a\rho_S a)\,|z_0\rangle = \qquad /12/$$

$$= \frac{1}{\pi}\int d^2z\,(z\frac{\partial P}{\partial z^*} + z^*\frac{\partial P}{\partial z})\,|\langle z_0|z\rangle|^2,$$

$$\langle z_0|\,aa\rho_S + \rho_S a^{+}a^{+} + a^{+}a^{+}\rho_S + \rho_S aa - 2(a^{+}\rho_S a^{+} + a\rho_S a)\,|z_0\rangle =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2 z \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^{*2}} \right) | \langle z_0 | z \rangle |^2 ,$$

где

$$| \langle z_0 | z \rangle |^2 = \exp(-|z - z_0|^2).$$

С помощью /12/ кинетическое уравнение /10/ может быть легко преобразовано в дифференциальное уравнение для $P(z, z^*, t)$:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = i\omega \left[\frac{\partial}{\partial z} (zP) - \frac{\partial}{\partial z^*} (z^* P) \right] + \frac{\gamma}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} (zP) + \frac{\partial}{\partial z^*} (z^* P) \right] -$$

$$- \frac{\gamma}{2} \left(z \frac{\partial P}{\partial z^*} + z^* \frac{\partial P}{\partial z} \right) + n_0 \gamma \frac{\partial^2 P}{\partial z \, \partial z^*} - \frac{n_0 \gamma}{2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^{*2}} \right), \qquad /13/$$

откуда с учетом того, что $z = x + iy$, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma P + (\omega x + \gamma y) \frac{\partial P}{\partial y} - \omega y \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{n_0 \gamma}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} . \qquad /14/$$

Это уравнение можно решить точно /15/. Введем величины

$$\xi = \left(\frac{\mu_1}{\omega} x - y \right) \exp(-\mu_2 t), \quad \eta = \left(\frac{\mu_2}{\omega} x - y \right) \exp(-\mu_1 t) ,$$

где $\mu_{1,2} = \frac{1}{2} (-\gamma \mp i \sqrt{4\omega^2 - \gamma^2})$.

В этих переменных уравнение /14/ примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \gamma P + q \left[\exp(-2\mu_2 t) \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + 2 \exp[-(\mu_1 + \mu_2) t] \frac{\partial^2 P}{\partial \xi \, \partial \eta} + \right. \qquad /15/$$

$$\left. + \exp(-2\mu_1 t) \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} \right] ,$$

где

$$q = \frac{n_0 \gamma}{2} .$$

Решением /15/ с учетом условия $P(\xi,\eta,t)\xrightarrow{t\to 0}\delta(\xi-\xi_0)\,\delta(\eta-\eta_0)$ является выражение

$$P(x,y,t)=\frac{\pi\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}}{\omega}\,e^{\gamma t}\,\phi(\xi,\eta,t),$$

$$\phi(\xi,\eta,t)=\frac{1}{2\pi\Lambda^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\Lambda}\left[u(\xi-\xi_0)^2+2v(\xi-\xi_0)(\eta-\eta_0)+w(\eta-\eta_0)^2\right]\right\}. \qquad /16/$$

где

$$u=\frac{q}{\mu_1}\left[1-\exp(-2\mu_1 t)\right],$$

$$v=-\frac{2q}{(\mu_1+\mu_2)}\left\{1-\exp\left[-(\mu_1+\mu_2)t\right]\right\}, \qquad /17/$$

$$w=\frac{q}{\mu_2}\left[1-\exp(-2\mu_2 t)\right],\quad \Lambda=uw-v^2.$$

Заметим, что /16/ отнормировано: $\frac{1}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}dx\,dy\,P(x,y,t)=1$. Стационарное решение $P_S(x,y)=\lim\limits_{t\to\infty}P(x,y,t)$ может быть представлено в виде

$$P_S(x,y)=\frac{1}{n_0}\exp\left[-\frac{1}{n_0}(x^2+y^2)\right]. \qquad /18/$$

3. РАСЧЕТ СРЕДНЕЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ЭНЕРГИИ КАК ФУНКЦИИ ГЛУБИНЫ ПРОНИКНОВЕНИЯ В КРИСТАЛЛ

При движении высокоэнергетической частицы под малыми углами по отношению к кристаллографическим плоскостям продольную компоненту скорости v_0 можно принять постоянной. И поэтому траектория движения частицы может быть описана только в терминах поперечного движения $(x_\perp, p_\perp)$, при этом мы можем от параметра t /время/ перейти к параметру ℓ /глубина проникновения/ по формуле $\ell\simeq v_0 t$

Если начальная поперечная энергия падающей частицы равна $E_\perp^0 = \hbar\omega(x_0^2+y_0^2) = E_\perp^c$, то для начального распределения имеем

$$P_0(z,z^*) = \pi\delta(z-z_0) = \pi\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)$$

или

$$\rho_S(0) = |z_0\rangle\langle z_0| .$$

Тогда средняя поперечная энергия может быть представлена выражением

$$\bar{E}_\perp(t) = \hbar\omega\,\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\,(x^2+y^2)\,P(x,y,t) = \qquad /19/$$

$$= \hbar\omega\,\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}(a_1\xi^2 + 2b_1\xi\eta + c_1\eta^2)\,P(\xi,\eta,t)\,d\xi\,d\eta ,$$

где

$$a_1 = \frac{(\omega^2+\mu_2^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}\exp(2\mu_2 t), \qquad b_1 = -\frac{2\omega^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\exp[(\mu_1+\mu_2)t],$$

$$c_1 = \frac{(\omega^2+\mu_1^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}\exp(2\mu_1 t)$$

Откуда

$$\frac{1}{\hbar\omega}\bar{E}_\perp(t) = \left(\eta_0^2 + \frac{q}{\mu_1}\right)\frac{(\omega^2+\mu_1^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}\exp(2\mu_1 t) +$$

$$+\left(\xi_0^2 + \frac{q}{\mu_2}\right)\frac{(\omega^2+\mu_2^2)}{(\mu_1-\mu_2)^2}\exp(2\mu_2 t) - \qquad /20/$$

$$-\frac{4\omega^2}{(\mu_1-\mu_2)^2}\left(\xi_0\eta_0 + \frac{2q}{\mu_1+\mu_2}\right)\exp[(\mu_1+\mu_2)t] .$$

где

$$\xi_0 = \frac{\mu_1}{\omega}x_0 - y_0, \qquad \eta_0 = \frac{\mu_2}{\omega}x_0 - y_0 .$$

Или в терминах $\ell = v_0 t$:

$$\bar{E}_{\perp}(\ell) = \hbar\omega n_0 + \hbar\omega \frac{4\omega^2}{4\omega^2-\gamma^2} \exp\left(-\frac{\gamma}{v_0}\ell\right)\{-n_0+(x_0^2+y_0^2)+$$

$$+\frac{x_0 y_0 \gamma}{\omega} + \frac{\gamma^2}{4\omega^2}[n_0 - \frac{4\omega^2}{\gamma} x_0 y_0 - (x_0^2+y_0^2)]\cos[\frac{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\ell}{v_0}] + \qquad /21/$$

$$+\frac{\gamma^2}{4\omega^2}(x_0^2-y_0^2)(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\sin[\frac{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\ell}{v_0}]\}.$$

Аналогично можно рассчитать $\bar{x}_{\perp}(t)$ и $\bar{p}_{\perp}(t)$:

$$\bar{x}(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}}\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} x P(x,y,t)\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}}\left(\frac{\omega}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t}\xi_0 - \frac{\omega}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1 t}\eta_0\right),$$

$$/22/$$

$$\bar{p}_{\perp}(t) = \sqrt{2M\hbar\omega}\frac{1}{\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} y P(x,y,t)\,dx\,dy =$$

$$= \sqrt{2M\hbar\omega}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t}\xi_0 - \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1 t}\eta_0\right)$$

или

$$\bar{x}_{\perp}(\ell) = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}}e^{-\frac{\gamma\ell}{2v_0}}\{x_0\cos[\frac{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\ell}{2v_0}] \frac{\omega}{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}}(2y_0+\frac{x_0\gamma}{\omega})\sin[\frac{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\ell}{2v_0}]\},$$

$$\bar{p}_{\perp}(\ell) = \sqrt{2M\hbar\omega}\,e^{-\frac{\gamma\ell}{2v_0}}\{y_0\cos[\frac{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\ell}{2v_0}] - \frac{\omega}{\sqrt{4\omega^2-\gamma^2}}(2x_0+\frac{y_0\gamma}{\omega})\sin[\frac{(4\omega^2-\gamma^2)^{1/2}\ell}{2v_0}]\}.$$

$$/23/$$

Итак, для величин $\bar{x}_\perp(l')$, $\bar{p}_\perp(l')$, $\bar{E}_\perp(l')$ будет справедлив следующий закон зависимости от l':

$$\bar{x}_\perp(l') \sim c_1(l', \beta)\, e^{-l'/l'_c}, \quad \bar{p}_\perp(l') \sim c_2(l', \beta)\, e^{-l'/l'_c}, \tag{24}$$

$$\bar{E}_\perp(l') = c_3(l', \beta)\, e^{-2l'/l'_c} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\beta\omega} - 1}, \quad l'_c = \frac{2v_0}{\gamma}.$$

Рассмотрим классический предел полученных результатов. Для этого оставим в уравнении для редуцированной матрицы плотности только диагональные матричные элементы в представлении чисел заполнения:

$$\frac{\partial [\rho(t)]_{n,n}}{\partial t} = g(n+1)\{[\rho_S(t)]_{n+1,n+1} - e^{-\hbar\beta\omega}[\rho_S(t)]_{n,n}\} -$$

$$- hn\{[\rho_S(t)]_{n-1,n-1} - e^{\hbar\beta\omega}[\rho_S(t)]_{n,n}\}. \tag{25}$$

Классический предел есть $n \gg 1$ и $\beta\omega \ll 1$. Положим, $E_\perp = \hbar\omega n$, тогда уравнение /28/ переходит в уравнение из работы /17/:

$$\frac{\partial \rho_S(l', E_\perp)}{\partial l'} = \frac{\partial}{\partial E_\perp}\left[D_n E_\perp \left(\frac{\partial \rho_S}{\partial E_\perp} + \beta \rho_S \right)\right], \tag{26}$$

где

$$D_n = \frac{\hbar\omega g}{v_0}.$$

Это же уравнение было получено в /16/ в рамках классического описания каналирования. Диффузионная функция D_n учитывает неупругое рассеяние каналируемых частиц на коллективных колебаниях решетки кристалла. Заметим, что $D_n \sim v_0^{-1}$. Уравнение /26/ описывает термолизацию пучка энергетических частиц, каналируемых через кристалл. Наконец, заметим, что оно может быть модифицировано за счет учета рассеяния каналируемых частиц и на свободных электронах проводимости кристалла.

4. ФРАКЦИЯ КАНАЛИРОВАНИЯ И РЕКАНАЛИРОВАНИЕ

В этом параграфе мы рассчитаем функцию распределения $\rho_S(\ell, E_\perp)$ в классическом пределе. Используя ее, исследуем зависимости изменения поперечной энергии $E_\perp$ и фракции каналирования частиц как функции глубины проникновения в кристалл.

При больших глубинах проникновения в кристалл достигается стационарное распределение:

$$\rho_S(E_\perp) = \lim_{\ell\to\infty} \rho_S(\ell, E_\perp) = \beta e^{-\beta E_\perp} \qquad /27/$$

Мы можем получить нестационарное решение /26/, отвечающее граничному условию

$$\rho_S(0, E_\perp) = F(E_\perp), \qquad \int_0^\infty F(E_\perp)dE_\perp = 1, \qquad /28/$$

$$\rho_S(\ell, E_\perp) = e^{-\beta E} \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(\beta E_\perp) e^{-k D_n \beta \ell}, \qquad /29/$$

где $L_k(x)$ - полиномы Лягтера и

$$c_k = \frac{\beta}{(k!)^2} \int_0^\infty F(x) L_k(\beta x)\, dx$$

Из /29/ для поперечной энергии имеем

$$\bar{E}_\perp(\ell) = \bar{E}_\perp^0 e^{-D_n \beta \ell} + \frac{1}{\beta}(1 - e^{-D_n \beta \ell}), \qquad /30/$$

где $\bar{E}_\perp^0 = \int_0^\infty E_\perp F(E_\perp) dE_\perp$ - начальное значение средней величины поперечной энергии частицы. Отсюда видно, что при больших ℓ $\bar{E}_\perp(\ell)$ стремится к β^{-1}-температуре кристалла, то есть кристаллическая решетка фокусирует пучок каналируемых частиц, что приводит к уменьшению его поперечной энергии.

Фракция каналирования $f(\ell)$ определяется формулой

$$f(\ell) = \int_0^{E_\perp^c} \rho_S(\ell, E_\perp) dE_\perp, \qquad /31/$$

где $E_\perp^c$ - высота потенциального барьера канала движения частицы. Выполнив интегрирование уравнения /26/, имеем

$$f(\ell) \simeq (1-e^{-\beta E_{\perp}^{c}}) + \beta E_{\perp}^{c}\, e^{-\beta E_{\perp}^{c}} (1-\beta \bar{E}_{\perp}^{0}) e^{-D_n \beta \ell} + O(e^{-2D_n \beta \ell}) \qquad /32/$$

Заметим, что относительно большая функция каналирования $f(\ell) \simeq (1-e^{-\beta E_{\perp}^{c}})$ объясняется тем, что мы не учли рассеяние на свободных электронах в кристалле, а также наличия примесей и дефектов кристалла. С другой стороны, мы рассматриваем бесконечный кристалл, что позволяет учесть процесс реканалирования, действительно приводящий к увеличению фракции каналирования.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы провели статистическое исследование эволюции распределения пучка частиц, рассматривая ее как малую подсистему, подвергающуюся влиянию большой статистической системы /кристалла/. Эффективное взаимодействие предполагается слабым, что и дает основание описывать данное явление уравнениями типа Фоккера-Планка. Рассмотрено второе приближение по взаимодействию.

Мы показали, что рассеяние на коллективных колебаниях решетки ведет к экспоненциальному уменьшению поперечной энергии. Этот результат известен как охлаждение пучка частиц /6,8/.

Проведенные к настоящему времени эксперименты показывают, что только небольшая фракция каналируемых частиц уменьшает свою поперечную энергию. Этот эффект можно отнести за счет наличия значительного количества примеси и дефектов в кристалле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gemmell D.S. Rev.Mod.Phys., 1974, v. 46, No. 1, p.129-227.
2. Lindhard J. Mat.Fys.Medd.Dan.Vid.Selsk., 1965, v. 34, No.14.
3. Bonderup E. et al. Rad.Effects, 1972, v. 12, p.261-266.
4. Omura T., Kitagawa M., Ohtsuki Y.H. phys.stat.sol.(b), 1977, v. 79, No. 1, p. 321-324.
5. Fedyanin V.K., Gavrilenko G.M. Phys.Lett., 1979, v. 73A, No. 5, 6, p. 420-422.
6. Tsyganov E.N. Fermilab Preprints TM-682, TM-684, 1976.
7. Elishev A.F. et al. Phys.Lett., 1979, v. 88B, No. 3-4, p. 387-391.
8. Uggerhøj E.Nucl.Instr.Meth., 1980, v. 170, No. 1-3, p. 105-113.

9. Bak J. et al. Preprint CERN-EP/80-33, 1980.
10. Andersen S.K. et al. Preprint CERN-EP/79-99, 1979.
11. Bogolubov N.N. JINR, E17-10514, Dubna, 1977.
12. Haake F. Springer Tracts in Modern Physics, 1973, v. 66, p. 98-168.
13. Haken H. Rev.Mod.Phys., 1975, v. 47, No. 1, p. 67-121.
14. Glauber R.J. Phys.Rev., 1963, v. 131, No. 6, p. 2766-2788.
15. Chandrasekhar S. Rev.Mod.Phys., 1943, v. 15, No. 1, p. 1-89.
16. Гавриленко Г.М., Федянин В.К. ОИЯИ, Р17-80-47, Дубна, 1980.
17. Van Kampen N.G. Lectures Notes in Physics, Springer, 1978, v. 84, p. 1-23.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1980 года.