

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

3409/
2-80

28/7-80

P17-80-180

В.А.Шведовский

ЗАВИСИМОСТЬ ЭНТРОПИИ БИЛЬЯРДОВ
ОТ ТОПОЛОГИИ ОБЛАСТИ

(Случай квадрата и тора)

1980

Постановка задачи

Пусть K^2 и T^2 соответственно квадрат и двумерный тор одинаковых размеров - $a \times a$. Внутри каждой из этих областей находится по диску массы m и радиуса R , каждый из которых может равномерно двигаться только вдоль вертикали $x = \frac{a}{2}$. Кроме диска как в K^2 , так и в T^2 задана материальная точка (x_i, y_i) массы m , движущаяся между соударениями с диском или с границами области прямолинейно и равномерно и имеющая две свободы движения x, y .

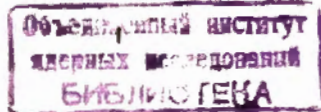
Диск и материальная точка сталкиваются по законам упругого удара. Координатными пространствами Q для динамических систем в K^2 и T^2 служат соответственно трехмерный куб и трехмерный тор за вычетом вырезанного цилиндра

$$(x_i - \frac{a}{2})^2 + (y_i - y_2)^2 = R^2,$$

где y_2 - текущая координата центра тяжести диска, x_i, y_i - координаты материальной точки при ее соударении с диском.

Фазовое пространство M рассматриваемых консервативных динамических систем получается на основе указанных координатных пространств как ограничение касательного пучка трехмерного куба и трехмерного тора на Q , при этом $\dim M = 5$. Инвариантным фазовым объемом в M является $d\mu = dq \cdot d\omega$, где $d\omega$ - инвариантная мера на двумерной сфере $S^{(2)}(q)$, являющейся слоем над $q \in Q$.

Ставится задача о вычислении $\Delta h = h(K^2) - h(T^2)$ -разницы энтропий описанных динамических систем. Для случая, когда диск неподвижен^[1,4], можно доказать, что $\Delta h = 0$.



Определяющие соотношения

Для положения, изображенного на рис.1б запишем:

$$L_1 \cos(\varphi_0 + \theta_1) - [a \cdot n - R \cos \theta_1] = R \cos \theta_2, \\ L_2 \sin(\varphi_0 + \theta_1) - [L_2 + 2Rm - R \sin \theta_1] = R \sin \theta_2, \quad (I)$$

$$v_{10} \sin(\varphi_0 + \theta_1) \pm v_{20}^{**} = v_{21} + v_{11} \sin(\theta - \varphi_2)^{**}$$

$$\theta_1 - \varphi_2 - \frac{\pi}{2} = \arctg \frac{v_{10} \sin(\varphi_0 + \theta_1)}{v_{10} \cos(\varphi_0 + \theta_1) - v_{20}^{**}}$$

$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{v_{20}^{**}}{v_{20}^{**}}; \quad v_{10}^2 + v_{20}^2 = v_{11}^2 + v_{21}^2 = e$$

$$d\theta_1 = 0, \quad dv_{10} = dv_{20} = 0,$$

$$\varphi_1 - \varphi_0 + \theta_2 - \theta_1 = \pi,$$

v_{10} - скорость материальной точки до 2-го соударения;

v_{20} - скорость диска до 2-го соударения;

v_{11}, v_{21} - скорости после 2-го соударения;

e - постоянная, равная при $m_1 = m_2 = 1$ удвоенной энергии в динамической системе;

L_1 - расстояние, пройденное лучом между 1-м и 2-м соударениями;

L_2 - расстояние, пройденное диском между 1-м и 2-м соударениями;

n, m - числа пересечений траекторией соответственно вертикальных и горизонтальных образующих решетки.

Из этих определяющих соотношений для случаев $\textcircled{++}$ и $\textcircled{+-}$ в ситуации с минусом получаем выражения для коэффициента растяжения, записываемого как

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} = \frac{L_1}{R} \cdot \frac{v_{20}^{**} \cdot \sin(\varphi_0 + \theta) - 1}{v_{10} \left[\frac{L_1}{R} \sin(\varphi_0 + \theta_1) - \frac{L_1}{R} \frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} - 2 + \sin \theta_1 \right] - \cos(\varphi_0 + \theta - \theta_2)} + \\ + \frac{v_{10} \cdot v_{20} \cos^2(\varphi_0 + \theta_1)}{v_{11}^2 \left[2 - \frac{v_{20}^{**}}{v_{21}} - \frac{v_{20}^{**}}{v_{21}} \sin(\varphi_0 + \theta_1) \right] \left[\sin(\varphi_0 + \theta_1) + \frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} - \frac{v_{21}}{v_{10}} \right]} \quad (2)$$

*/Отвечает ситуации соударения: когда две составляющие вектора скорости по оси \bar{y} имеют одно направление $\textcircled{++}$.

"-" - отвечает ситуации, когда проекция вектора скорости луча такая, как на рис.1б; "+" - противоположной ситуации.

$$- \frac{\sin(\varphi_0 + \theta_1)}{\sin(\varphi_0 + \theta_1) + \frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} - \frac{v_{21}}{v_{10}}} = \textcircled{I} + \textcircled{II} - \textcircled{III}, \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} = \frac{L_1}{R} \cdot \frac{\frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} \sin(\varphi_0 + \theta_1) - 1}{\frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} \left[\frac{L_1}{R} \sin(\varphi_0 + \theta) - \frac{L_1}{R} \frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} - 2 + \sin \theta_1 \right] - \cos(\varphi_0 + \theta - \theta_2)} - \\ - \frac{v_{10} v_{20} \cos^2(\varphi_0 + \theta_1)}{v_{11}^2 \left[2 + \frac{v_{20}^{**}}{v_{21}} - \frac{v_{20}^{**}}{v_{21}} \sin(\varphi_0 + \theta_1) \right] \left[\sin(\varphi_0 + \theta_1) - \frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} - \frac{v_{21}}{v_{10}} \right]} \quad (3) \\ - \frac{\sin(\varphi_0 + \theta_1)}{\sin(\varphi_0 + \theta_1) - \frac{v_{20}^{**}}{v_{10}} - \frac{v_{21}}{v_{10}}} = \textcircled{I} - \textcircled{II} - \textcircled{III}.$$

В случае, когда диск неподвижен, т.е. $v_{20} = v_{21} = 0$, выражения (2) и (3) переходят в (4), полученные Н.С.Крыловым^{/3/}:

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_0} = \frac{L_1}{R} \cdot \frac{1}{\cos(\varphi_0 + \theta_1 - \theta_2)} - 1. \quad (4)$$

К процедуре вычисления энтропии динамической системы

В теории классических динамических систем - см., например,^{/2/} энтропия вычисляется на основе касательных преобразований:

$$\bar{h} = \lim_{\ell \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\ell'}{\ell} \right), \quad \ell \rightarrow 0, \quad (5)$$

где ℓ' и ℓ - длина касательного вектора после и до преобразования; черта над выражением означает усреднение по числу соударений, реализующих преобразование, т.е.

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lim_{\ell \rightarrow 0} \ln \left(\frac{\ell'_i}{\ell} \right). \quad (6)$$

Очевидно, что ядром процедуры вычисления энтропии является вычисление локального изменения кривизны оснащенного отрезка (лемма 2.2 в работе^{/5/}). И рассеивающий характер бильярдов проявляется именно в каждом соударении. Как ранее было упомянуто, величине этого рассеивания называется коэффициентом растяжения.

Тогда энтропия динамической системы зависит от коэффициента растяжения по процедуре (5).

В нашей работе воспользуемся процедурой, позволяющей построить оценку коэффициента растяжения, разработанную в [3].

Рассмотрим два последовательных соударения материальной точки с движущимся диском (см. рис. 1а и б)

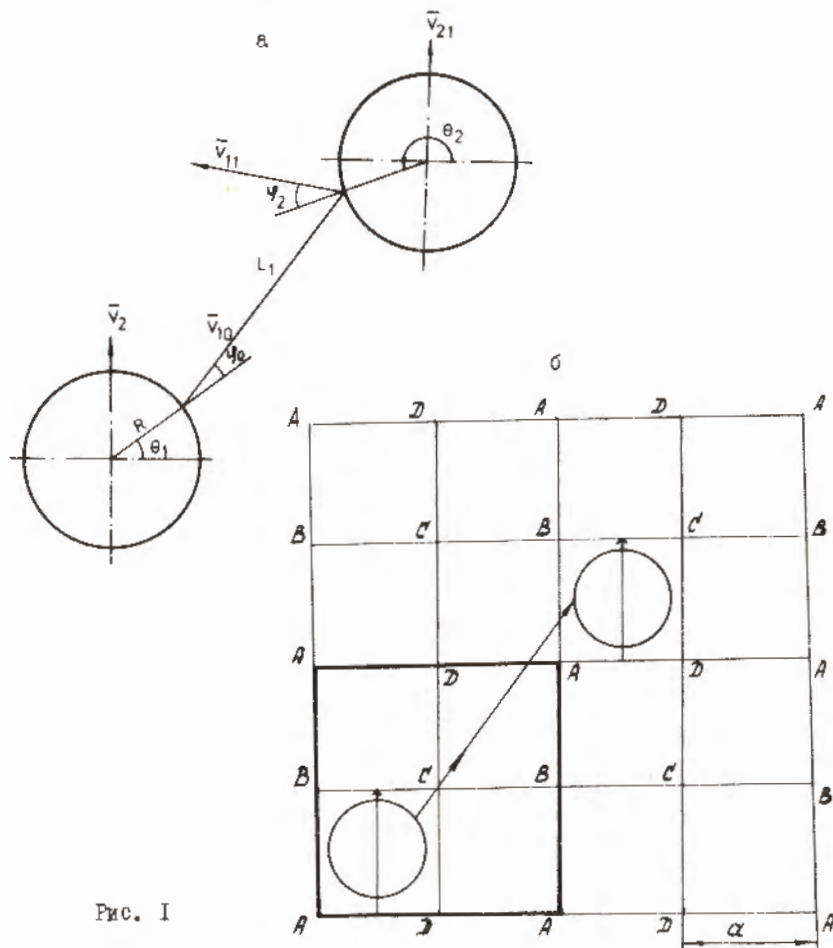


Рис. 1

На рис. 1а показана одна из возможных траекторий, возникающих при соударении материальной точки с подвижным диском. Эти возможности будут отражены в определяющих соотношениях. Для определенности рассуждения на рис. 1б рассмотрено некоторое общее положение для 2 последовательных соударений. С теоретико-групповой точки зрения на рис. 1б изображено положение, представляющее множество классов эквивалентностей с точностью по модулю групповой операции, образующей из исходного квадрата ABCD решетку на плоскости.

Напомним, что по аналогии с (5) в данном случае

$$h_{n \rightarrow \infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \lim_{\Delta \Psi \rightarrow \infty} \frac{\Delta \Psi_{i+2}}{\Delta \Psi_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_i}, \quad \Delta \Psi \rightarrow \infty, \quad (7)$$

$$\text{т.е. } h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n'} \frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_{i,1}} + \sum_{i=0}^{n''} \frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_{i,2}} \right).$$

Но тогда результат зависит от того, в какой пропорции в сумму будут входить

$$\frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_{i,1}} = \underline{\text{I}} + \underline{\text{II}} - \underline{\text{III}} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_{i,2}} = \underline{\text{I}} - \underline{\text{II}} + \underline{\text{III}}. \quad (8)$$

Поскольку первые члены $\frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_i}$ одинаковы как в случае (2), так и в (3), а третьи члены $= 0$, то определяющим будет поведение второго члена, имеющего разные знаки и величину.

Но если рассмотреть (рис. 2) характер сближения диска и точки для тора, можно заметить, что ситуация сближения может быть только двух родов: и в том и в другом случае присутствуют члены либо только вида $\textcircled{++}$, либо только $\textcircled{--}$ в отличие от квадрата, где в каждом случае есть и $\textcircled{++}$, и $\textcircled{--}$. Обозначим:

$$\sin(\varphi_0 + \theta_1) = \frac{v_{20}}{v_{10}} - \frac{v_{21}}{v_{10}} = S_{\mp}.$$

Для оценки $\Delta h = h(K^2) - h(T^2)$ запишем:

$$h(K^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_{i,1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \frac{\partial \Psi_{i+2}}{\partial \Psi_{i,2}} \quad (9)$$

и соответственно $h(T^2)$.

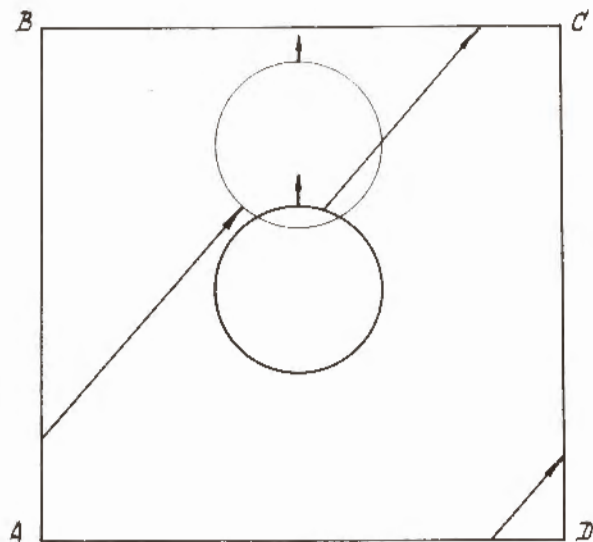


Рис. 2

В итоге после сокращений части членов в силу теоремы 5 (см. /1/) получаем:

$$\Delta h = \left\langle \frac{v_{10} v_{20} \cos^2(\varphi_0 + \theta_1)}{v_{10}^2 \left[2 + \frac{v_{20}}{v_{10}} - \frac{v_{20}}{v_{10}} \sin(\varphi_0 + \theta_1) \right] S_-} \right\rangle - \left\langle \frac{v_{10} v_{20} \cos^2(\varphi_0 + \theta_0)}{v_{10}^2 \left[2 - \frac{v_{20}}{v_{10}} - \frac{v_{20}}{v_{10}} \sin(\varphi_0 + \theta_0) \right] S_+} \right\rangle - \left\langle \frac{\sin(\varphi_0 + \theta_1)}{S_-} \right\rangle - \left\langle \frac{\sin(\varphi_0 + \theta_0)}{S_+} \right\rangle. \quad (10)$$

Выражаю глубокую признательность за помощь в завершении работы и консультации Я.Г.Синаю и В.К.Федяину.

ЛИТЕРАТУРА

1. Синай Я.Г.. К обоснованию эргодической гипотезы для одной динамической системы статистической механики, ДАН, 153, 6 (1963), 1261-1264.

2. Синай Я.Г. Динамические системы с упругими отражениями, УМН, т. XXV, выпуск 2 (152), (1970).
3. Крылов Н.С. Работы по обоснованию статистической физики, изд. АН СССР, 1950.
4. Синай Я.Г. Об одной "физической" системе, имеющей положительную энтропию, Вестник МГУ, 5(1963), 6-12.
5. Синай Я.Г. Известия АН СССР, сер. матем. 30, 15 (1966).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 апреля 1980 года.