сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17-80-452

А.В.Шелест

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕЙ С ТЕРМОСТАТОМ И СЛУЧАЙНЫМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

1980

Шелест А.В. P17-80-452

Об эволюции динамической системы, взаимодействующей с термостатом и случайным внешним полем

Методом Н.Н.Боголюбова дается вывод кинетического уравнения для системы, слабо взаимодействующей с термостатом и случайным внешним полем. Приводится решение полученного приближенного кинетического уравнения для конкретной физической модели: фермион с возбужденным уровнем, слабо взаимодействующий с фермионным термостатом и случайным внешним полем. Показано, что под действием случайного внешнего поля и термостата устанавливается некоторое промежуточное распределение между равнораспределением, отвечающим воздействию только внешнего поля, и распределением Гиббса, отвечающим воздействию только термостата.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1980

Shelest A.V. P17-80-452

I

В классической работе Н.Н.Боголюбова [1] рассматривался вопрос о возникновении стохастического процесса в динамической системе, находящейся под слабым воздействием "большой" системы. Был сформулирован метод, с помощью которого получаются приближенные уравнения типа Фоккера-Планка для непосредственного вычисления вероятностей $P(\alpha)=\overline{\langle\alpha|U|\alpha\rangle}^{\beta}$ наблюдаемых α по их начальным значениям без предварительного определения квантовой плотности $U(\alpha,\beta)$ всей системы в целом. Под β подразумевалась система постоянных величин, возможные значения которых распределены по некоторому вероятностному закону.

В работе [2] методом Н.Н.Боголюбова было получено квантовое кинетическое уравнение для малой подсистемы, слабо взаимодействующей с термостатом, находящимся в состоянии термодинамического равновесия при любом $t \geq 0$, т.е. система величин β распределена по закону Гиббса.

В настоящей работе этим методом дается вывод кинетического уравнения для малой системы S, слабо взаимодействующей с термостатом Σ и испытывающей зависящее от времени слабое возмущение со стороны внешнего случайного поля.

Гамильтониан системы

$$\mathcal{H} = H_0 + H_{s\Sigma} + H_{sf} . \qquad /1/$$

Здесь H_0 - невозмущенный гамильтониан системы, включающий в себя свободные гамильтонианы S-системы и термостата Σ,

$$H_0 = H_s + H_\Sigma ;$$

$H_{s\Sigma} \sim \epsilon$ - гамильтониан взаимодействия S-системы с термостатом Σ; $H_{sf} \sim \epsilon$ - гамильтониан взаимодействия S-системы со случайным внешним полем, которое для простоты выбираем в виде

$$H_{sf} = f(t) \cdot V_s .$$

Оба гамильтониана взаимодействия пропорциональны малому параметру ϵ, т.е. считаются малыми по сравнению с H_0.

Исходим из обратимого уравнения Неймана для квантовой плотности всей системы:

$$i\frac{\partial U(t)}{\partial t} = [\,\mathcal{H}\,;\,U(t)]. \qquad /2/$$

В представлении взаимодействия

$$i\frac{\partial D(t)}{\partial t} = \Lambda_1(t)\,D(t)\,, \qquad /3/$$

где $\Lambda_1(t) = \Lambda_{s\Sigma}(t) + f(t)\Lambda_V(t)$ - возмущенная часть оператора Лиувилля,

$$\Lambda_{s\Sigma}(t)\,D(t) \equiv [H_{s\Sigma}(t)\,; D(t)]\,,$$

$$\Lambda_v(t)\,D(t) \equiv [V_s(t)\,; D(t)]\,,$$

$$H_{s\Sigma}(t) = e^{iH_0t}\,H_{s\Sigma}\,e^{-iH_0t}\,, \qquad /4/$$

$$V_s(t) = e^{iH_0t}\,V_s\,e^{-iH_0t}\,,$$

$$D(t) = e^{iH_0t}\,U(t)\,e^{-iH_0t}\,.$$

Интегрируя /3/, получаем:

$$D(t) = D(0) - i\int_0^t dt'\Lambda_1(t')D(t')\,. \qquad /5/$$

Вводим плотность вероятности всей системы, усредненную по параметрам внешнего поля:

$$\sigma(t) = \overline{D(t)}^{f}\,. \qquad /6/$$

За начальный момент времени выбрано $t = 0$, когда внешнее поле еще не включено,

$$\sigma(0) = \overline{D(0)}^{f} = D(0)\,.$$

С учетом этого начального условия уравнение /5/ преобразуется следующим образом:

$$D(t) = \sigma(t) + i\int_0^t dt'\langle\Lambda_1(t')D(t')\rangle_f - i\int_0^t dt'\Lambda_1(t')D(t')\,.$$

Методом итераций с точностью до членов первого порядка малости по взаимодействию получаем:

$$D(t) = \sigma(t) - i\int_0^t dt' f(t')\Lambda_v(t')\sigma(t')\,. \qquad /7/$$

Здесь предполагалось, что $\langle f(t)\rangle_f = 0$ в силу случайности внешнего поля.

Возвращаемся к дифференциальному уравнению, усредняя /3/ по полю и используя первое приближение /7/:

$$i\frac{\partial\sigma(t)}{\partial t} = \Lambda_{s\Sigma}(t)\,\sigma(t) - i\int_0^t \langle f(t)\,f(t')\rangle_f\,\Lambda_v(t)\,\Lambda_v(t')\sigma(t')\,.$$

После перехода к прежнему представлению

$$\sigma(t) = \overline{D(t)}^{f} = e^{iH_0t}\,\overline{U(t)}^{f}\,e^{-iH_0t} \qquad /8/$$

получим:

$$i\frac{\partial\,\overline{U(t)}^{f}}{\partial t} = [H_0\,;\,\overline{U(t)}^{f}\,] + \Lambda_{s\Sigma}\,\overline{U(t)}^{f} -$$

$$- i\int_0^t dt'\langle f(t)\,f(t')\rangle_s\,\Lambda_v\,\Lambda_v(z)\,e^{-iH_0z}\,\overline{U(t)}^{f}\,e^{iH_0z}\,.$$

Здесь

$$\Lambda_v(z) = e^{-iH_0z}\,\Lambda_v\,e^{iH_0z} = [\,e^{-iH_sz}\,V_s\,e^{iH_sz}\;;\ldots]\,. \qquad /9/$$

Введем плотность вероятности $\rho^s(t)$ пробной системы s, т.е. усредненную плотность всей системы $U(t)$ по параметрам внешнего поля и термостата Σ:

$$\rho^s(t) = \mathop{\mathrm{Sp}}_{(\Sigma)}\{\,\overline{U(t)}^{f}\,\}\,. \qquad /10/$$

В начальный момент времени $t = 0$, когда отсутствует взаимодействие между s- и Σ-системами,

$$\overline{U(0)}^{f} = \rho^s(0)\cdot\rho_\Sigma(0)\,.$$

Влиянием малой системы на термостат пренебрегаем, поэтому при любом $t \geq 0$ термостат находится в состоянии термодинамического равновесия:

$$\rho_\Sigma(0) = \rho_\Sigma(t) = k\,e^{-H_\Sigma/\theta}\,; \qquad \mathop{\mathrm{Sp}}_{(\Sigma)}\rho_\Sigma = 1\,.$$

При $t \neq 0$ введем приближение

$$\overline{U(t)}^{f} = \rho^s(t)\cdot\rho_\Sigma(t) + U^{(1)}_{s\Sigma}(t)\,, \qquad /11/$$

где $U^{(1)}_{s\Sigma}(t)$ - малая добавка, характеризующая наличие слабого взаимодействия между малой системой и термостатом.

С учетом новых обозначений, ограничиваясь членами второго порядка малости по взаимодействию, получим:

$$i\frac{\partial\rho^s(t)}{\partial t}=[H^e_s;\rho^s(t)]+\mathop{Sp}_{(\Sigma)}[\Gamma;\,U^{(1)}_{s\Sigma}(t)]- \qquad /12/$$

$$-i\int_0^t dt'\langle f(t)\,f(t')\rangle_f\,\Lambda_v\Lambda_v(z)\,e^{-iH_s z}\,\rho^s(t')\,e^{iH_s z}\;.$$

Здесь

$$H^e_s=H_s+\overline{H_{s\Sigma}}^{(\Sigma)};\quad \Gamma=H_{s\Sigma}-\overline{H_{s\Sigma}}^{(\Sigma)};\quad \overline{H_{s\Sigma}}^{(\Sigma)}=\mathop{Sp}_{(\Sigma)}\{H_{s\Sigma}\cdot\rho_\Sigma\}\,,$$

кроме того, учтено, что $\mathop{Sp}_{(\Sigma)}[\Gamma;\rho_\Sigma]=0$. Используя /11/,/12/ и /2/, находим в первом порядке по взаимодействию малую добавку $U^{(1)}_{s\Sigma}(t)$:

$$U^{(1)}_{s\Sigma}(t)=-i\int_0^t d\tau\, e^{-iH^e_0(t-\tau)}\,[\Gamma;\rho^s_\tau\rho_\Sigma]\,e^{iH^e_0(t-\tau)}\;. \qquad /13/$$

С учетом /13/ получим уравнение для плотности вероятности малой системы, в которое уже не входит статистический оператор $U(t)$ всей системы в целом:

$$i\frac{\partial\rho^s(t)}{\partial t}=[H_s;\rho^s_t]-i\mathop{Sp}_{(\Sigma)}\{\Lambda_{s\Sigma}\int_0^t d\tau\,\Lambda_{s\Sigma}(z)\,e^{-iH_s z}\,\rho^s_\tau\, e^{iH_s z}\,\rho_\Sigma - \qquad /14/$$

$$-i\int_0^t d\tau\langle f(z)\,f(0)\rangle_f\,\Lambda_v\Lambda_v(z)\,e^{-iH_s z}\,\rho^s_\tau\, e^{iH_s z}\;.$$

Это уравнение записано уже в предположении, что $\overline{H_{s\Sigma}}^{(\Sigma)}=0$. Символически это уравнение можно записать в виде:

$$i\frac{\partial\rho^s(t)}{\partial t}=[H_s;\rho^s_t]-i\int_0^t\hat R(z)\,e^{-iH_s z}\,\rho^s_\tau\, e^{iH_s z}\,d\tau. \qquad /15/$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial\rho^s_t}{\partial t}=\frac{[H_s;\rho^s_t]}{i}-Q(\epsilon^2),$$

$$\rho^s_t\simeq e^{-iH_s t}\,C^s_t\,e^{iH_s t},$$

$$\frac{\partial C^s_t}{\partial t}\sim Q(\epsilon^2);\qquad C^s_t\simeq \text{const}.$$

Нетрудно убедиться,что при условии,что $\hat R(t-\tau)\to 0$ при $z=t-\tau\to\infty$, можно пренебречь запаздыванием, т.е. $\int_0^t d\tau\hat R(z)\,e^{-iH_s t}\,C^s_\tau\, e^{iH_s t}\to\int_0^\infty dz\,\hat R(z)\cdot\rho^s_t$.

В пренебрежении запаздыванием кинетическое уравнение для малой системы окончательно запишется следующим образом:

$$i\frac{\partial\rho^s_t}{\partial t}=[H_s;\rho^s_t]-$$

$$-i\mathop{Sp}_{(\Sigma)}\{[H_{s\Sigma};[\int_0^\infty H_{s\Sigma}(z)\,dz;\rho_\Sigma\,\rho^s_t]]\}- \qquad /16/$$

$$-i\int_0^\infty\langle f(z)\,f(0)\rangle_f\,[V_s;[V_s(z);\rho^s_t]]\,dz.$$

II

В работах [2] и [3] на простых моделях с помощью приближенных кинетических уравнений, полученных для малой системы, взаимодействующей с термостатом, был проиллюстрирован процесс приближения к статистическому равновесию в системах, слабо взаимодействующих с термостатом.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение модельной системы, взаимодействующей с фермионным термостатом и внешним случайным полем. В качестве пробной S-системы рассмотрим фермион с возбужденным уровнем

$$H_s=\sum_{i=1}^{2}\omega_i a^+_i a_i\;.$$

Термостат состоит из бесконечно большого числа фермионов:

$$H_\Sigma=\sum_k\Omega_k c^+_k c_k\;.$$

Гамильтониан взаимодействия пробного фермиона с термостатом:

$$H_{s\Sigma}=\frac{\epsilon}{\sqrt V}\sum_{p,i,j}g^{ij}_p\,(c^+_p+c_p)\,a^+_i a_j\;.$$

Гамильтониан взаимодействия фермиона с внешним полем:

$$H_{sf}=f(t)\,V_s=\epsilon\sum_{i\neq j}f(t)\,(a^+_i a_j+a^+_j a_i)\;.$$

Для данной модели

$$\overline{H_{s\Sigma}}^{(\Sigma)}=\mathop{Sp}_{(\Sigma)}\{H_{s\Sigma}\cdot\rho_\Sigma\}=0;\quad H^e_s=H_s;\quad \Gamma=H_{s\Sigma}\;.$$

Следовательно, можно использовать уравнение /16/,в котором

$$V_s=a^+_1a_2+a^+_2a_1\;,$$

$$V_s(z)=e^{iH_s z}\,V_s\,e^{-iH_s z}=e^{i\Omega_{21}z}\,a^+_1a_2+e^{-i\Omega_{21}z}\,a^+_2a_1\,,$$

$$H_{s\Sigma}(z)=e^{iH_0z}H_{s\Sigma}e^{-iH_0z}=\frac{\epsilon}{\sqrt{V}}\sum_{i,j,p}g_p^{ij}e^{i(\omega_j-\omega_i)}\times$$

$$\times(c_p^+e^{-i\Omega_pz}+c_pe^{i\Omega_pz})a_i^+a_j;\quad \Omega_{21}=\omega_2-\omega_1=-\Omega_{12}.$$

Нас будут интересовать матричные элементы матрицы плотности

$$\rho^s(t)=\begin{pmatrix}\rho^s_{00} & \rho^s_{01} & \rho^s_{02}\\ \rho^s_{10} & \rho^s_{11} & \rho^s_{12}\\ \rho^s_{20} & \rho^s_{21} & \rho^s_{22}\end{pmatrix},$$

где

$$\rho^s_{11}(t)=\langle 1^{(1)}|\rho^s(t)|1^{(1)}\rangle \quad \text{и} \quad \rho^s_{22}(t)=\langle 1^{(2)}|\rho^s(t)|1^{(2)}\rangle \; -$$

– вероятности нахождения пробной частицы в состояниях /1/ и /2/ соответственно; $\rho^s_{12}(t)$ и $\rho^s_{21}(t)$ – вероятности переходов из одного состояния в другое. При вычислении матричных элементов в правой части уравнения /16/ учитываем, что промежуточные состояния α и α' принимают значения $0, 1^{(1)}$ и $1^{(2)}$. Например:

$$\langle 1^{(1)}|V_sV_s(z)\rho^s(t)|1^{(1)}\rangle=$$

$$=\sum_{\alpha,\alpha'=0,1^{(1)},1^{(2)}}\langle 1^{(1)}|a_1^+a_2+a_2^+a_1|\alpha\rangle\langle\alpha|e^{i\Omega_{21}z}a_1^+a_2+$$

$$+e^{-i\Omega_{21}z}a_2^+a_1|\alpha'\rangle\langle\alpha'|\rho^s(t)|1^{(1)}\rangle=e^{-i\Omega_{21}z}\rho^s_{11}(t).$$

Для $\rho^s_{22}(t)$ получим:

$$\frac{\partial\rho^s_{22}(t)}{\partial t}=\frac{\epsilon^2}{V}\sum_p g_p^{12}g_p^{21}\int_{-\infty}^{\infty}dz\{\bar n_pe^{i(\Omega_{21}-\Omega_p)z}+$$

$$+(1-\bar n_p)e^{i(\Omega_{21}+\Omega_p)z}\}\rho^s_{11}(t)-\frac{\epsilon^2}{V}\sum_p g_p^{12}g_p^{21}\int_{-\infty}^{\infty}dz\{\bar n_pe^{i(\Omega_{21}+\Omega_p)z}+$$

$$+(1-\bar n_p)e^{i(\Omega_{21}-\Omega_p)z}\}\rho^s_{22}(t)-\epsilon^2\int_0^{\infty}dz\langle f(z)f(0)\rangle_f\times$$

$$\times\{(e^{-i\Omega_{21}z}+e^{i\Omega_{21}z})\rho^s_{11}(t)-(e^{-i\Omega_{21}z}+e^{i\Omega_{21}z})\rho^s_{22}(t),$$

где

$$\bar n_p=\underset{(\Sigma)}{Sp}\,c_p^+c_{p'}\cdot\rho_\Sigma=\bar n_p\cdot\delta_{pp'}=\frac{e^{-\Omega_p/\theta}}{1+e^{-\Omega_p/\theta}}.$$

Вводим обозначения:

$$J(\Omega_{21})=\int_0^{\infty}dz\langle f(z)f(0)\rangle_f\cos(\Omega_{21}z)$$

и /после перехода к непрерывному спектру в термостате/

$$\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec p\,g_p^{12}g_p^{21}\int_{-\infty}^{\infty}dz\,e^{i(\Omega_{12}-\Omega_p)z}\cdot\bar n_p=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec p\,g_p^{12}g_p^{21}\delta(\Omega_{12}-\Omega_p)\bar n_p=I(|\Omega_{12}|)\frac{e^{-\Omega_{21}/\theta}}{1+e^{-\Omega_{21}/\theta}}.$$

В новых обозначениях уравнение /16/ имеет вид:

$$\frac{\partial\rho^s_{22}(t)}{\partial t}=\epsilon^2\{\frac{I(|\Omega_{12}|)}{1+e^{-\Omega_{12}/\theta}}+2J(\Omega_{21})\}\rho^s_{11}(t)- \qquad /17/$$

$$-\epsilon^2\{\frac{I(|\Omega_{12}|)}{1+e^{-\Omega_{21}/\theta}}+2J(\Omega_{21})\}\rho^s_{22}(t).$$

Аналогичным образом находим уравнение для $\rho^s_{11}(t)$. Оказывается, что

$$\frac{\partial\rho^s_{11}(t)}{\partial t}=-\frac{\partial\rho^s_{22}(t)}{\partial t}. \qquad /18/$$

Следовательно, для данной модели выполняется условие сохранения числа частиц:

$$\rho^s_{11}(t)+\rho^s_{22}(t)=\text{const}.$$

Обозначим коэффициенты, стоящие при $\rho^s_{11}(t)$ и $\rho^s_{22}(t)$ в уравнении /17/, через A и B соответственно.

$$\frac{\partial\rho^s_{22}(t)}{\partial t}=-A\rho^s_{22}(t)+B\rho^s_{11}(t). \qquad /19/$$

Решая совместно /18/ и /19/, получаем

$$\rho^s_{22}(t)=\frac{B}{A+B}+(\rho^s_{22}(0)-\frac{B}{A+B})e^{-(A+B)t},$$

$$\rho^s_{11}(t)=\frac{A}{A+B}+(\rho^s_{11}(0)-\frac{A}{A+B})e^{-(A+B)t}.$$

При $t \to \infty$

$$\frac{\rho^s_{11}(t\to\infty)}{\rho^s_{22}(t\to\infty)} = \frac{A}{B} = \frac{\dfrac{2J(\Omega_{21})}{I(|\Omega_{12}|)} + \dfrac{1}{1+e^{(\omega_2-\omega_1)/\theta}}}{\dfrac{2J(\Omega_{21})}{I(|\Omega_{12}|)} + \dfrac{e^{(\omega_2-\omega_1)/\theta}}{1+e^{(\omega_2-\omega_1)/\theta}}} . \qquad /20/$$

Если $J/I \ll 1$, т.е. внешнее поле слабее, чем взаимодействие с термостатом, то /при $\omega_2 > \omega_1$ /

$$\frac{\rho^s_{11}}{\rho^s_{22}} \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{e^{-\omega_1/\theta}}{e^{-\omega_2/\theta}} .$$

Если $J/I \gg 1$, т.е. поле сильнее взаимодействия с термостатом, то

$$\frac{\rho^s_{11}}{\rho^s_{22}} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1 .$$

Таким образом, мы получили решение приближенного кинетического уравнения для модели фермиона с возбужденным уровнем, взаимодействующего с термостатом и внешним случайным полем. На асимптотическом пределе $t\to\infty$ это решение описывает необратимую эволюцию матрицы плотности. Это асимптотическое распределение стремится либо к равнораспределению по энергетическим уровням, когда внешнее поле много сильнее взаимодействия с термостатом, либо к распределению Гиббса по этим уровням, когда взаимодействие с термостатом много сильнее взаимодействия с внешним полем.

В заключение хотелось бы выразить глубокую признательность академику Н.Н.Боголюбову за полезные обсуждения и интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н. Записки кафедры математической физики АН УССР. Изд-во АН УССР, Киев, 1939.
2. Шелест А.В. ОИЯИ, Р -2868, Дубна, 1966.
3. Шелест А.В. Препринт ИТФ АН УССР, 67-11, Киев, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1980 года.