

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

67054

171-03

P17-2003-171

Т. А. Кожамкулов¹, Н. С. Серикбаев¹,
А. Д. Кошкинбаев¹, К. Мырзакул¹,
С. К. Сайымбетова¹, Ф. К. Рахимов¹, Р. Мырзакулов²

О НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЯХ
МАГНЕТИКОВ

325.4 + 133.2a

¹Физико-технический институт НАН РК, Алма-Ата, Казахстан

²E-mail: myrzakul@thsunl.jinr.ru, cnlpmyra@satsun.sci.kz

1 Введение

Магнетики представляют собой удобную лабораторию по экспериментальному и теоретическому исследованию нелинейных явлений солитонного типа. В настоящее время существуют многочисленные экспериментальные результаты, свидетельствующие о солитонных возбуждениях различного типа в магнетиках (см. [1]-[2]). С другой стороны, теоретические исследования нелинейных процессов в магнетиках опираются на ряд интегрируемых нелинейных уравнений - нелинейное уравнение Шредингера (НУШ), уравнение sine-Гордона, уравнение Ландау-Лифшица (УЛЛ) и т.д. [3]-[13]. УЛЛ имеет вид [14]

$$S_t = S \wedge S_{xx} + S \wedge JS. \quad (1.1)$$

В то же время характерный представитель обобщенных УЛЛ с самосогласованными потенциалами (УЛЛ-СП), которые рассматриваются в данной работе, может быть записан так:

$$S_t = S \wedge S_{xx} + S \wedge JS + uS_x, \quad (1.2a)$$

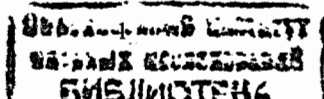
$$\rho u_{tt} = v_0^2 u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxxx} + \lambda(S_x^2)_{xx}. \quad (1.2b)$$

В (1.1) и (1.2) $S = (S_1, S_2, S_3)$ является спиновым вектором (вектор намагниченности), причем $S^2 = 1$, \wedge - обычное векторное произведение, $J = \text{diag}(J_1, J_2, J_3)$ и J_k являются константами анизотропии, u - скалярная действительная функция (потенциал), $\rho, \alpha, \beta, v_0, \lambda$ - действительные константы.

УЛЛ (1.1) имеет наиболее универсальный характер в том смысле, что НУШ и уравнение sine-Гордона получаются из него как предельные случаи, при определенных физических приближениях [10], [14]. Систему типа (1.2) мы называем УЛЛ с самосогласованным потенциалом (УЛЛ-СП). Потенциал удовлетворяет дополнительному уравнению, в нашем случае уравнению (1.2b). Если речь идет об отдельных уравнениях типа (1.2a), мы называем их УЛЛ с потенциалом, т.е. в этом случае потенциал - это некоторая заданная вещественная скалярная функция и для нее нет дополнительных уравнений типа (1.2b).

УЛЛ (1.1) и его различные редукции, в том числе НУШ и уравнение sine-Гордона при различных физических допущениях, описывают магнетики без учета колебания магнитной кристаллической решетки ("жесткие" магнетики), т.е. рассматривается чисто спиновая подсистема без учета его взаимодействия с фононной подсистемой. Вместе с тем, при определенных физических условиях вклад фононной подсистемы в динамику и термодинамику магнетика может оказаться сравнимым с вкладом спиновой подсистемы. В этом случае необходимо учитывать взаимодействия между спиновыми и упругими подсистемами [15]. В результате мы получаем так называемые магнитоупругие, или, по другой терминологии, спин-фононные системы, которые являются некоторыми обобщенными УЛЛ с потенциалами и с самосогласованными потенциалами (см., например, Приложение Б). В порядке сравнения с чисто спиновой системой (1.1) выше мы привели одну из таких магнитоупругих систем, УЛЛ-СП (1.2).

Между классической дифференциальной геометрией (ДГ) поверхностей и нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных (НДУЧП) существует глубокая связь [16]-[17]. Это обусловлено, в частности, тем, что многие



локальные свойства поверхностей выражаются в терминах НДУЧП. Изучение преобразований таких поверхностей, сохраняющих их геометрические свойства, эквивалентно изучению отображения между соответствующими НДУЧП. Исследование соответствия между поверхностями и связанными с ними НДУЧП полезно по двум причинам. Используя наши знания по решению НДУЧП, можно получить геометрические свойства и даже доказательство существования или отсутствия геометрических структур на соответствующих поверхностях. Обратное, из наших знаний о геометрии поверхностей можно получить решения соответствующего НДУЧП. Связь между ДГ поверхностей и НДУЧП изучается исследователями, начиная с 19-го века. Например, в классических работах Ли, Дарбу, Гурса, Бианки, Бэклунда, Е.Картан заложены фундаменты, устанавливающие глубокую связь ДГ и НДУЧП. Интересно отметить, что многие НДУЧП впервые появились именно в ДГ. Например, знаменитые уравнения Лиувилля и sine-Гордона, имеющие многочисленные физические приложения, по-видимому, впервые возникли в ДГ, а не в физике. Другие НДУЧП также известны в ДГ уже давно. Особый интерес представляют интегрируемые или солитонные НДУЧП, к которым относится и УЛЛ (1.1). Геометрия, ассоциированная с солитонными НДУЧП, называется солитонной, или интегрируемой геометрией [8]-[9], [16]-[20].

Одним из интересных подклассов НДУЧП являются уравнения типа Ландау-Лифшица, которые согласно принятой в литературе терминологии мы будем часто называть также спиновыми системами [8]-[9]. Связь спиновых систем и ДГ поверхностей ранее исследовалась многими авторами в (1+1)-размерности (см, например, [21], [22]). В работах [23]-[28] была изучена взаимосвязь геометрии поверхностей и кривых и многомерных интегрируемых спиновых систем (см. также книги [8], [9]).

Данная работа посвящена исследованию геометрии и интегрируемости различных обобщенных УЛЛ, в основном с потенциалами и самосогласованными потенциалами типа (1.2). При этом мы ограничиваемся рассмотрением случая (1+1)-размерности.

Кратко остановимся на содержании работы. В разделе 2 даны примеры вывода нелинейных непрерывных уравнений "жестких" и упругих магнетиков. В разделе 3 установлена связь спиновых систем с дифференциальной геометрией поверхностей. С использованием этой связи найдены так называемые лакшманановы эквиваленты (L-эквиваленты) обобщенных УЛЛ. Раздел 4 посвящен построению нового класса двумерных поверхностей, связанных с стационарными версиями (2+1)-мерных спиновых систем. Краткому обсуждению полученных результатов посвящен раздел 5. Списки некоторых дискретных и непрерывных обобщенных классических моделей ферромагнетика Гейзенберга вынесены в Приложения А и Б.

Обозначения. В данной работе рассматриваются некоторые числа спиновых систем, для различения которых мы используем условные обозначения типа уравнения M-IX, уравнения M-XXXIV и т.д. (о наших обозначениях и терминологии см. [23]-[29], [48]-[51]). Например, согласно нашей терминологии, система (1.2) есть уравнение M-XXXV с полной анизотропией.

2 Вывод уравнения Ландау - Лифшица в случае "жестких" и упругих ферромагнетиков

В этом разделе мы дадим вывод непрерывных нелинейных уравнений ферромагнетиков исходя из соответствующего классического аналога квантовой модели Гейзенберга ферромагнитных спиновых цепочек. Процедура вывода продемонстрирована на двух примерах для "жесткого" и упругого ферромагнитных кристаллов. Некоторые примеры дискретных обобщенных классических моделей упругих ферромагнетиков Гейзенберга приведены в Приложении А.

2.1 Вывод непрерывных моделей "жестких" ферромагнетиков

Прежде всего рассмотрим "жесткие" ферромагнетики, т.е. без учета колебания магнитной кристаллической решетки, и покажем, как выводится УЛЛ (1.1) из соответствующей дискретной модели Гейзенберга. Рассмотрим следующий классический аналог квантовой модели Гейзенберга, ограничившись, для простоты, изотропным случаем

$$\hat{H} = -J \sum_n \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{S}_n - классический трехкомпонентный спиновый вектор, заданный в решеточном узле n , $\mathbf{S}_n^2 = s^2 = \text{const}$; J - однородный обменный интеграл. Определим скобку Пуассона для произвольных функционалов A, B формулой

$$\{A, B\} = \sum_{n=1}^N \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial A}{\partial S_n^\alpha} \frac{\partial B}{\partial S_n^\beta} S_n^\gamma, \quad (2.2)$$

где $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ - полностью антисимметричный тензор Леви - Чивита, $\epsilon_{123} = 1$. Уравнение движения, соответствующее спиновому гамильтониану (2.1), имеет вид

$$\mathbf{S}_{nt} = \{\mathbf{S}_n, \hat{H}\}, \quad (2.3)$$

или

$$\mathbf{S}_{nt} = J \mathbf{S}_n \wedge (\mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{S}_{n+1}). \quad (2.4)$$

Для перехода к непрерывному пределу положим $x = na$, $\mathbf{S}_n(t) \rightarrow \mathbf{S}(na, t) = \mathbf{S}(x, t)$ и используем разложения Тейлора $\mathbf{S}_{n+1} \rightarrow \mathbf{S}(x, t) \pm a \mathbf{S}_x + \frac{a^2}{2} \mathbf{S}_{xx} + \dots$. Тогда из (2.4) после простых масштабных преобразований получим изотропное УЛЛ [30], [31]

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx}. \quad (2.5)$$

2.2 Непрерывные модели упругих магнетиков

Теперь рассмотрим классический аналог квантовой модели Гейзенберга ферромагнитной спиновой цепочки с учетом колебаний решетки

$$\hat{H} = - \sum_{n=1}^N J_n \mathbf{S}_n \cdot \mathbf{S}_{n+1} + \hat{H}_l, \quad (2.6)$$

где $J_n = J_n(|q_{n+1} - q_n|)$, а в качестве гамильтониана фононной подсистемы возьмем потенциал цепочки Тоды

$$\hat{H}_l = \sum_{n=1}^N \left[\frac{p_n^2}{2m} + (e^{-(q_n - q_{n-1})} - 1) \right]. \quad (2.7)$$

Здесь q_n, p_n, m являются координатой, импульсом, массой n -го узла, соответственно. Уравнение движения, соответствующее спиновому гамильтониану (2.6), есть

$$S_{nt}^\alpha = \{S_n^\alpha, \hat{H}\} = \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \hat{H}}{\partial S_n^\beta} S_n^\gamma, \quad (2.8a)$$

$$q_{nt} = \{q_n, \hat{H}\} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial p_n}, \quad (2.8б)$$

$$p_{nt} = \{p_n, \hat{H}\} = -\frac{\partial \hat{H}}{\partial q_n}, \quad (2.8в)$$

или

$$S_{nt} = S \wedge (J_{n-1} S_{n-1} + J_n S_{n+1}), \quad (2.9a)$$

$$q_{nt} = \frac{p_n}{m}, \quad (2.9б)$$

$$p_{nt} = e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{(q_{n+1} - q_n)} + \frac{\partial(J_n S_n S_{n+1})}{\partial q_n} + \frac{\partial(J_{n-1} S_{n-1} S_n)}{\partial q_n}. \quad (2.9в)$$

Таким образом, мы окончательно имеем

$$S_{nt} = S \wedge (J_{n-1} S_{n-1} + J_n S_{n+1}), \quad (2.10a)$$

$$mq_{nt} = e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{(q_{n+1} - q_n)} + \frac{\partial(J_n S_n S_{n+1})}{\partial q_n} + \frac{\partial(J_{n-1} S_{n-1} S_n)}{\partial q_n}. \quad (2.10б)$$

Найдем непрерывный предел системы (2.10) для следующего выбора выражения для обменного интеграла $J_n = J' - J'' q_x$, где J', J'' - некоторые константы. После некоторых простых вычислений и масштабных преобразований получим

$$S_t = \{(\mu - u) S \wedge S_x\}_x, \quad (2.11a)$$

$$\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha (u^2)_{xx} + \beta u_{xxxx} + \lambda (S_x^2)_{xx}, \quad (2.11б)$$

где $\mu, \nu_0, \alpha, \beta, \lambda, \rho$ являются вещественными постоянными, $u = q_x$. Система (2.11) является связанной системой уравнений Ландау - Лифшица и Буссинеска, которая описывает упругие ферромагнетики, при учете колебания кристаллической решетки в ангармоническом приближении. Если учитывать колебания кристаллической решетки в гармоническом приближении, то $\alpha = \beta = 0$ и вместо (2.11) получим систему

$$S_t = \{(\mu - u) S \wedge S_x\}_x, \quad (2.12a)$$

$$\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda (S_x^2)_{xx}. \quad (2.12б)$$

Отметим, что системы (2.11) и (2.12) являются частными случаями изотропных уравнений М-ХЛIII и М-ХЛIV соответственно (см. таблицу 5 из Приложения Б). Если учитывать анизотропию магнитного кристалла, то, например, вместо уравнения (2.11) получаем следующую систему уравнений

$$S_t = \{(\mu - u) S \wedge S_x\}_x + S \wedge JS, \quad (2.13a)$$

$$\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha (u^2)_{xx} + \beta u_{xxxx} + \lambda (S_x^2)_{xx}. \quad (2.13б)$$

В гармоническом пределе спиновая система (2.13) принимает форму

$$S_t = \{(\mu - u) S \wedge S_x\}_x + S \wedge JS, \quad (2.14a)$$

$$\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda (S_x^2)_{xx}. \quad (2.14б)$$

3 Геометрия УЛЛ с потенциалами, L-эквивалентность и интегрируемость

В этом разделе мы изучим связь между ДГ поверхностей и УЛЛ с потенциалами и самосогласованными потенциалами.

3.1 Необходимые сведения из теорий двумерных поверхностей

Прежде всего приведем необходимые факты из классической ДГ двумерных поверхностей и переформулируем их в удобном для нас виде. Рассмотрим двумерную гладкую поверхность в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с локальными координатами x и t . Пусть $r(x, t)$ есть радиус-вектор поверхности. Первая и вторая квадратичные формы поверхности задаются формулами

$$I = dr^2 = E dx^2 + 2F dx dt + G dt^2, \quad (3.1a)$$

$$II = dr \cdot n = L dx^2 + 2M dx dt + N dt^2. \quad (3.1б)$$

Здесь по определению

$$E = g_{11} = r_x^2, \quad F = g_{12} = g_{21} = r_x \cdot r_t, \quad G = g_{22} = r_t^2, \quad (3.2a)$$

$$L = r_{xx} \cdot n, \quad M = r_{tx} \cdot n, \quad N = r_{tt} \cdot n, \quad (3.2б)$$

и

$$n = \frac{r_x \wedge r_t}{|r_x \wedge r_t|} \quad (3.3)$$

есть единичный вектор нормали к поверхности. Уравнение Гаусса-Вейнгартена (УГВ) имеет вид

$$r_{xx} = \Gamma_{11}^1 r_x + \Gamma_{11}^2 r_t + Ln, \quad (3.4a)$$

$$r_{xy} = \Gamma_{12}^1 r_x + \Gamma_{12}^2 r_t + Mn, \quad (3.4б)$$

$$\mathbf{r}_{yy} = \Gamma_{22}^1 \mathbf{r}_x + \Gamma_{22}^2 \mathbf{r}_t + N \mathbf{n}, \quad (3.4\text{в})$$

$$\mathbf{n}_x = P_1^1 \mathbf{r}_x + P_1^2 \mathbf{r}_t, \quad (3.4\text{г})$$

$$\mathbf{n}_t = P_2^1 \mathbf{r}_x + P_2^2 \mathbf{r}_t, \quad (3.4\text{д})$$

где коэффициенты связи Γ_{ij}^k , L , M , N и P_i^j задаются в терминах коэффициентов фундаментальных форм. Введем подвижный ортогональный базис на поверхности (базис Картана)

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_x}{\sqrt{E}}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2. \quad (3.5)$$

Отсюда получим

$$\mathbf{r}_t = \frac{F}{\sqrt{E}} \mathbf{e}_1 - \sqrt{\frac{g}{E}} \mathbf{e}_3,$$

где $g = EG - F^2$. В ортогональном базисе (3.5), УГВ (3.4) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_x = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (3.6\text{а})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}_t = B \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad (3.6\text{б})$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & -\sigma \\ -k & 0 & \tau \\ \sigma & -\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & \omega_3 & -\omega_2 \\ -\omega_3 & 0 & \omega_1 \\ \omega_2 & -\omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Здесь

$$k = \frac{L}{\sqrt{E}}, \quad \tau = -\sqrt{\frac{g}{E}} P_1^2, \quad \sigma = \frac{\sqrt{g}}{E} \Gamma_{11}^2, \quad (3.8\text{а})$$

$$\omega_1 = -\sqrt{\frac{g}{E}} P_2^2, \quad \omega_2 = \frac{\sqrt{g}}{E} \Gamma_{12}^2, \quad \omega_3 = \frac{M}{\sqrt{E}}. \quad (3.8\text{б})$$

Заметим, что при $\sigma = 0$ первое уравнение УГВ (3.6) совпадает с уравнением Серре - Френе для пространственных кривых. В этом случае система (3.6) описывает движущиеся, или деформированные кривые. Условия совместности уравнений (3.6) есть уравнения Гаусса - Майнарди - Кодаци (УГМК)

$$A_t - B_x + [A, B] = 0, \quad (3.9)$$

или в терминах элементов

$$k_t = \omega_{3x} + \tau \omega_2 - \sigma \omega_1, \quad (3.10\text{а})$$

$$\sigma_t = \omega_{2x} + k \omega_1 - \tau \omega_3, \quad (3.10\text{б})$$

$$\tau_t = \omega_{1x} + \sigma \omega_3 - k \omega_2. \quad (3.10\text{в})$$

В следующем разделе мы рассмотрим интегрируемые и неинтегрируемые редукции УГВ (3.6) и УГМК (3.10) на основе единого спинового подхода к НДУЧП (см.

например, [23]-[29]). Ключевым элементом этого подхода является следующее отождествление

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{e}_1. \quad (3.11)$$

Отметим, что аналогичный прием был использован в [30] для доказательства интегрируемости изотропного УЛП (2.5) с помощью теории пространственных кривых. В этой работе было показано, что уравнение (2.5) и НУШ эквивалентны друг другу. Эквивалентность такого типа, т.е. эквивалентность между некоторой спиновой системой и НДУЧП типа НУШ, устанавливаемая с помощью методов дифференциальной геометрии, мы называем лакшманановой эквивалентностью (коротко L-эквивалентностью) (более подробно см., например, [27]). Заметим, что L-эквивалентность не требует знания представления Лакса для спиновой системы или для связанного с ней уравнения типа НУШ. В отличие от L-эквивалентности, в калибровочной эквивалентности знание лаксова представления рассматриваемых НДУЧП обязательно (см. [32]).

3.2 L-эквиваленты некоторых спиновых систем и их интегрируемость

Используя УГВ (3.6) и УГМК (3.10), мы покажем на нескольких примерах, как найти L-эквиваленты (1+1)-мерных спиновых систем. Следует заметить, что данный подход позволяет одновременно с нахождением L-эквивалента также идентифицировать соответствующую поверхность. Иными словами, например, если L-эквивалент интегрируем, то интегрируемы соответствующие спиновая система и поверхность, и наоборот.

Определение. Поверхность называется интегрируемой, если интегрируема соответствующая ей УГМК (3.10).

3.2.1 Случаи "жестких" магнетиков

Рассмотрим конкретные примеры.

и) *Изотропное УЛП.* С педагогической точки зрения удобно начать с простейшего и хорошо известного примера спиновой системы - с изотропного УЛП (2.5). Для того чтобы вложить это уравнение в УГВ (3.6), мы отождествим спиновый вектор \mathbf{S} с единичным вектором \mathbf{e}_1 , согласно формуле (3.11). Тогда уравнение (2.5) примет вид

$$\mathbf{e}_{1t} = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_{1xx}. \quad (3.12)$$

Далее полагая $\tau = f_x$, где f некоторая вещественная функция, мы найдем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_t - \frac{1}{2}(k^2 + \sigma^2) + Z(t), \\ \omega_2 &= -k_x - \tau \sigma, \\ \omega_3 &= \sigma_x - \tau k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь $Z(t)$ - некоторая функция от t (константа интегрирования), которую далее всегда будем полагать равной нулю. Введем комплексную функцию $\varphi = \frac{1}{2}(i\sigma - k)$. Тогда УГМК (3.10) перейдет в НУШ

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi = 0, \quad (3.14)$$

которое, как известно, интегрируемо. В то же время уравнение (3.10в) дает известную формулу

$$\frac{1}{4}|\varphi|^2 = e_{1x}^2 = S_x^2. \quad (3.15)$$

Этот результат означает, что уравнение (2.5) и НУШ (3.15) являются L-эквивалентными друг другу. Зная φ и f , мы можем получить решения соответствующего УГВ (3.6). В частности, используя изоморфизм $so(3) \simeq su(2)$ и беря $f = i\lambda x + i\lambda^2 t$, из УГВ (3.6) мы получаем лаксово представление для НУШ. Отметим, что эквивалентность между уравнениями (2.5) и (3.15) ранее была доказана в [30, 32] с помощью иных методов.

ii) *Деформированное УЛЛ*. В качестве следующего примера рассмотрим спиновую систему [33]

$$S_t = S \wedge S_{xx} + \alpha S_x^2 S_x. \quad (3.16)$$

Это есть так называемая деформированная модель ферромагнетика Гейзенберга. Из (3.6), (3.11) и (3.16) следует, что $\tau = f_x$ и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_t - \frac{1}{2}(k^2 + \sigma^2), \\ \omega_2 &= -k_x - \tau\sigma + \alpha(k^2 + \sigma^2), \\ \omega_3 &= \sigma_x - \tau k + \alpha(k^2 + \sigma^2). \end{aligned} \quad (3.17)$$

В терминах комплексной функции

$$\varphi = \frac{1}{2}(i\sigma - k)e^{\frac{i}{2\alpha}x}$$

и при $f = const$ УГМК (3.10) перейдет в следующее обобщенное НУШ

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - 4i\alpha(|\varphi|^2\varphi)_x = 0. \quad (3.18)$$

Так как уравнение (3.18) интегрируемо [34], то его L-эквивалент (3.16) тоже является интегрируемым. Естественно, что ассоциированная с этими уравнениями поверхность, определяемая выражениями (3.17), также является интегрируемой, по определению.

3.2.2 Случай упругих ("мягких") магнетиков

Теперь найдем L-эквиваленты спиновых систем, описывающих нелинейную динамику упругих магнетиков. Рассмотрим два примера: УЛЛ с потенциалом и УЛЛ-СП.

iii). *Уравнение M-LIII*. Это уравнение есть один из вариантов УЛЛ с потенциалом и записывается в виде (см., таблицу 2 Приложения Б)

$$S_t = S \wedge S_{xx} + u S_x. \quad (3.19)$$

Поступая, как в предыдущих примерах, мы получаем, что для этого уравнения $\tau = f_x$ и

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_t - \frac{1}{2}(k^2 + \sigma^2), \\ \omega_2 &= -k_x - \tau\sigma + u\sigma, \\ \omega_3 &= \sigma_x - \tau k + uk. \end{aligned} \quad (3.20)$$

При этом L-эквивалентом уравнения (3.19) является следующее НУШ с потенциалом

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} + 2|\varphi|^2\varphi - 2i(u\varphi)_x = 0, \quad (3.21)$$

где

$$\varphi = \frac{1}{2}(i\sigma - k).$$

iv) *Уравнение M-XXXIV*. Интересным и пока единственным известным примером интегрируемого УЛЛ-СП является следующая спиновая система

$$S_t = S \wedge S_{xx} + u S_x, \quad (3.22a)$$

$$u_t + 4\eta(S_x^2)_x = 0. \quad (3.22b)$$

Это есть уравнение Мырзакулова XXXIV (M-XXXIV), которое описывает нелинейное взаимодействие спиновой (S) и решеточной (u) подсистем. Для нахождения L-эквивалента (3.22), как в предыдущих случаях, мы используем отождествление (3.11). Это дает нам выражения для нужных нам коэффициентов УГВ (3.6). Из уравнения (3.22) с учетом (3.11) получаем

$$\omega_2 = -k_x - \sigma\tau + u\sigma, \quad (3.23a)$$

$$\omega_3 = \sigma_x - k\tau + uk. \quad (3.23b)$$

Снова считая $\tau = u + f_x$, где $f(x, t, \lambda)$ - вещественная функция и λ - спектральный параметр, находим

$$\omega_1 = f_t - \frac{8\eta + 1}{2}(k^2 + \sigma^2). \quad (3.24)$$

Далее, без потери общности положим $f = const$. Соответствующая УГМК (3.10) в терминах функции

$$\varphi = i\sigma - k, \quad v = -u$$

(после простых масштабных преобразований) примет вид

$$i\varphi_t + \varphi_{xx} - 2\eta|\varphi|^2\varphi + i v_x \varphi + v^2 \varphi = 0, \quad (3.25a)$$

$$v_t - 2\eta(|\varphi|^2)_x = 0. \quad (3.25b)$$

Как известно, система (3.25) является интегрируемой [35], что автоматически доказывает интегрируемость уравнения M-XXXIV (3.22) вследствие L-эквивалентности между этими уравнениями. Одновременно этот результат означает, что поверхность, заданная величинами $k, \tau = u, \sigma$ и ω_i (3.23)-(3.24), является интегрируемой вследствие интегрируемости соответствующей ей УГМК (3.25).

4 Класс поверхностей, связанных со стационарными спиновыми системами

Существуют различные способы построения двумерных поверхностей, вложенных в трехмерное евклидово пространство. Одним из простейших подходов к построению двумерных поверхностей является задание его касательных векторов, т.е. векторов $\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y$. (В этом разделе локальные координаты поверхностей обозначим через x, y). В этом случае вектор нормали и коэффициенты фундаментальных форм определяются автоматически, согласно формулам (3.2) и (3.3). В отличие от существующих в литературе, здесь мы рассматриваем следующие формулы Мырзакулова (ФМ) для касательных векторов (см., например, [47])

$$\mathbf{r}_x = a_1 \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_x + a_2 \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_y + a_3 \mathbf{N}_x + a_4 \mathbf{N}_y + a_5 \mathbf{N}, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{r}_y = b_1 \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_x + b_2 \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_y + b_3 \mathbf{N}_x + b_4 \mathbf{N}_y + b_5 \mathbf{N}, \quad (4.1b)$$

где $\mathbf{N}(x, t)$ - некоторая векторная функция, $a_i(x, t), b_i(x, t)$ - реальные скалярные функции. Единичный вектор нормали задается формулой (3.3). Условия совместности уравнений (4.1) записываются так:

$$(a_{1y} - b_{1x})\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_x + (a_{2y} - b_{2x})\mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_y + (a_1 + b_2)\mathbf{N}_y \wedge \mathbf{N}_x +$$

$$\mathbf{N} \wedge [a_2 \mathbf{N}_{yy} + (a_1 - b_2)\mathbf{N}_{xy} - b_1 \mathbf{N}_{xx}] + (a_{5y} - b_{5x})\mathbf{N} + (a_{3y} - b_5 - b_{3x})\mathbf{N}_x +$$

$$(a_5 + a_{4y} - b_{4x})\mathbf{N}_y + [(a_3 - b_4)\mathbf{N}_{xy} + a_4 \mathbf{N}_{yy} - b_3 \mathbf{N}_{xx}] = 0. \quad (4.2)$$

Далее для простоты мы положим, что $\mathbf{N}^2 = const$. Тогда из (4.2) получим

$$a_{5y} - b_{5x} + \frac{1}{\mathbf{N}^2} \{ (a_1 + b_2)\mathbf{N} \cdot (\mathbf{N}_y \wedge \mathbf{N}_x) + \mathbf{N} \cdot [(a_3 - b_4)\mathbf{N}_{xy} + a_4 \mathbf{N}_{yy} - b_3 \mathbf{N}_{xx}] \} = 0. \quad (4.3)$$

Упростим эти уравнения, полагая

$$a_{1y} - b_{1x} = a_{2y} - b_{2x} = a_3 - b_4 = a_4 = b_3 = 0. \quad (4.4)$$

При этом уравнение (4.2) примет вид

$$(a_1 + b_2)\mathbf{N}_y \wedge \mathbf{N}_x + \mathbf{N} \wedge [a_2 \mathbf{N}_{yy} + (a_1 - b_2)\mathbf{N}_{xy} - b_1 \mathbf{N}_{xx}] + (a_{5y} - b_{5x})\mathbf{N} +$$

$$(a_{3y} - b_5)\mathbf{N}_x + (a_5 - b_{4x})\mathbf{N}_y = 0. \quad (4.5)$$

Отсюда получим

$$\mathbf{N} \wedge [a_2 \mathbf{N}_{yy} + (a_1 - b_2)\mathbf{N}_{xy} - b_1 \mathbf{N}_{xx}] + (a_{3y} - b_5)\mathbf{N}_x + (a_5 - b_{4x})\mathbf{N}_y = 0, \quad (4.6a)$$

$$a_{5y} - b_{5x} + \frac{a_1 + b_2}{\mathbf{N}^2} \{ \mathbf{N} \cdot (\mathbf{N}_y \wedge \mathbf{N}_x) \} = 0. \quad (4.6b)$$

Для нас особый интерес представляет случай, когда

$$\mathbf{N} = \mathbf{S}. \quad (4.7)$$

Тогда уравнение (4.6) превращается в некоторую спиновую систему. В следующих разделах мы рассмотрим некоторые частные случаи формул (4.1) и связанные с ними спиновые системы.

4.1 Спиновая система, связанная с формулой Родрига

Пусть \mathbf{N} является единичным вектором нормали к поверхности, т.е.

$$\mathbf{N} = \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y}{|\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y|} \quad (4.8)$$

и выполняются следующие соотношения

$$a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = b_1 = b_2 = b_3 = b_5 = 0, a_3 = -\rho_1, b_4 = -\rho_2. \quad (4.9)$$

Тогда из (4.1) получим следующие формулы Родрига [36]

$$\mathbf{r}_x = -\rho_1 \mathbf{N}_x, \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{r}_y = -\rho_2 \mathbf{N}_y. \quad (4.10b)$$

Отсюда получим, что \mathbf{N} удовлетворяет уравнению

$$(\rho_1 \mathbf{N}_x)_y - (\rho_2 \mathbf{N}_y)_x = 0. \quad (4.11)$$

Соответствующая спиновая система имеет вид

$$(\rho_1 - \rho_2)\mathbf{S}_{xy} - \rho_{2x}\mathbf{S}_y + \rho_{1y}\mathbf{S}_x = 0. \quad (4.12)$$

4.2 Спиновая система, связанная с формулой Лельёвра

В формулах (4.1) положим

$$a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, a_1 = -\rho, b_2 = \rho. \quad (4.13)$$

С учетом этой формулы (4.1) переходят в известные в дифференциальной геометрии поверхности формулы Лельёвра [36], [37]

$$\mathbf{r}_x = \rho \mathbf{N}_x \wedge \mathbf{N}, \quad (4.14a)$$

$$\mathbf{r}_y = \rho \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_y, \quad (4.14b)$$

которые сводят определение поверхности к отысканию вектора \mathbf{N} . В этом случае вектор \mathbf{N} удовлетворяет уравнению

$$\rho \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_{xy} - \frac{1}{2}(\rho_y \mathbf{N}_x + \rho_x \mathbf{N}_y) \wedge \mathbf{N} = 0. \quad (4.15)$$

Соответствующая спиновая система имеет вид

$$\rho \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xy} - \frac{1}{2}(\rho_y \mathbf{S}_x + \rho_x \mathbf{S}_y) \wedge \mathbf{S} = 0. \quad (4.16)$$

Отметим, что формулы Лельёвра играют важную роль в геометрической теории (2+1)-мерных интегрируемых НДУЧП, в частности они тесно связаны с уравнением Веселова - Нижника - Новикова (см., например, работы [38]-[40]).

4.3 Спиновые системы, связанные с формулой Шифа

В [41] были найдены следующие новые формулы для касательных векторов поверхности

$$\mathbf{r}_x = \rho \mathbf{N}_y \wedge \mathbf{N} + \mu \mathbf{N}_x, \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{r}_y = \rho \mathbf{N} \wedge \mathbf{N}_x + \mu \mathbf{N}_y, \quad (4.17b)$$

которые назовем формулами Шифа. Здесь ρ, μ - некоторые вещественные функции. Отметим, что формулы (4.17) являются частным случаем (4.1) при

$$a_1 = a_4 = a_5 = b_2 = b_3 = b_5 = 0, a_2 = -\rho, a_3 = \mu, b_1 = \rho, b_4 = \mu. \quad (4.18)$$

Соответствующая спиновая система имеет вид [41]

$$(\rho \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x)_x + (\rho \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y)_y + \mu_x \mathbf{S}_y - \mu_y \mathbf{S}_x = 0. \quad (4.19)$$

4.4 Новые примеры поверхностей, связанных со спиновыми системами

В этом подразделе мы хотим выделить различные новые частные случаи формул (4.1) и привести ассоциированные с ними спиновые системы. Как мы увидим ниже, эти частные редукции ФМ (4.1) определяют новый класс поверхностей, генерируемых стационарными вариантами (2+1)-мерных обобщенных УЛП. Перепишем формулы (4.1) в терминах спинового вектора:

$$\mathbf{r}_x = a_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + a_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + a_3 \mathbf{S}_x + a_4 \mathbf{S}_y + a_5 \mathbf{S}, \quad (4.20a)$$

$$\mathbf{r}_y = b_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + b_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + b_3 \mathbf{S}_x + b_4 \mathbf{S}_y + b_5 \mathbf{S}. \quad (4.20b)$$

Условия совместности этих формул дают следующую спиновую систему

$$\begin{aligned} & (a_{1y} - b_{1x}) \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + (a_{2y} - b_{2x}) \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + \mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - \\ & b_1 \mathbf{S}_{xx}] + (a_{3y} - b_5 - b_{3x}) \mathbf{S}_x + (a_5 + a_{4y} - b_{4x}) \mathbf{S}_y + (a_{5y} - b_{5x}) \mathbf{S} + \\ & (a_1 + b_2) \mathbf{S}_y \wedge \mathbf{S}_x + (a_3 - b_4) \mathbf{S}_{xy} + a_4 \mathbf{S}_{yy} - b_3 \mathbf{S}_{xx} = 0. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Отсюда получим

$$a_{5y} - b_{5x} = -(a_1 + b_2) \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_y \wedge \mathbf{S}_x) + \mathbf{S} \cdot [(a_3 - b_4) \mathbf{S}_{xy} + a_4 \mathbf{S}_{yy} - b_3 \mathbf{S}_{xx}]. \quad (4.22)$$

"Полный топологический заряд" определяется формулой

$$Q_{\text{п}} = -(a_1 + b_2) Q + \frac{1}{4\pi} \iint \{ \mathbf{S} \cdot [(a_3 - b_4) \mathbf{S}_{xy} + a_4 \mathbf{S}_{yy} - b_3 \mathbf{S}_{xx}] \}, \quad (4.23a)$$

где

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iint \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y) dx dy \quad (4.23b)$$

есть обычный топологический заряд. Спиновый аналог системы (4.6) имеет вид

$$\mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] + (a_{3y} - b_5) \mathbf{S}_x + (a_5 - b_{4x}) \mathbf{S}_y = 0, \quad (4.24a)$$

$$a_{5y} - b_{5x} = (a_1 + b_2) \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y), \quad (4.24b)$$

который является стационарной версией уравнения M-XIII

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] + (a_{3y} - b_5) \mathbf{S}_x + (a_5 - b_{4x}) \mathbf{S}_y, \quad (4.25a)$$

$$a_{5y} - b_{5x} = (a_1 + b_2) \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.25b)$$

Теперь приведем различные частные случаи спиновой системы (4.24) и соответствующие им ФМ (4.20).

i) Пусть a_3, b_4 являются константами. Тогда система (4.24) перейдет в следующую систему уравнений

$$\mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] - b_5 \mathbf{S}_x + a_5 \mathbf{S}_y = 0, \quad (4.26a)$$

$$a_{5y} - b_{5x} = (a_1 + b_2) \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.26b)$$

ii) Рассмотрим случаи, когда

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, \quad a_5 = b_1 = 1. \quad (4.27)$$

Формулы (4.20) принимают вид (см., например, [21]-[22])

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{S}, \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{r}_y = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x. \quad (4.28b)$$

При этом спиновая система (4.24) записывается так:

$$\mathbf{S}_y = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_{xx}. \quad (4.29)$$

Это есть нечто иное, как изотропное УЛП (2.5) (при $y = t$).

iii) Положим

$$a_1 = a_3 = a_4 = a_5 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0, \quad a_2 = 1, b_1 = -1. \quad (4.30)$$

В этом случае формула (4.20) принимает вид

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y, \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{r}_y = -\mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x. \quad (4.31b)$$

Система (4.24) записывается так:

$$\mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}_{yy}) = 0. \quad (4.32)$$

Это есть стационарный случай (2+1)-мерного изотропного УЛП, имеющего форму

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge (\mathbf{S}_{xx} + \mathbf{S}_{yy}). \quad (4.33)$$

Уравнение (4.32) известно также как $O(3)$ -сигма модель и является интегрируемым [42]-[44].

iv) Теперь рассмотрим следующий частный случай системы (4.20)

$$a_4 = b_3 = 0, \quad a_5 = b_{4x} + \phi_x, \quad b_5 = a_{3y} - \phi_y. \quad (4.34)$$

Здесь мы имеем

$$\mathbf{r}_x = a_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + a_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + a_3 \mathbf{S}_x + (b_{4x} + \phi_x) \mathbf{S}, \quad (4.35a)$$

$$\mathbf{r}_y = b_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + b_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + b_4 \mathbf{S}_y + (a_{3y} - \phi_y) \mathbf{S}. \quad (4.35b)$$

Система (4.24) может быть переписана так:

$$\mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] + \phi_y \mathbf{S}_x + \phi_x \mathbf{S}_y = 0, \quad (4.36a)$$

$$\phi_{xy} = \frac{(a_1 + b_2)}{2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.36b)$$

Это стационарный вариант следующего (2+1)-мерного уравнения М-ХИИА

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] + \phi_y \mathbf{S}_x + \phi_x \mathbf{S}_y, \quad (4.37a)$$

$$\phi_{xy} = \frac{(a_1 + b_2)}{2} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.37b)$$

Остановимся чуть подробнее на системе (4.36) и для простоты дополнительно положим $a_3 = b_4 = 0$. В этом случае формулы для касательных векторов (4.20) упрощаются:

$$\mathbf{r}_x = a_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + a_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + \phi_x \mathbf{S}, \quad (4.38a)$$

$$\mathbf{r}_y = b_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + b_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y - \phi_y \mathbf{S}. \quad (4.38b)$$

Условие совместности уравнений (4.38) дает спиновую систему (4.36), так что мы можем говорить, что касательные векторы (4.38) определяют поверхность, ассоциированную с системой (4.36). Рассмотрим более подробно эту поверхность. Вычислим величину

$$\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y = (a_1 b_2 - a_2 b_1) q \mathbf{S} - (b_1 \phi_x + a_1 \phi_y) \mathbf{S}_x - (b_2 \phi_x + a_2 \phi_y) \mathbf{S}_y, \quad (4.39)$$

где $q = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y)$ есть плотность топологического заряда

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iint q dx dy = \frac{1}{4\pi} \iint dx dy \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.40)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_x \wedge \mathbf{r}_y|^2 &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 q^2 + (b_1 \phi_x + a_1 \phi_y)^2 \mathbf{S}_x^2 + (b_2 \phi_x + a_2 \phi_y)^2 \mathbf{S}_y^2 + \\ &+ 2(b_1 \phi_x + a_1 \phi_y)(b_2 \phi_x + a_2 \phi_y) \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y = \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 q^2 + \{(b_1 \phi_x + a_1 \phi_y) \mathbf{S}_x + (b_2 \phi_x + a_2 \phi_y) \mathbf{S}_y\}^2. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Из (4.39) и (4.41) найдем вектор нормали к поверхности согласно формуле (3.3). Дифференциал радиуса-вектора \mathbf{r} вдоль кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y)$, лежащей на поверхности,

имеет вид $d\mathbf{r} = \mathbf{r}_x dx + \mathbf{r}_y dy$, и следовательно, квадрат дифференциала длины дуги $ds = d\mathbf{r}$ на поверхности в точке (x, y) равен $I = ds^2 = d\mathbf{r}^2$, где

$$E = a_1^2 \mathbf{S}_x^2 + a_2^2 \mathbf{S}_y^2 + 2a_1 a_2 \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y + \phi_x^2,$$

$$F = a_1 b_1 \mathbf{S}_x^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y + a_2 b_2 \mathbf{S}_y^2 - \phi_x \phi_y, \quad (4.42)$$

$$G = b_1^2 \mathbf{S}_x^2 + b_2^2 \mathbf{S}_y^2 + 2b_1 b_2 \mathbf{S}_x \mathbf{S}_y + \phi_y^2.$$

Аналогично можно вычислить коэффициенты второй квадратичной формы и другие величины, характеризующие данную поверхность. Так как соответствующие формулы очень громоздки, мы опускаем их здесь.

v) Наконец, приведем еще один частный случай системы (4.20)

$$a_4 = b_3 = 0, \quad a_5 = \phi_y, \quad b_5 = -\phi_x. \quad (4.43)$$

Вместо (4.20) имеем следующие формулы

$$\mathbf{r}_x = a_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + a_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y + \phi_y \mathbf{S}, \quad (4.44a)$$

$$\mathbf{r}_y = b_1 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_x + b_2 \mathbf{S} \wedge \mathbf{S}_y - \phi_x \mathbf{S}. \quad (4.44b)$$

Теперь система (4.24) принимает вид

$$\mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] + \phi_x \mathbf{S}_x + \phi_y \mathbf{S}_y = 0, \quad (4.45a)$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = (a_1 + b_2) \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.45b)$$

Это есть стационарная версия следующего уравнения М-ХИВ

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S} \wedge [a_2 \mathbf{S}_{yy} + (a_1 - b_2) \mathbf{S}_{xy} - b_1 \mathbf{S}_{xx}] + \phi_x \mathbf{S}_x + \phi_y \mathbf{S}_y, \quad (4.46a)$$

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = (a_1 + b_2) \mathbf{S} \cdot (\mathbf{S}_x \wedge \mathbf{S}_y). \quad (4.46b)$$

Здесь уместен краткий комментарий. Формулы (4.1) или их спиновый аналог (4.20) полностью определяют двумерную поверхность. Одновременно, формулы (4.20) определяют соответствующую спиновую систему. Явное вычисление характеристик этих поверхностей и детальное их исследование выходит за рамки данной работы. Сказанное относится и к связанным с этими поверхностями спиновым системам с самосогласованными потенциалами (4.24), (4.36) и (4.45). Особо интересной задачей является поиск интегрируемых редукций этих поверхностей и спиновых систем и нахождение их физических приложений.

5 Заключение

Резюмируем результаты, полученные в данной работе. Рассмотрены некоторые обобщенные УЛЛ, в том числе с потенциалами и самосогласованными потенциалами,

описывающие ферромагнетики с учетом колебания магнитной кристаллической решетки. Приведены примеры вывода таких уравнений из соответствующего классического аналога квантовой модели Гейзенберга для "жестких" и упругих ферромагнетиков. Установлена их связь с дифференциальной геометрией двумерных поверхностей. Этот последний результат позволил найти так называемые L-эквиваленты спиновых систем и доказать интегрируемость некоторых из них. Нами также построен новый класс двумерных поверхностей, генерируемых σ -моделями с самосогласованными потенциалами или стационарными версиями (2+1)-мерных спиновых систем типа уравнения Ишимори.

В заключение отметим, что многие, а возможно, все (1+1)-мерные изотропные спиновые системы являются частными случаями следующего уравнения М-0

$$\mathbf{e}_{1t} = \omega_3 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \mathbf{e}_3, \quad (5.1a)$$

$$\tau_t - \omega_{1x} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_{1x} \wedge \mathbf{e}_{1t}). \quad (5.1b)$$

В то же время анизотропные спиновые системы в (1+1)-размерности, являются частными случаями анизотропного уравнения М-0, имеющего следующей вид [46]

$$\mathbf{e}_{1t} = \omega_3 \mathbf{e}_2 - \omega_2 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \wedge J \mathbf{e}_1, \quad (5.2a)$$

$$\tau_t - \omega_{1x} = \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_{1x} \wedge \mathbf{e}_{1t}). \quad (5.2b)$$

6 Приложение А. Некоторые дискретные модели упругих магнетиков

В таблице 1 приведены примеры дискретных спиновых систем, описывающих нелинейную магнитоупругого взаимодействия. В этой таблице $a_{i,j} = a_i - a_j$, $b_{i,j} = b_i - b_j$, $f_{i,j} = f(a_i, b_j, \mathbf{S}_j)$, $g_j = g_j(a_n, b_n, \mathbf{S}_n)$, $g = g(a_n, b_n, \mathbf{S}_n)$. Выбирая различные зависимости функции f_{ij}, g, g_j от a_n, b_n, q_n , мы получаем в непрерывном пределе новые системы уравнений, описывающих магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных кристаллах.

Таблица 1. Дискретные магнитоупругие системы

No	Уравнение движения
1	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $m q_{nt} = e^{-(q_n - q_{n-1})} - e^{(q_{n+1} - q_n)} + \frac{\partial J_{n+1,n}}{\partial a_n} S_n S_{n+1} + g$
2	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(b_{n+1} - b_n) + g_1, b_{nt} = a_n - a_{n-1} + g_2$
3	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(b_{n+1} - b_n) + g_1, b_{nt} = a_n - a_{n-1} + g_2$
4	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(b_{n+1}^2 - b_n^2 + a_{n+1,n-1}) + g_1, b_{nt} = a_n(b_{n+1} + b_n) - a_{n-1}(b_n + b_{n-1}) + g_2$
5	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) + g$
6	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+1} + a_n) - a_{n-1}(a_n + a_{n-1} + a_{n-2})) + g$
7	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(a_{n+1}(\alpha + a_{n+2} + a_{n+1} + a_n) - a_{n-1}(\alpha + a_n + a_{n-1} + a_{n-2})) + g$
8	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(1 + \alpha a_n)(a_{n+1} - a_{n-1}) + g$
9	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n^2(a_{n+1} - a_{n-1}) + g$
10	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(\sum_{j=1}^m a_{n+j} - \sum_{j=1}^m a_{n-j}) + g$
11	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n^2(P_{j=1}^{j-1} a_{n+j} - P_{j=1}^{j-1} a_{n-j}) + g$
12	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(b_n - b_{n-1}) + g, b_{nt} = b_n(a_{n+1} - a_n) + g_2$
13	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n a_{n-1} + g_1, b_{nt} = b_n(a_{n+1,n} + b_{n+1} - b_{n-1}) + g_2$
14	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(\frac{b_n}{a_n a_{n+1}} - \frac{b_{n-1}}{a_{n-1} a_n}) + g_1, b_{nt} = b_n(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}) + g_2$
15	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) - b_n + b_{n-1} + g_1, b_{nt} = b_n(a_{n+2} - a_{n-1}) + g_2$
16	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_n(b_{n,n-1} + a_n b_n - a_{n-1} b_{n-1}) + g_1, b_{nt} = b_n(a_{n+1,n} + a_{n+1} b_{n+1} - a_n b_n) + g_2$
17	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = a_{n+1} b_n - a_n b_{n-1} + g_1, b_{nt} = b_n(b_n - b_{n-1}) + g_2$
18	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $i a_{nt} = a_{n+1} + a_{n-1} - 2a_n \pm (a_{n+1} + a_{n-1}) a_n ^2 + g$
19	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = (1 \pm a_n^2)(a_{n+1} - a_{n-1}) + g$
20	$S_{nt} = S \wedge (f_{n,n-1} S_{n-1} + f_{n+1,n} S_{n+1})$ $a_{nt} = e^{-a_{n-1}} - e^{-a_{n+1}} + g$

7 Приложение Б. Некоторые обобщенные непрерывные УЛЛ

В этом приложении приведен список некоторых спиновых систем, в том числе магнитоупругих [46]. Для удобства они условно разделены на 11 классов, например, по типу магнитоупругого взаимодействия, так что приведенный список не является классификацией спиновых систем. Отметим, что некоторые из этих систем являются интегрируемыми, например, уравнение Мырзакулова V (M-V) (о наших обозначениях и терминологии см., например, [23]-[29], [48]-[51]).

Таблица 2. Нелинейные модели 0-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-LVII	$2iS_t = [S, S_{xx}] + u[S, \sigma_3]$
Уравнение M-LVI	$2iS_t = [S, S_{xx}] + uS_3[S, \sigma_3]$
Уравнение M-LV	$2iS_t = \{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$
Уравнение M-LIV	$2iS_t = n[S, S_{xxx}] + 2\{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$
Уравнение M-LIII	$2iS_t = [S, S_{xx}] + 2iuS_x$

Здесь и ниже $v_0, \mu, \lambda, n, m, a, b, \alpha, \beta, \rho, h$ являются константами, u, v - скалярные вещественные функции (потенциалы), $[\cdot, \cdot]$ ($\{\cdot, \cdot\}$) - коммутатор (антикоммутатор),

$$S = \begin{pmatrix} S_3 & S^- \\ S^+ & -S_3 \end{pmatrix}, \quad S^\pm = S_1 \pm iS_2, \quad S^2 = I, \quad S_x^2 = S_{1x}^2 + S_{2x}^2 + S_{3x}^2.$$

Таблица 3. Нелинейные модели 1-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-LII	$2iS_t = [S, S_{xx}] + u[S, \sigma_3]$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda(S_3)_{xx}$
Уравнение M-LI	$2iS_t = [S, S_{xx}] + u[S, \sigma_3]$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxx} + \lambda(S_3)_{xx}$
Уравнение M-L	$2iS_t = [S, S_{xx}] + u[S, \sigma_3]$ $u_t + u_x + \lambda(S_3)_x = 0$
Уравнение M-XXIX	$2iS_t = [S, S_{xx}] + u[S, \sigma_3]$ $u_t + u_x + \alpha(u^2)_x + \beta u_{xxx} + \lambda(S_3)_x = 0$

Таблица 4. Нелинейные модели 2-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-XXVIII	$2iS_t = [S, S_{xx}] + uS_3[S, \sigma_3]$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda(S_3)_{xx}$
Уравнение M-XXVII	$2iS_t = [S, S_{xx}] + uS_3[S, \sigma_3]$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxx} + \lambda(S_3)_{xx}$
Уравнение M-XXVI	$2iS_t = [S, S_{xx}] + uS_3[S, \sigma_3]$ $u_t + u_x + \lambda(S_3)_x = 0$
Уравнение M-XXV	$2iS_t = [S, S_{xx}] + uS_3[S, \sigma_3]$ $u_t + u_x + \alpha(u^2)_x + \beta u_{xxx} + \lambda(S_3)_x = 0$

Таблица 5. Нелинейные модели 3-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-XXIV	$2iS_t = \{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda(S_x^2)_{xx}$
Уравнение M-XXIII	$2iS_t = \{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxx} + \lambda(S_x^2)_{xx}$
Уравнение M-XXII	$2iS_t = \{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $u_t + u_x + \lambda(S_x^2)_x = 0$
Уравнение M-XXI	$2iS_t = \{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $u_t + u_x + \alpha(u^2)_x + \beta u_{xxx} + \lambda(S_x^2)_x = 0$

Таблица 6. Нелинейные модели 4-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-XX	$2iS_t = [S, S_{xxx}] + 2\{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda(S_x^2)_{xx}$
Уравнение M-XXXIX	$2iS_t = [S, S_{xxx}] + 2\{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxx} + \lambda(S_x^2)_{xx}$
Уравнение M-XXXVIII	$2iS_t = [S, S_{xxx}] + 2\{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $u_t + u_x + \lambda(S_x^2)_x = 0$
Уравнение M-XXXVII	$2iS_t = [S, S_{xxx}] + 2\{(\mu S_x^2 - u + m)[S, S_x]\}_x$ $u_t + u_x + \alpha(u^2)_x + \beta u_{xxx} + \lambda(S_x^2)_x = 0$

Таблица 7. Нелинейные модели 5-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-XXXVI	$2iS_t = [S, S_{xx}] + 2iuS_x$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \lambda(S_x^2)_{xx}$
Уравнение M-XXXV	$2iS_t = [S, S_{xx}] + 2iuS_x$ $\rho u_{tt} = \nu_0^2 u_{xx} + \alpha(u^2)_{xx} + \beta u_{xxxx} + \lambda(S_x^2)_{xx}$
Уравнение M-XXXIV	$2iS_t = [S, S_{xx}] + 2iuS_x$ $u_t + u_x + \lambda(S_x^2)_x = 0$
Уравнение M-XXXIII	$2iS_t = [S, S_{xx}] + 2iuS_x$ $u_t + u_x + \alpha(u^2)_x + \beta u_{xxx} + \lambda(S_x^2)_x = 0$

Таблица 8. Нелинейные модели 6-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-LXIX	$S_t = \frac{1}{\sqrt{S_x^2}}(-\sqrt{S_x^2} - u^2 S_x + uS \wedge S_x) + \beta S_x^3$ $u_x = v\sqrt{S_t^2 - u^2}$ $v_t = -S \cdot (S_t \wedge S_x)$
Уравнение M-LXX	$S_t = S \wedge S_{xx} + H \wedge S + \beta S_x^3$ $H_t = H \wedge S_{xx}$

Таблица 9. Нелинейные модели 7-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-V	$iS_t = \frac{1}{2}[S, S_{xx}] + \frac{3}{2}[S^2, (S^2)_{xx}], S^3 = S$

Таблица 10. Нелинейные модели 8-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-LXXI	$S_t = S \wedge S_{xx} + \alpha \phi ^2 S_x + S \wedge JS$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda S_x^2 \phi = 0$
Уравнение M-LXXII	$S_t = S \wedge S_{xx} + \alpha \phi ^2 S_x + S \wedge JS$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda(S_x^2 \phi)_x = 0$
Уравнение M-LXXIII	$S_t = S \wedge S_{xx} + \alpha \phi ^2 S_x + S \wedge JS$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda S_x^2 \phi_x = 0$

Таблица 11. Нелинейные модели 9-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-LXXIV	$S_t = \{(\mu \phi ^2 + m)S \wedge S_x\}_x + S \wedge JS$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda S_x^2 \phi = 0$
Уравнение M-LXXV	$S_t = \{(\mu \phi ^2 + m)S \wedge S_x\}_x + S \wedge JS$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda(S_x^2 \phi)_x = 0$
Уравнение M-LXXVI	$S_t = \{(\mu \phi ^2 + m)S \wedge S_x\}_x + S \wedge JS$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda S_x^2 \phi_x = 0$

Таблица 12. Нелинейные модели 10-го класса

Название уравнения	Уравнение движения
Уравнение M-LXXVII	$S_t = nS \wedge S_{xxx} + 2\{(\mu \phi ^2 + m)S \wedge S_x\}_x$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda S_x^2 \phi = 0$
Уравнение M-LXXVIII	$S_t = nS \wedge S_{xxx} + 2\{(\mu \phi ^2 + m)S \wedge S_x\}_x$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda(S_x^2 \phi)_x = 0$
Уравнение M-LXXIX	$S_t = nS \wedge S_{xxx} + 2\{(\mu \phi ^2 + m)S \wedge S_x\}_x$ $i\phi_t + \phi_{xx} + \lambda S_x^2 \phi_x = 0$

Благодарности. Один из авторов (Р.М.) выражает искреннюю благодарность Е.Д.Белоколот, М.Вадати, Ю.Б.Гайдидей, М.Грундланд, Б.Г.Конопельченко, М. Лакшманан, Л.Мартине, М.Ниеспорски, Дж.Солиани и С.Такено за полезные обсуждения некоторых полученных результатов.

Список литературы

- [1] Х.Беннер, Б.А. Калинин, Н.Г.Ковшиков, М.П.Костылев. Письма в ЖЭТФ. 2000. Т. 72. С. 306.
- [2] Ю.А. Изюмов. УФН. 1988. Т. 155. С. 553.
- [3] A.V.Mikhailov. Integrable Magnetic Models. In: Solitons. Eds. S.E.Trullinger, V.E.Zakharov, V.L.Pokrovsky. Elsevier, 1986.
- [4] В.Г. Барьягтар, Б.А.Иванов, А.Л. Сукустанский. ЖЭТФ. 1980. Т.78. С.1509.

- [5] А.Б.Борусов. ТМФ. 2001. Т. 128. С. 226.
- [6] V.V.Konotop, M.Salerno, S.Takeno. Phys.Rev. B. 1998. V.58. P. 14892.
- [7] T.Tsuchida, M.Wadati. J.Phys.Soc.Jpn. 1999.V.68. P.2241.
- [8] Р. Мырзакулов. Спиновые системы и солитонная геометрия. Алматы: Изд. ФТИ, 2001.
- [9] Р. Мырзакулов, Ф.К. Рахимов. Солитонная теория магнетизма и дифференциальная геометрия. Алматы: Изд. ФТИ, 2003.
- [10] А.М. Косевич, Б.А.Иванов, А.С.Ковалев. Нелинейные волны намагниченности. Динамические и топологические солитоны. Киев: Наукова Думка, 1983.
- [11] V.G. Makhankov, R. Myrzakulov, A.V. Makhankov. Phys.Scripta. 1987. V. 35. P. 233.
- [12] Ю.В. Камышев, В.Г. Мазаньков, Р. Мырзакулов. ТМФ. 1987. Т. 72. С. 22.
- [13] R. Myrzakulov, M. Daniel, R. Amuda. Physica A: 1997. V. 234, P. 715.
- [14] Е.К. Sklyanin. On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation. Preprint LOMI E-3-79. Leningrad, 1979.
- [15] В.В.Леманов. Магнитоупругие взаимодействия. В сб.: Физика магнитных диэлектриков. Ленинград: Наука, 1984. С.284-343.
- [16] C. Rogers, W.K. Schief. Backlund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. London: Cambridge University Press, 2002.
- [17] Backlund and Darboux Transformations. The Geometry of Solitons. CRM Proceedings and Lecture Notes. V.29. Eds. A.Coley, D.Lévi, R.Milson, C.Rogers, P.Winternitz. Aarms-Crm Workshop. American Mathematical Society, 2001.
- [18] K. Tenenblat. Transformations of Manifolds and Application to Differential Equations. London: CRC Press, 1998.
- [19] S.P.Novikov. Solitons and Geometry. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [20] Nonlinearity and Geometry. Eds. D.Wojcik, J.Cieslinski. Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1998.
- [21] J. Cieslinski, P. Goldstein, A. Sym. J. Phys. A: Math.Gen. 1994. V. 27, P. 1645.
- [22] R. Balakrishnan, P.Guha. J.Math.Phys. 1996. V. 37. P. 3651.
- [23] R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, G.N. Nugmanova, M. Lakshmanan. Phys.Lett. A. 1997. V. 233. P. 391.
- [24] R. Myrzakulov, S. Vijayalakshmi, R.N. Syzdykova, M. Lakshmanan. J.Math.Phys. 1998. V. 39. P. 2122.

- [25] M. Lakshmanan, S. Vijayalakshmi, A.K. Danlybaeva, R. Myrzakulov. J.Math.Phys. 1998. V. 39. P. 3765.
- [26] R. Myrzakulov, G.N. Nugmanova, R.N. Syzdykova. J. Phys. A: Math.Gen. 1998. V. 31. P. 9535.
- [27] Р. Мырзакулов, А.К. Данылбаева, Г.Н. Нугманова. ТМФ. 1999. Т. 118. С. 441.
- [28] L. Martina, Kur.Myrzakul, R.Myrzakulov, G.Soliani. J.Math.Phys. 2001. V. 42. P. 1397.
- [29] L. Martina, T.A.Kozhamkulov, Kur.Myrzakul, R.Myrzakulov. Integrable Heisenberg ferromagnets and soliton geometry of curves and surfaces. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. II. Eds. M.Ablowitz, M.Boiti, F.Pempinelli, B.Prinari. Singapore: World Scientific, 2003.
- [30] M. Lakshmanan. Phys.Lett. A. 1977. V. 61. P. 53.
- [31] L.A.Takhtajan. Phys.Lett. A. 1977. V. 64. P. 235.
- [32] В.Е. Зазаров, Л.А.Тажмаджан. ТМФ. 1979. Т. 38. С. 26.
- [33] A.V.Mikhailov, A.B.Shabat. Phys.Lett. A. 1986. V.116. P.191.
- [34] A.Kundu. J.Math.Phys. 1984. V. 25. P. 3433.
- [35] A.C.Newell. SIAM J.Appl.Math. 1978. V.35. P.650.
- [36] L.P.Eisenhart. A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces. New York: Dover, 1960.
- [37] A.Lelievre. Bull. des Sciences Math.Astron. (2). 1888. V.12. P.126.
- [38] B.G.Konopelchenko. Stud.Appl.Math. 1996. V.96. P.9.
- [39] B.G.Konopelchenko, U.Pinkall. Geometriae Dedicata. 1999. V.6. P.11.
- [40] E.V.Ferapontov. Surfaces with flat normal bundle: an explicit construction. math.DG/9805012.
- [41] W.K.Schief. J.Math.Phys. 2000. V. 41. P. 6566.
- [42] K. Pohlmeyer. Commun.Math.Phys. 1976. V. 46. P. 207.
- [43] F.Lund, T.Regge. Phys.Rev. D. 1976. V.14. P.1524.
- [44] Е.Ш.Гутмабаев, В.Д.Луновский, С.С.Никулчев. ТМФ. 1998. Т. 115. С. 328.
- [45] V.P.Kotlyarov. J.Phys. C: Solid State Phys. 1984. V.17. P.L139.
- [46] R.Myrzakulov. On some integrable and nonintegrable soliton equations of magnets. (Preprint HEPI, Alma-Ata, 1987).

- [47] *N.S.Serikbaev, Kur.Myrzakul, F.K.Rahimov.* Differential geometry of surfaces and Heisenberg ferromagnets. E-preprint: math.DG/0303056.
- [48] *M.Lakshmanan.* Geometrical interpretation of (2+1)-dimensional integrable nonlinear evolution equations and localized solutions. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach. Report/40/97.ps, p.9.
- [49] *E.Sh.Gutshabash.* Some notes on Ishimori's magnet model. E-preprint: nlin.SI/0302002.
- [50] *P.G.Estevez, G.A.Hernaez.* Lax pair, Darboux Transformations and solitonic solutions for a (2+1)-dimensional nonlinear Schrodinger equation. E-preprint: solv-int/9910005.
- [51] *K.S.Chou, C.Z.Qu.* J.Phys.Soc.Jpn. 2002. V.71. P.1039.

Получено 9 сентября 2003 г.