объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р17-80-770

И.Г.Гочев

ПЛОТНОСТЬ ЧАСТИЦ ОДНОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ БОЗОНОВ С δ-ОБРАЗНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ ПРИТЯЖЕНИЯ

Направлено в ТМФ

1980

1. Одномерная система из N бозонов с парным δ-образным потенциалом притяжения является одной из простейших моделей неидеального газа, для которой найдено точное основное состояние. В работах /1/ рассмотрено уравнение Шредингера с гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - a\sum_{i<j}\delta(x_i - x_j). \qquad /1/$$

При $a>0$ авторами указанных работ получены следующие выражения для волновой функции и энергии основного состояния:

$$\Phi_N(x_1, x_2, \dots, x_N) = C_N \exp(-\frac{a}{2}\sum_{i<j=1}^{N}|x_i - x_j|),$$

$$E_N = -\frac{a^2}{24}N(N^2-1). \qquad /2/$$

Нормировочный коэффициент C_N вычислен в работе /2/:

$$C_N = N![(N-1)!\,a^{N-1}]^{1/2}.$$

При решении важного вопроса о справедливости приближения самосогласованного поля * в случае системы /1/ возникает задача о вычислении плотности частиц в состоянии с волновой функцией $\Phi_N(x_1, \dots, x_N)$ /см. /2,3/ /. По определению, плотность частиц связанного состояния в системе центра масс дается выражением /2,3/:

$$\rho_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \dots dx_N |\Phi_N|^2\, \delta(x - x_1)\,\delta(\sum_{i=1}^{N} x_i). \qquad /3/$$

*Этот вопрос связан с интерпретацией решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Нетривиальное интегрирование в /3/ с Φ_N из /2/ выполнено в работах [2,3], и авторами получено следующее соотношение:

$$\rho_N(x) = \alpha (N!)^2 \sum_{m=1}^{N-1} (-1)^{m-1}\, m \frac{\exp(-mN\alpha|x|)}{(N-1-m)!\,(N-1+m)!}\,. \qquad /4/$$

Выписанный в [2] предел

$$\rho_N(x) = \frac{\alpha N^2}{4\,\mathrm{ch}^2(\frac{N\alpha x}{2})}\{1 - \frac{1}{N}[1 - \frac{3}{2}\mathrm{ch}^{-2}(\frac{N\alpha x}{2})] + O(\frac{1}{N^2}, N e^{-\alpha N^2|x|})\} \qquad /5/$$

получен при выполнении условий $N \gg 1$, $x \geq (\alpha N^2)^{-1}$. Так как система /1/ при больших N коллапсирует, т.е. в пределе $N \to \infty$ $\rho_N(x) \to \delta(x)$, указанный выше предел имеет место для хвоста одночастичной плотности. Рассмотрение интересной области $|x| < (\alpha N^2)^{-1}$ при больших N требует более подробного исследование выражения для $\rho_N(x)$.

Настоящая работа посвящена вычислению плотности $\rho_N(x)$ в системе /1/. Исходным выражением для нас здесь является выражение /4/. Из полученного нами результата для $\rho_N(x)$ можно найти поведение плотности при больших N во всей области по x. В работе также получены поправки к предельному значению $\rho_N(x)$, которые по существу являются квантовыми поправками к квазиклассике в этой системе.

2. Анализ коэффициентов ряда /4/ позволяет установить некоторую связь этих коэффициентов с хорошо известной величиной в теории случайного блуждания. Действительно, легко проверить тождество $(N-1-m)!(N-1+m)! \equiv A_N P_{2N-2}(2m)$. Здесь $A_N = 2^{2N-2}[(2N-2)!]^{-1}$, а $P_N(\ell) = N!/2^{2N}(\frac{N-\ell}{2})!\,(\frac{N+\ell}{2})!$ есть вероятность того, что случайно блуждающая по дискретной цепочке частица после N шагов окажется в точке ℓ /мы рассматриваем здесь простейшую задачу о блуждании частицы с вероятностью прыжка 1/2 в соседние узлы/ [4]. Выписанное тождество позволяет преобразовать выражение /4/ к виду $(x \geq 0)$

$$\rho_N(x) = \frac{i}{2}(N!)^2 \alpha A_N \frac{dQ_{2N-2}(\phi)}{d\phi}\Big|_{\phi=\frac{\pi}{2}+iX}, \qquad /6/$$

$$X \equiv N\alpha x, \quad Q_N(\phi) = \sum_{\ell=0}^{N} P_N(\ell)\exp(i\phi\ell).$$

Величина $Q_N(\phi)$ отличается от фурье-образа $\tilde{Q}_N(\phi) = \sum_{\ell=-N}^{N} P_N(\ell)\exp(i\phi\ell)$ в задаче о случайном блуждании. Это отличие не позволяет прямое использование здесь известных выражений для $\tilde{Q}_N(\phi)$. Существование уравнений для $P_N(\ell)$:

$$P_{N+1}(\ell) = \frac{1}{2}[P_N(\ell-1) + P_N(\ell+1)], \qquad /\text{см.}\ ^{/4/}/$$
$$P_0(\ell) = \delta_{\ell,0}, \quad P_N(-\ell) = P_N(\ell),$$

однако, позволяет написать уравнения для интересующей нас функции $Q_N(\phi)$:

$$Q_{N+1}(\phi) = \cos\phi\cdot Q_N(\phi) + \frac{1}{2}[P_N(1) - e^{-i\phi} P_N(0)], \quad Q_0(\phi) = 1.$$

Из этого соотношения можно выразить $Q_N(\phi)$ через $P_n(0)$ и $P_n(1)$:

$$Q_N(\phi) = (\cos\phi)^N + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}[P_n(1) - e^{-i\phi} P_n(0)](\cos\phi)^{N-n-1}.$$

Подставляя полученное выражение в /6/, приходим к следующей формуле для плотности частиц:

$$\rho_N(x) = \frac{1}{2}(N!)^2 \alpha A_N\{[(2N-2)\mathrm{ch}\,X - \frac{1}{2}e^X]\, i^{2N-2}(\mathrm{sh}\,X)^{2N-3} + i\sum_{n=0}^{2N-4} M_{N,n}(X)\cdot(\mathrm{sh}\,X)^n, \qquad /7/$$

где

$$M_{N,n}(X) = \frac{(-i)^n}{2}[P_{2N-n-3}(0)\,e^X - i P_{2N-n-4}(0)\,(n+1)\,e^X\cdot\mathrm{ch}\,X - (n+1)\,P_{2N-n-4}(1)\cdot\mathrm{ch}\,X].$$

Дальнейшие преобразования выражения /7/ не содержат интересных моментов, и поэтому мы приведем окончательный результат:

$$\rho_N(x) = \frac{2N-2}{2N-3} \cdot \frac{aN^2}{4} \cdot \left(\mathrm{ch}\frac{Nax}{2}\right)^{-2} \left[1 + r_N(\xi)\right],$$

$$\xi \equiv \mathrm{sh}\frac{Nax}{2}, \quad r_N(\xi) = \frac{2(-1)^{N-1}(N-1)}{P_{2N-4}(0)} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left[\binom{1/2}{N+k-1} + \binom{1/2}{N+k}\right] \xi^{-2k}. \qquad /8/$$

Из выражения для $r_N(\xi)$ можно получить следующее точное рекуррентное соотношение, особенно удобное для исследования случая больших N:

$$r_N(\xi) = -\frac{\xi^2}{2N-5}\left[3 + 2(N-1)r_{N-1}(\xi)\right]. \qquad /9/$$

Для начального условия при его решении можно выбрать, например, значение $r_3(\xi)$:

$$r_3(\xi) = 8\xi^2(1+\xi^2)^{3/2} - 8\xi^6 - 12\xi^4 - 3\xi^2 .$$

Выражения /8/ и /9/ представляют решение поставленной задачи. Анализ некоторых интересных частных случаев приведен в следующем разделе.

3. Из выражений /8/ и /9/ или прямо из /7/ легко получить точное значение $\rho_N(0)$ и $\rho'_N(0)$ при произвольном N:

$$\rho_N(0) = \frac{aN^2}{4}\,\frac{2N-2}{2N-3}; \quad \rho'_N(0_\pm) = \begin{cases} \mp 2a^2, & N = 2, \\ 0, & N > 2. \end{cases} \qquad /10/$$

Значение $\rho_N(0)$ получено раньше в[2] прямым суммированием ряда /4/. Любопытным является результат для $\rho'_N(0)$: δ-образная особенность потенциала /1/ приводит к разрыву первой производной плотности в случае $N=2$. При $N>2$ $\rho'_N(x)$ является непрерывной функцией от x.

Уравнение /9/ при больших N имеет единственное решение $r_N = \frac{a_1}{N} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_3}{N^3} + \ldots$, где $a_i(x)$ можно найти методом последовательных приближений. Такое решение не учитывает экспоненциально малые поправки, которые в интересной области $\xi < 1$ $(x \lesssim \frac{1}{aN})$ имеют порядок ξ^{2N} /при $\xi > 1$ поправки того же порядка, как поправки в /5//. Подставляя решение для $r_N(\xi)$ в $\rho_N(x)$, приходим к следующему выражению:

$$\rho_N(x) = \frac{aN^2}{4\,\mathrm{ch}^2\frac{Nax}{2}}\left[1 + \frac{f_1(\xi)}{N} + \frac{f_2(\xi)}{N^2} + \frac{f_3(\xi)}{N^3} + \ldots\right], \qquad /11/$$

где

$$f_1(\xi) = \frac{1-2\xi^2}{2(1+\xi^2)}; \quad f_2(\xi) = \frac{3(1-4\xi^2)}{4(1+\xi^2)^2}; \quad f_3(\xi) = \frac{3(8\xi^4 - 24\xi^2 + 3)}{8(1+\xi^2)^3} .$$

Полученный здесь результат для $f_1(\xi)$ был найден раньше в работе[2] /см. /5// в области $x \gtrsim (aN^2)^{-1}$. Здесь мы показали, что первая поправка имеет такую же функциональную зависимость от x и в области $x < (aN^2)^{-1}$. Таким образом, при больших N $\rho_N(x)$ стремится к значению $aN^2/\,4\,\mathrm{ch}^2\frac{Nax}{2}$, даваемому* приближением самосогласованного поля, при всех x. Поправочные члены при этом пропорциональны $1/N$.

Выражение /2/ для энергии E_N системы /1/ было получено раньше и методом обратной задачи рассеяния[5]. К выражению /2/, как показано в[5], приводит квазиклассическое квантование односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера. В связи с этим следует подчеркнуть, что исследования Ковалева и Косевича[3], Калогеро и др.[2], а также настоящее рассмотрение показывают, что и форма неподвижного солитона определенным образом связана с точной волновой функцией системы большого числа бозонов.

В заключение я благодарю А.Ковалева, В.Федянина, А.Косевича и В.Цукерника за полезное обсуждение.

---

*Эта функция не что иное, как квадрат статического односолитонного решения нелинейного уравнения Шредингера. К этому уравнению приводит приближение Хартри в системе /1/.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин Ф.А., Похил Г.П., Финкельберг В.М. Вестник МГУ, 1964, сер. 1, №1, с. 21-24;Mc Guire J.B. Journ. Math.Phys., 1964, 5, p. 622-629.
2. Cologero F., Degasperis A. Phys.Rev.A., 1975, 11, p.265-269.
3. Ковалев А.С., Косевич А.М. ФНТ, 1976, 2, с. 913-918.
4. Монтролл Э. В кн.: Прикладная комбинаторная математика, под ред. Э.Беккенбаха, "Мир", М., 1968, с. 9.
5. Кулиш П.П., Манаков С.В., Фаддеев Л.Д. ТМФ, 1976, 28, с. 38-44.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 ноября 1980 года.