ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P17-80-760

Н.Ангелеску, В.Б.Приезжев

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В МОДЕЛИ ДЛИННЫХ ПОЛИМЕРОВ С ИСКЛЮЧЕННЫМ ОБЪЕМОМ

Направлено в "Journal of Physics A"

1980

1. ВВЕДЕНИЕ

Решеточные модели полимеров с исключенным объемом широко используются для объяснения свойств систем длинных молекул, взаимодействующих посредством сил отталкивания. Среди основных проблем, возникающих при изучении этих моделей, находятся вопрос о существовании предела термодинамических функций и вопрос о наличии фазового перехода. В 1971 г. Грубер и Кунц /1/ доказали существование термодинамического предела для давления в модели полимеров при весьма общих условиях, предъявляемых к форме и размеру полимеров. В работах /1,2/ было доказано отсутствие фазового перехода в простейшей полимерной системе - смеси мономеров и димеров. Обобщение этого результата на случай более сложных полимеров пока не получено.

Другой тип задач возникает, если в системе полимеров кроме исключенного объема имеется дополнительное взаимодействие. При подходящей величине и знаке взаимодействия в такой системе может возникнуть фазовый переход. Доказательство существования фазового перехода, как правило, проводится с помощью контурного метода, предложенного Пайерлсом /3/ для доказательства существования дальнего порядка в модели Изинга. В работах /4-6/ с помощью метода Пайерлса изучались различные модели взаимодействующих твердых стержней.

Использование этого метода значительно упрощается, если модель обладает свойством отражательной четности /7/. Недавно /8,9/ аргументы Пайерлса в сочетании с отражательной четностью были применены для доказательства существования фазового перехода в моделях димеров, в которых взаимодействие определялось так, чтобы модель воспроизводила основные свойства жидких кристаллов. К сожалению, свойство отражательной четности выполняется для довольно ограниченного класса решеточных моделей; в частности, пока не удалось воспользоваться этим свойством при рассмотрении систем молекул более длинных, чем димеры.

В настоящей работе предложена двумерная модель длинных полимерных молекул, не касающихся друг друга и не самопересекающихся из-за короткодействующих сил отталкивания. Кроме того, имеется дополнительное взаимодействие между звеньями полимерной цепочки. Знак его выбран таким, что в основном состоянии звенья полимера выстраиваются в прямую линию. Все

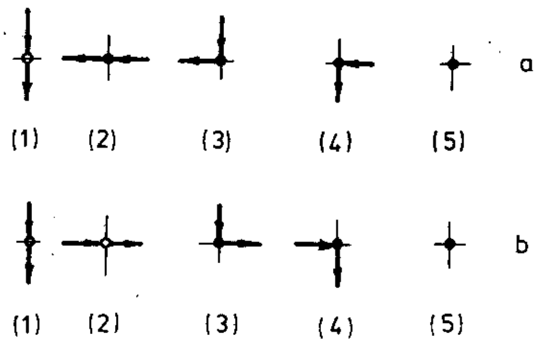


Рис.1

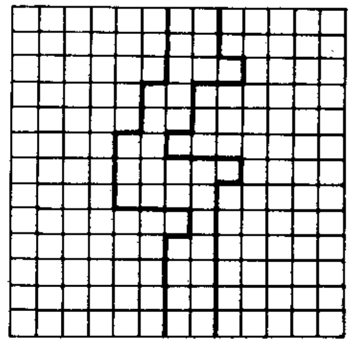


Рис.2

звенья полимера имеют одинаковый химический потенциал. Конфигурация полимеров на квадратной решетке удовлетворяет требованиям, сформулированным в п.2.

С методической точки зрения эта модель обладает двумя особенностями. Во-первых, из-за внутримолекулярного взаимодействия и отсутствия стабильности химического потенциала /см.п.3/ на нее не распространяется доказательство существования предела термодинамических величин, данное Грубером и Кунцем [1]. Во-вторых, дополнительные требования к конфигурации полимера таковы, что модель обладает свойством отражательной четности только в одном направлении.

Физические свойства модели определяются "длинной памятью" и сильной зависимостью состояния системы от граничных условий. В п.4 мы докажем, что при достаточно низких температурах система находится в основном состоянии /не обязательно вырожденном/ со свободной энергией, равной нулю в некотором интервале температур. В случае высоких температур существует ненулевой предел свободной энергии при стремлении объема системы к бесконечности. Следовательно, эта модель претерпевает фазовый переход, т.е. свободная энергия неаналитична по температуре, а при низких температурах существует макроскопическое заполнение основного состояния.

2. МОДЕЛЬ

Пусть $\Lambda \subset \mathbf{Z}^2$ - квадратная решетка размером $2M \times 2N$, свернутая в тор для создания периодических граничных условий. Конфигурационное пространство определим, задавая все возможные расположения стрелок на ребрах решетки, подчиняющиеся следующим условиям:

(i) Каждое ребро решетки либо свободно, либо занято стрелкой.
(ii) В каждой вершине $(x,y) \in \Lambda$ возможна одна из конфигураций стрелок, изображенных на рис.1 а, если y четно, и на рис.1 б, если y нечетно.

Вершины типа /1/ и /2/ назовем хорошими и припишем им нулевую энергию. Остальные вершины назовем плохими. Припишем энергию a вершинам типа /3/ и /4/ и энергию $a+\mu$ вершинам типа /5/. Мы предполагаем, что $a>0$, $a+\mu>0$, и в дальнейшем будем пользоваться обозначением $\epsilon=\min(a,a+\mu)$, $\epsilon'=\max(a,a+\mu)$. Энергия конфигурации стрелок на Λ, подчиняющейся правилам (i), (ii), есть сумма энергий всех вершин.

Отождествим с каждым ребром, занятым стрелкой, звено полимера, расположенное на этом ребре. Типичная конфигурация полимеров показана на рис.2. Выпишем для дальнейших справок следующие свойства модели, непосредственно вытекающие из правил (i), (ii):

1. Полимерная цепочка образует на торе замкнутый путь, т.к. она не имеет ни начала, ни точки окончания.

2. Две хорошие вершины могут быть ближайшими соседями только тогда, когда они принадлежат к одному типу.

3. Каждая плохая вершина соседствует по крайней мере с одной плохой вершиной.

4. Если на горизонтальной строке решетки имеется последовательность $k+2$ вершин, которые все, кроме первой и последней, плохие, то среди смежных $k+2$ вершин на нижней строке должна быть хотя бы одна плохая вершина. /Действительно, если все вершины на нижней строке хорошие, то они принадлежат к одному и тому же типу. К этому же типу должны принадлежать и крайние вершины на верхней строке, но тогда остальные k вершин на этой строке должны быть хорошими, что противоречит условию./

5. Если все вершины некоторой строки хорошие, то на любой другой строке все вершины либо также хорошие, либо принадлежат к типу /5/. Конфигурации, обладающие последним свойством, назовем тривиальными. Вклад тривиальных конфигураций в статсумму равен

$$Z_\Lambda^{(t)} = 1+\sum_{k=0}^{2N} C_{2N}^{k}\, e^{-\beta k\cdot 2M(a+\mu)} = 1+\left(1+e^{-2\beta M(a+\mu)}\right)^{2N} .$$

6. Под термодинамическим пределом $\Lambda\to\infty$ мы будем понимать предел $\min(N,M)/\log\max(N,M)\to\infty$. При этом условии имеем

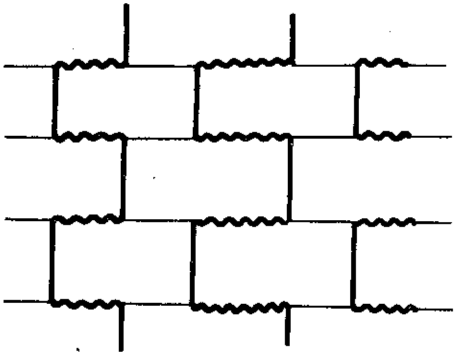


Рис.3

$\lim_{\Lambda\to\infty} Z_{\Lambda}^{(t)} = 2$ /равномерно по $\beta \geq \beta_0$ для произвольных $\beta_0 > 0$ /. Модель полимеров, сформулированная выше, может быть представлена как эквивалентная ей модель димеров на гексагональной решетке. Для этого рассмотрим двумерную гексагональную решетку с различимым множеством ребер, изображенных на рис.3 волнистыми линиями. Как и ранее, предполагаются выполненными периодические граничные условия.

Рассмотрим все возможные плотные упаковки димеров на этой решетке /т.е. такие, что каждая вершина покрыта одним и только одним димером/. Каждому димеру, расположенному на простом /не волнистом/ ребре, припишем химический потенциал μ , а каждой паре параллельных димеров, примыкающих к одному волнистому ребру, - энергию взаимодействия $-a$. Легко убедиться в том, что исходная модель полимеров получится, если мы стянем в точку все волнистые ребра решетки, а каждый димер, лежащий на простом ребре, отождествим со звеном полимера. Возможность представить нашу модель в виде модели димеров на декорированной гексагональной решетке означает, что при $a=0$ задача о вычислении статистической суммы может быть решена точно методом пфаффиана [10].

3. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ

Поскольку конфигурации модели состоят из полимеров, охватывающих тор, доказательство статистической независимости различных областей затруднено, если пользоваться традиционными методами, приспособленными для систем с конечным радиусом взаимодействия. Тем не менее следующая лемма, устанавливающая супераддитивность свободной энергии, дает возможность доказать существование термодинамического предела.

Лемма. Пусть Λ , Λ' - прямоугольники со сторонами $(2M, 2N)$ и $(2M', 2N')$ соответственно; $M' = mM + r$, $N' = nN + s$, где m , n - положительные целые числа и $0 \leq r < M$; $0 \leq s < N$. Тогда

$$Z_{\Lambda'} \geq Z_{\Lambda}^{mn} \cdot 2^{-(M+N)mn} e^{-\beta\epsilon'(MN'+NM')}. \qquad /3.1/$$

<u>Доказательство</u>. Для каждой конфигурации C в Λ обозначим через B_h /соответственно через B_v / конфигурацию горизонтальных /вертикальных/ ребер, соединяющих между собой противоположные стороны Λ. Для данных B_h, B_v обозначим через $\mathcal{C}_\Lambda(B_h, B_v)$ множество всех конфигураций в Λ, совместимых с B_h и B_v. Пусть

$$Z_\Lambda(B_h, B_v) = \sum_{C \in \mathcal{C}_\Lambda(B_h, B_v)} e^{-\beta E(C)}.$$

Очевидно, что

$$Z_\Lambda = \sum_{B_h, B_v} Z_\Lambda(B_h, B_v).$$

Рассмотрим теперь Λ как подмножество Λ'. Транслируя Λ вдоль оси y, а затем вдоль оси x, мы получим mn различных копий Λ, вложенных в Λ'. Каждая совокупность конфигураций $C_1, \ldots, C_{mn} \in \mathcal{C}_\Lambda(B_h, B_v)$ может быть дополнена до конфигурации в Λ' путем соединения прямыми линиями всех граничных точек смежных копий Λ. Таким образом,

$$Z_\Lambda \geq \sum_{B_h, B_v} Z_\Lambda(B_h, B_v)^{mn} e^{-\beta\epsilon'(rN'+sM')},$$

где последний фактор возник из-за связей между различными копиями Λ. Поскольку в сумме имеется 2^{M+N} членов, неравенство /3.1/ следует из неравенства Гельдера:

$$\mathfrak{N}^{k-1} \sum_{i=1}^{\mathfrak{N}} |a_i|^k \geq |\sum_{i=1}^{\mathfrak{N}} a_i|^k.$$

Логарифмируя /3.1/, мы получим для удельной свободной энергии

$$f_\Lambda = -|\Lambda|^{-1} \beta^{-1} \log Z_\Lambda \qquad /3.2/$$

неравенство

$$f_{\Lambda'} \leq \frac{mMnN}{M'N'} f_\Lambda + \frac{(M+N)mn}{\beta M'N'} + \epsilon' \frac{M'N+N'M}{M'N}. \qquad /3.3/$$

Выберем теперь из последовательности прямоугольников подпоследовательность Λ_k /со сторонами M_k, $N_k \to \infty$ / такую, что f_{Λ_k} сходится к $\liminf_{\Lambda} f_\Lambda \equiv \underline{f}$, и другую подпоследовательность Λ'_k /со сторонами M'_k, $N'_k \to \infty$ / такую, что $f_{\Lambda'_k}$ сходится к $\limsup_{\Lambda} f_\Lambda = \overline{f}$, причем $M'_k/M_k \to \infty$ и $N'_k/N_k \to \infty$. Тогда в пределе $k \to \infty$ из неравенства /3.3/ мы получим $\overline{f} \le \underline{f}$, что означает существование термодинамического предела.

Замечание. Вместо периодических граничных условий вдоль вертикальной оси мы можем выбрать свободные условия на левой и правой границе, рассматривая область $\Lambda_{k,\ell}$ как цилиндр. При этом мы отбрасываем из числа всех возможных полимерных конфигураций на торе те, которые пересекают некоторую фиксированную линию, в частности, одну из конфигураций основного состояния и все тривиальные конфигурации. Доказательство существования термодинамического предела не изменится, если заметить, что $Z_{\Lambda_{k,\ell}} \ge Z^2_{\Lambda_{k-1,\ell}}$, поскольку в правой части неравенства опущена сумма по всем конфигурациям, пересекающим центральную вертикальную линию.

4. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД

Основным техническим средством последующего доказательства будет свойство отражательной четности, к описанию которого мы приступаем. Пусть $\mathcal{C}$ есть множество всех возможных конфигураций вершин, удовлетворяющих правилу (ii). Для каждой пары горизонтальных линий: $\ell_k = \{ y = k - \frac{1}{2} \}$ и $\ell'_k = \{ y = k + N - \frac{1}{2} \}$, $k = 1, 2, \ldots, N$, определим $\mathcal{C}_{k+}(\mathcal{C}_{k-})$ как множество конфигураций вершин, расположенных выше ℓ_k и ниже ℓ'_k /соответственно выше ℓ'_k и ниже ℓ_k /. Определим $\theta_k : \mathcal{C}_{k+} \to \mathcal{C}_{k-}$ как отображение конфигурации вершины $(x, k+y)$ в симметричную конфигурацию вершины $(x, k-y-1)$ с обращенными стрелками. Положим далее, что $r_k : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ есть трансляция конфигурации вершины (x, y) в вершину $(x, y + 2k)$.

Пусть $\mathcal{A}$ - алгебра всех функций на $\mathcal{C}$; $\mathcal{A}_{k\pm}$ - подалгебры всех функций, зависящих от $\mathcal{C}_{k\pm}$ соответственно и $\theta_k : \mathcal{A}_{k+} \to \mathcal{A}_{k-}$, $r_k : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ - индуцированные отображения $(\theta_k f(C) = f(\theta_k C))$.

Лемма. /I/ Для каждого $k=1,\ldots,N$ $\langle f \theta_k f \rangle_\Lambda \ge 0$ при всех $f \in \mathcal{A}_{k+}$ /отражательная четность/.

/II/ Если функции Q_y, $y = 1, \ldots, 2N$, зависят только от конфигураций вершин на строке y, то

$$< \prod_{y=1}^{2N} Q_y >_\Lambda \le \prod_{y=1}^{2N} < [Q]_y >_\Lambda^{1/2N} ,\qquad /4.1/$$

где

$$[Q]_y = \prod_{k=0}^{N-1} r_k \{Q_y \theta_y Q_y\} .$$

Доказательство. Согласно определению средних в нашей модели имеем

$$<f>_\Lambda = Z_\Lambda^{-1} \sum_{C\in\mathcal{C}} \chi(C)\, f(C)\, e^{-\beta H(C)} ,\qquad /4.2/$$

где

$$Z_\Lambda = \sum_{C\in\mathcal{C}} \chi(C)\, e^{-\beta H(C)}$$

- статсумма; $H(C)$ - сумма энергий всех вершин решетки, а χ - характеристическая функция конфигураций, удовлетворяющих правилу (i). Для каждой пары линий отражения $\chi=(\chi_{k^+})(\chi_{k^\circ})(\chi_{k^-})$, где $\chi_{k^+}\in \mathfrak{A}_{k^+}$; $\chi_{k^-}=\theta_k \chi_{k^+}$; $\chi_{k^\circ}(C) = 1$, если правило (i) выполняется для ребер, пересекающих линию отражения, и $\chi_{k^\circ}(C) = 0$ в противном случае. Энергия системы представляется в виде

$$H = (H_{k^+}) + (\theta_k H_{k^+}),$$

где $H_{k^+}(C)$ - сумма всех энергий вершин для конфигураций, принадлежащих $\mathcal{C}_{k^+}$. Это означает справедливость /I/; /II/ является хорошо известным следствием /I/ /обобщенное неравенство Гёльдера[7]/.

Утверждение. Обозначим через $P_{0\Lambda}$ вероятность того, что все вершины Λ хорошие. Тогда существуют две константы $0<c_1<c_2<\infty$ такие, что

(i) для $\beta<c_1/\epsilon'$ $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} P_{0\Lambda}=0$ и $\liminf\limits_{\Lambda\to\infty} |\Lambda|^{-1}\log Z_\Lambda > 0$,

(ii) для $\beta>c_2/\epsilon$ $\lim\limits_{\Lambda\to\infty} P_{0\Lambda}=0$ и $\lim |\Lambda|^{-1} \log Z_\Lambda = 0$.

Доказательство. (i) Поскольку $P_{0\Lambda}=2/Z_{\Lambda}$, достаточно показать, что $|\Lambda|^{-1}\log Z_{\Lambda}\geq B>0$ для B, не зависящего от Λ. Разделим Λ на вертикальные полосы, по три колонки в каждой, и рассмотрим вклад в статсумму только от конфигураций полимеров, содержащихся в каждой полосе. Расположение полимера в полосе определим последовательностью 0 и 1, приписывая 0 вертикальному звену на центральной колонке и 1 - вертикальному звену на одной из боковых колонок. Каждой такой последовательности соответствует по крайней мере одна конфигурация полимера; всего имеется $2^{2N[2M/3]}$ таких конфигураций. Поэтому $Z_{\Lambda}\geq 2^{2N[2M/3]}e^{-|\Lambda|\beta\epsilon'}$ и $|\Lambda|^{-1}\log Z_{\Lambda}\geq 3^{-1}\log 2-\beta\epsilon'$, что приводит к (i) с константой $c_1<3^{-1}\log 2$.

(ii) Докажем, что вероятность возникновения нетривиальной конфигурации в Λ стремится к нулю для $\beta>c_2/\epsilon$ при $N/\log M\to\infty$.

Согласно следствиям 4 и 5 в каждой нетривиальной конфигурации на любой строке y можно выбрать максимальное множество смежных плохих вершин Γ_y так, что

$$\min\{|x-x'|:(x,y)\in\Gamma_y,\ (x',y-1)\in\Gamma_{y-1}\}\leq 1,\ y=2,3,\dots,2N. \qquad /4.3/$$

Набор $\{\Gamma_y;\ y=1,\dots,2N\}$, удовлетворяющий условию /4.3/, назовем контуром. Вероятность возникновения нетривиальной конфигурации оценивается сверху суммой по всем возможным контурам от вероятности данного контура. Мы покажем, что для этой вероятности справедливы оценки

$$P_{\Lambda,\beta}(\{\Gamma_y\})\leq[3e^{-\beta\epsilon}]^{\sum_{y=1}^{2N}|\Gamma_y|} \qquad /4.4/$$

для $\beta>\log 2/\epsilon$ и достаточно большом $N/\log M$.

Вследствие /4.3/ существует не более, чем

$$2M\prod_{y=1}^{2N-1}(|\Gamma_y|+|\Gamma_{y+1}|+1)\leq 2M\prod_{y=1}^{2N-1}(1+|\Gamma_y|)(1+|\Gamma_{y+1}|)\leq$$

$$\leq 2M\prod_{y=1}^{2N}(1+|\Gamma_y|)^2$$

контуров с данным набором Γ_y. Мы получаем, что вероятность нетривиальной конфигурации ограничена сверху величиной

$$2M\{\sum_{k=1}^{\infty}(1+k)^2[3e^{-\beta\epsilon}]^k\}^{2N}=2M[\,3e^{-\beta\epsilon}\,\frac{4-9e^{-\beta\epsilon}+9e^{-2\beta\epsilon}}{(1-3e^{-\beta\epsilon})^3}]^{2N},$$

которая стремится к нулю при $N/\log M \to \infty$, поскольку выражение в квадратных скобках меньше единицы при $\beta\epsilon > c_2$. В сочетании с /I/ последняя оценка дает требуемый результат.

Для доказательства /4.4/ мы используем тот факт, что число возможных расположений плохих вершин Γ_y на строке y не превосходит $3^{|\Gamma_y|}$. Нам остается оценить вероятность контура с данной конфигурацией вершин на нем, т.е. среднее вида $\langle \prod_{y=1}^{2N} Q_y \rangle$, где Q_y – характеристическая функция конфигураций вершин, принадлежащих Γ_y.

Согласно /I/ имеем

$$\langle \prod_{y=1}^{2N} Q_y \rangle_\Lambda \le \prod_{y=1}^{2N} \langle [Q]_y \rangle_\Lambda^{1/2N} .$$

Неравенство /4.4/ выполняется при условии $\langle [Q]_y \rangle_\Lambda \le \exp(-2N\beta\epsilon\,|\Gamma_y|)$. Для доказательства последнего неравенства в случае $|\Gamma_y| \ge 2$ заметим, что наличие двух плохих вершин, находящихся рядом с хорошей вершиной, в результате последовательных отражений приводит к следующей ситуации у правого края периодической конфигурации $[Q]_y$ /рис.4 а /.

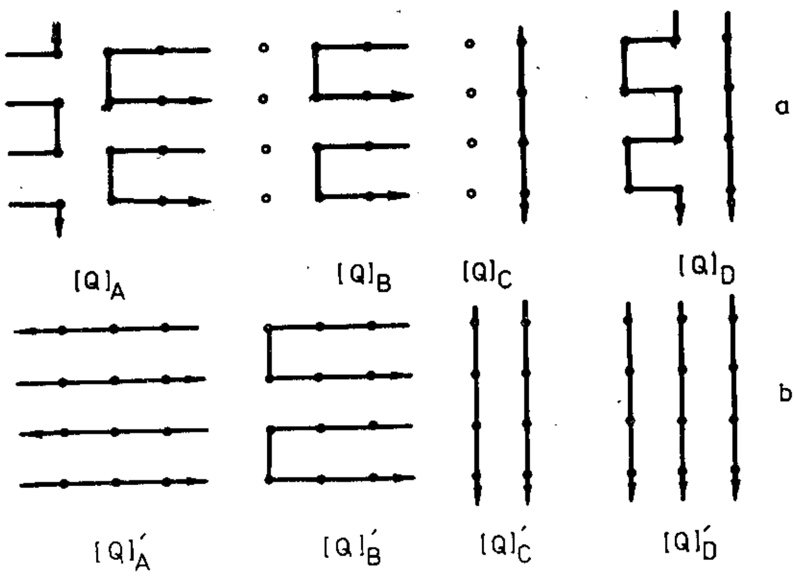
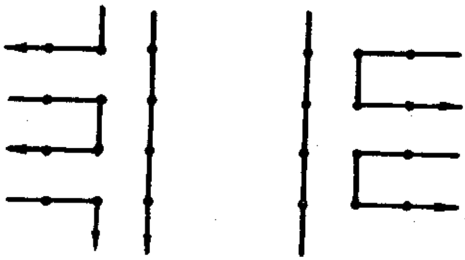


Рис.4



$[Q]_E$ $[Q]_F$

Рис.5

Во всех этих случаях мы можем заменить одну или две колонки плохих вершин на колонки хороших вершин, не меняя конфигурации окружающих вершин /рис.4 б /. Таким образом,

$$\langle [Q] \rangle_\Lambda \le \langle [Q]' \rangle_\Lambda e^{-\beta n 2N\epsilon} ,$$

где n - число замененных колонок / $n = 1$ для случаев B, C и $n = 2$ для случаев A, D /.

В случае $|\Gamma_y| = 1$ Γ_y состоит из единственной вершины типа /5/ или одного из типов /3/, /4/. Колонка вершин типа /5/, получающаяся в результате последовательных отражений, может быть заменена колонкой вершин типа /1/, и ее вероятность, таким образом, не превосходит $\exp(-\beta 2N\epsilon)$. Изолированные вершины типа /3/ и /4/ превращаются в колонки, изображенные на рис.5.

Рассмотрим колонку $[Q]_E$. Все стрелки слева принадлежат одному пути, поэтому можно представить сумму по конфигурациям в корреляторе $\langle [Q]_E \rangle_\Lambda$ в виде частичных сумм по всем возможным вариантам этого пути. Путь однозначно представляется набором чисел $\{k_1, \dots, k_N\}$, $2 \le k_i \le 2M - 2$, соответствующих числу шагов влево /вправо/ на строке $2i(2i-1)$. Если $k_i > k_{i-1}$ $(k_i < k_{i-1})$, на строке $2(i-1)$ /соответственно на строке $2i-1$ / обязательно находится последовательность $|k_i - k_{i-1}|$ вершин типа /5/. В каждой строке слева от вертикального полимера имеется конфигурация R_y вершин, состоящая либо из прямолинейного участка пути с двумя поворотами, либо, дополнительно к ним, из $|k_i - k_{i-1}|$ вершин типа /5/. Вероятность данного набора $\{k_1, \dots, k_N\}$ меньше $\langle \prod_{y=1}^{2N} R_y \rangle$. Оценка /1/ для этого коррелятора дает

$$\langle \prod_{y=1}^{2N} R_y \rangle \le \prod_{y=1}^{2N} \langle [R_y] \rangle^{1/2N} ,$$

и мы снова приходим к корреляционной функции периодической конфигурации. Заменяя, как и ранее, все вершины в полосе вершинами типа /1/, мы получим оценку

$$\langle [R_y] \rangle^{1/2N} \le e^{-\beta n y \epsilon} ,$$

где n_y - число указанных выше вершин в строке /2 или $|k_i - k_{i-1}| + 2$ /. Таким образом, окончательно имеем

$$<[Q]_E> \le \sum_{k_1,\dots,k_N=2}^{2M-2} \exp\{-\beta\epsilon \sum_{i=2}^{N} (|k_i - k_{i-1}| + 4)\} \le$$

$$< 2M \sum_{j_1,\dots,j_{N-1}=0}^{\infty} 2^N \exp\{-\beta\epsilon \sum_{i=2}^{N} (j_i + 4)\} = 4M\,[\frac{2e^{-2\beta\epsilon}}{1 - e^{-\beta\epsilon}}]^{N-1} e^{2\beta\epsilon(1-N)} ,$$

где фактор 2^N возник из-за существования различных возможностей выбрать знак перед $(k_i - k_{i-1})$. При $\beta > \log 2/\epsilon$ и достаточно большом $N/\log M$ $<[Q]_E> \le \exp(-2N\beta\epsilon)$, что завершает доказательство.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как уже упоминалось в п.2, при $a = 0$ рассмотренная нами модель решается точно. Решение обнаруживает логарифмическую особенность при значении активности $z = e^{\beta_c \mu} = 1/2$. Эта особенность соответствует фазовому переходу из основного состояния, которое при $\mu < 0$, $0 \le z < z_c$ представляет собой пустую решетку. Основное состояние отделено от возбужденных щелью $2N\mu$, поэтому появление хотя бы одного полимера на решетке сопровождается макроскопическим изменением энергии системы.

При $\mu > 0, a = 0$ точное решение не имеет особенностей. В этом случае основное состояние вырождено и представляет собой плотную упаковку полимеров. Отсутствие фазового перехода при $a = 0$ означает, что истощение основного состояния происходит постепенно при увеличении температуры.

В нашей работе рассмотрен случай $a > 0$, $a + \mu > 0$. При этом основное состояние становится плотной упаковкой прямолинейных полимеров, и ближайшее возбужденное состояние снова оказывается отделенным от основного макроскопической щелью. Именно это обстоятельство и является причиной фазового перехода, существование которого доказано в п.4. Отметим, что доказательство не опирается на факт вырождения основного состояния и справедливо для невырожденного основного состояния в случае свободных граничных условий в направлении оси x .

Нетрудно убедиться в том, что включение внутримолекулярного взаимодействия a при $a + \mu < 0$ сохраняет фазовый переход, проявляющийся в точном решении при $a = 0$. Таким образом, во всей области значений a, μ существует либо один, либо другой фазовый переход при высокой и при низкой плотности соответственно, за исключением области $a < 0$, $\mu > 0$, в которой наше доказательство существования фазового перехода не годится.

Мы благодарны В.А.Загребному и Г.Ненчу за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gruber C., Kunz H. Commun.Math.Phys., 1971, 22, p.133.
2. Heilman O.J., Lieb E.H. Commun.Math.Phys., 1972, 25, p.190.
3. Peierls R. Proc. Cambridge Phil.Soc., 1936, 32, p.477.
4. Lebowitz J.L., Galavotti G.J. Math.Phys., 1971, 12, p.1129.
5. Heilman O.J. Lett. Nuovo Cimento, 1972, 3, p.95.
6. Runnels L.K., Freares B.C. Commun.Math.Phys., 1973, 32, p.191.
7. Fröhlich J. et al. Commun.Math.Phys., 1978, 62, p.1.
8. Heilman O.J., Lieb E.H. J.Stat.Phys., 1979, 20, p.679.
9. Abraham D.B., Heilman O.J. J.Phys.(A), 1980, 13, p.1051.
10. Kasteleyn P.W. J.Math.Phys., 1963, 4, p.287.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1980 года.