

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

1740/2-80

21/4-80

P17 - 12961

В.Л.Аксенов, Д.Баатар, Н.М.Плакида,
С.Стаменкович*

ОПИСАНИЕ СТРУКТУРНОГО ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА
В ПРИБЛИЖЕНИИ РАЗДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТЫ

* Институт ядерных наук им. Б.Кидрича, Белград,
СФРЮ.

1. ВВЕДЕНИЕ

При описании структурных фазовых переходов /ФП/ в кристаллах весьма эффективным оказалось представление локальной нормальной координаты ^{1/}. Простейший гамильтониан, описывающий структурный переход в этом представлении, имеет вид:

$$H = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial s_i^2} - \frac{A}{2} s_i^2 + \frac{B}{4} s_i^4 \right) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{ij} s_i s_j, \quad /1/$$

где s_i - локальная нормальная координата, p_i - импульс, m - эффективная масса. Точно решить задачу с гамильтонианом /1/ не представляется возможным даже в одномерном случае, поэтому обычно рассматривают два предельных случая. Предел слабого ангармонизма / $A < 0$ - фазовый переход типа смещения ^{2/} / и предел сильного ангармонизма ($\Phi_0 \ll A$, $A > 0$), когда в одночастичном потенциале в /1/ достаточно учесть только нижний дважды вырожденный уровень /фазовый переход типа порядок-беспорядок ^{3/} /. В первом случае гамильтониан /1/ описывает систему достаточно хорошо определенных фононов, а во втором - движение диффузионного типа /которое при учете туннелирования имеет вид коллективизированных перескоков в двухъямном потенциале/. Однако в общем случае эти два типа движения не являются независимыми. Результаты ^{4/} исследования классического аналога системы /1/ показывают, что имеется два типа возбуждений: фоновые, с малой амплитудой колебаний, и возбуждения солитонного типа, описывающие движение границы кластеров. В формировании последней главную роль играет перескок частиц в одночастичном потенциале.

Чтобы учесть оба типа движений: медленные - перескок частиц в одночастичном потенциале и быстрые - колебания с малой амплитудой, нами ранее ^{5,6/} было введено представление координаты s_i в виде

$$s_i = r_i + u_i, \quad /2/$$

где r_i соответствует положению равновесия, которое может меняться с малой частотой Ω , а u_i - смещение частицы относительно равновесного положения с характерной частотой $\omega_0 \gg \Omega$. Проблема разделения движения частицы в системе /1/ на медленное и быстрое обсуждалась также в работе /7/. На основе представления /2/ в работе /8/ предложена квантовая модель, в которой спектр системы /1/ представлен в виде связанных самосогласованных низколежащих сильноангармонических возбуждений, обусловленных туннелированием, и высоколежащих возбуждений фононного типа.

В настоящей работе на основе численных расчетов описан фазовый переход в этой модели и исследованы условия применимости приближения /2/ в зависимости от параметров гамильтониана /1/.

2. САМОСОГЛАСОВАННАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

Как показано в работе /8/, в приближении разделения координаты /2/ гамильтониан /1/ можно аппроксимировать суммой независимых гамильтонианов для конфигурационной и фононной частей:

$$H_0 = H_s + H_{ph} \quad /3/$$

Эта аппроксимация производится в смысле вариационного принципа Боголюбова для свободной энергии: $F \leq F_0 + \langle H - H_0 \rangle_0$. F - свободная энергия с полным гамильтонианом /1/, а F_0 - свободная энергия с гамильтонианом /3/. Гамильтониан конфигурационной /сильноангармонической/ части имеет вид

$$H_s = \sum_i \left[-\frac{\lambda_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\tilde{A}}{2} x_i^2 + \frac{1}{4} x_i^4 \right] - \frac{1}{2} \sum_{ij} \phi_{ij} x_i x_j \quad /4/$$

В /4/ введены безразмерные переменные

$$x_i = \sqrt{\frac{B}{A}} r_i, \quad \phi_{ij} = \frac{\Phi_{ij}}{A}, \quad \lambda_0 = \frac{\hbar \sqrt{A/m}}{A^2/B} \quad /5/$$

а параметр одночастичного потенциала

$$\tilde{A} = 1 - 3y, \quad y = \frac{B}{A} \langle u_i^2 \rangle \quad /6/$$

зависит от состояния фононной системы, определяемого средним квадратом "быстрых" смещений y . Угловые скобки здесь и далее означают термодинамические средние с гамильтонианом /3/.

Аппроксимация /4/ предполагает, что два нижних уровня, определяемых решениями уравнения на собственные значения

$$\left[-\frac{\lambda_0^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\tilde{A}}{2} x_i^2 + \frac{1}{4} x_i^4 \right] \psi_{s,a}(x) = \epsilon_{s,a} \psi_{s,a}(x), \quad /7/$$

лежат значительно ниже потенциального барьера, как показано на рис. 2 сплошной линией. При этом следующие уровни в одночастичном потенциале могут быть учтены с помощью гамильтониана H_{ph} . При рассмотрении системы H_s удобно перейти к энергетическому представлению с помощью волновых функций симметричного и антисимметричного состояний $\psi_{s,a}$ в /7/, в котором гамильтониан /4/ принимает вид /9/:

$$H_s = -g \sum_i \sigma_i^x - \frac{1}{2} \sum_{ij} j_{ij} \sigma_i^z \sigma_j^z + E_0, \quad /8/$$

где σ^x, σ^z - матрицы Паули,

$$2g = \epsilon_a - \epsilon_s, \quad j_{ij} = \phi_{ij}(x_{sa})^2, \quad x_{sa} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s^* \cdot x \cdot \psi_a dx \quad /9/$$

Равновесные положения атомов $\langle x_i \rangle$ играют в системе роль параметра порядка P , который в представлении /7/ имеет вид:

$$P = \langle x_i \rangle = x_{sa} \langle \sigma_i^z \rangle, \quad /10/$$

и в случае сегнетоэлектрического ФП определяет поляризацию. Средняя заселенность частиц в одном из минимумов одночастичного потенциала определяется $\langle \sigma_i^z \rangle$, и в приближении среднего поля имеет вид

$$\sigma_z \equiv \langle \sigma_i^z \rangle = \frac{h_z}{h} \operatorname{th} \frac{h}{T}, \quad \sigma_x \equiv \langle \sigma_i^x \rangle = \frac{g}{h} \operatorname{th} \frac{h}{T}, \quad /11/$$

где

$$h_z = \sum_i j_{ij} \sigma_z, \quad h_z^2 = h_z^2 + g^2, \quad T = k_B \theta / (A^2/B).$$

В отличие от обычной модели де Жена /9/, параметры гамильтониана /8/ зависят от температуры, благодаря учету фононных состояний в /6/, /7/. Поскольку фононная часть гамильтониана /1/ описывает высоковозбужденные состояния, ангармонизм которых мал, гамильтониан фононов H_{ph} выберем в псевдогармоническом приближении /8/:

$$H_{ph} = \sum_i \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial u_i^2} + A \cdot \frac{\Delta}{2} u_i^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{ij} \Phi_{ij} u_i u_j, \quad /12/$$

в котором энергия фонона имеет вид:

$$m\omega_q^2 = A\Delta - \Phi_q, \quad \Delta = -1 + 3(y + \langle x_i^2 \rangle). \quad /13/$$

Как видно, фононный спектр зависит от среднего квадрата "медленных" смещений $\langle x_i^2 \rangle$, который в представлении /7/ имеет вид

$$\langle x_i^2 \rangle = x_+^2 - x_-^2 \sigma_x, \quad /14/$$

где

$$x_+^2 = \frac{1}{2} (x_{aa}^2 + x_{ss}^2), \quad x_-^2 = \frac{1}{2} (x_{aa}^2 - x_{ss}^2), \quad /14a/$$

$$x_{ss}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_s^*(x) \cdot x^2 \cdot \psi_s(x) dx.$$

Система уравнений замыкается определением среднего квадрата быстрых флуктуаций в виде:

$$y = \frac{1}{N} \frac{B}{A} \sum_a \frac{1}{2\omega_q} \operatorname{cth} \frac{\omega_q}{2T} = \lambda_0 \int_{-1}^1 \frac{d\nu \rho(\nu)}{2\sqrt{\Delta - \phi_0 \nu}} \operatorname{cth} \frac{\lambda_0 \sqrt{\Delta - \phi_0 \nu}}{2T}, \quad /15/$$

где $\phi_0 = \sum_j \phi_{ij}$, а $\rho(\nu) = (1/N) \sum_q \delta(\nu - \frac{\phi_q}{\phi_0})$ - функция распределения частот фононов, которую мы в дальнейшем выберем приближенно в виде

$$\rho(\nu) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - \nu^2}. \quad /16/$$

Фазовый переход в модели определяется температурным поведением параметра порядка P /10/, для которого мы имеем самосогласованную систему уравнений /4/-/15/ в приближении типа хаотических фаз /10/.

3. ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В МОДЕЛИ

Описанная в предыдущем разделе модель является по-существу обобщением модели де Жена, которое заключается в учете зависимости потенциала от температуры T и квантовых свойств системы ($\lambda_0^2 \sim \hbar^2/m$). Основное приближение состоит в том, что

полный спектр можно разделить на две части - низколежащий дважды расщепленный за счет туннелирования уровень и возбужденные высоколежащие состояния. Причем эти две части взаимно влияют друг на друга. Параметры псевдоспинового гамильтониана g и j_{ij} /8/ существенно зависят от состояния фононной подсистемы /заселения высших уровней/, определяемого эффективным одночастичным потенциалом /6/. В то же время и состояние фононной системы зависит от состояния псевдоспиновой, поскольку частота фононов /13/ зависит от среднеквадратичных смещений $\langle x_i^2 \rangle$ равновесного положения осциллятора. Для того, чтобы получить описание фазового перехода в системе, необходимо решить систему уравнения /4/-/15/.

3.1. Приближение гармонического осциллятора

В качестве пробных функций в уравнении /7/ выберем комбинации функций левого /-/ и правого /+/ состояний гармонического осциллятора

$$\psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm \rho)}} [\psi_0^+(x) \pm \psi_0^-(x)], \quad /17/$$

где

$$\psi_0^\pm(x) = \psi_0(x \pm x_0), \quad \psi_0(x) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad /17a/$$

$\rho = \int \psi(x+x_0)\psi(x-x_0)dx$ - перекрытие волновых функций. Параметры волновой функции основного состояния осциллятора /17a/ определяются из уравнения

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + A x^2 \right) \psi_0(x) = \epsilon_0 \psi_0(x), \quad \epsilon_0 = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\frac{2A}{m}}. \quad /18/$$

Таким образом, получаем

$$g = \rho \frac{3+\lambda}{4} \frac{(1-3y)^2}{1-\rho^2}, \quad j_0 = \phi_0 \frac{1-3y}{1-\rho^2}, \quad /19/$$

где перекрытие волновых функций

$$\rho = e^{-\frac{1}{\lambda}}, \quad \lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{2} (1-3y)^{3/2}}. \quad /20/$$

Средний квадрат "медленных" смещений /14/:

$$\langle x_i^2 \rangle = \frac{1-3y}{1-\rho^2} \left[1 + \frac{\lambda(1-\rho^2)}{2} - \rho \sigma_x \right], \quad /21/$$

среднее смещение /10/:

$$\langle x_i \rangle = \frac{1-3y}{1-\rho^2} \sigma_z = x_{sa} \sigma_z \equiv P. \quad /22/$$

Используя уравнения /19/-/20/, можно исследовать поведение системы.

Рассмотрим случай нулевой температуры $T=0$. Уравнения для σ_z /11/ и для y /15/ принимают вид

$$\sigma_z \approx \frac{1}{j_0} \sqrt{j_0^2 - g^2}; \quad y = \lambda_0 \int_{-1}^1 \frac{d\nu \sqrt{1-\nu^2}}{\pi \sqrt{\Delta - \phi_0 \nu}}. \quad /23/$$

Как видно, $\sigma_z \geq 0$ при условии $g^2 \leq j_0^2$. Это условие нарушается при достаточно большой энергии нулевых колебаний, когда $\lambda > \lambda_0^c$. При $\lambda = \lambda_0^c$, $\sigma_z = 0$ и, согласно /22/, $P = 0$. Анализ уравнений /23/ показывает, что $\lambda_0^c \approx (\ln 3/4 \phi_0)^{-1}$. P /22/ может обратиться в ноль при $T=0$ и за счет обращения в ноль параметра x_{sa} . Используя /22/, /23/ и /13/, получаем $\lambda_0^{\Phi} = \pi \sqrt{\phi_0} / 3 \int_{-1}^1 d\nu \sqrt{1+\nu} \approx 2 \sqrt{\phi_0}$. Сравнивая λ_0^c и λ_0^{Φ} , видим,

что при малых ϕ_0 переход в неупорядоченное состояние ($P=0$) происходит за счет флуктуаций в спиновой подсистеме, а при больших ϕ_0 - за счет флуктуаций в фоновой подсистеме. Иными словами, P обращается в ноль за счет той подсистемы, в которой меньше критическое значение λ_0 . На рис. 1 приведена зависимость параметра перекрытия волновых функций правого и левого состояний $\rho/20/$ от λ_0 при $\phi_0 = 0,1$ и $0,6$, полученная численным решением уравнений /19/-/22/ при $T=0,001$. Расчеты показывают, что при $\phi_0 = 0,1$ $\sigma_z = 0$ при $\lambda_0 \approx 0,37$, а $x_{sa} = 0$ при $\lambda_0 = 0,45$. При $\phi_0 = 0,6$ $\sigma_z = 0$ при $\lambda_0 = 1,1$, а $x_{sa} = 0$ при $\lambda_0 = 0,5$. Как видно из рис. 1, в случае $\phi_0 = 0,6$ еще до фазового перехода перекрытие волновых функций становится большим, когда приближение разделения спектра теряет физический смысл. Полученные результаты носят качественный характер ввиду приближения /17/. Более детальное описание можно получить с помощью решения полного уравнения /7/.

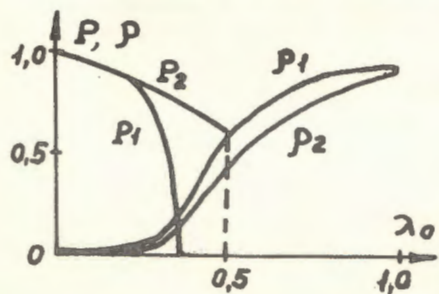


Рис. 1. Зависимость от параметра λ_0 перекрытия волновых функций левого и правого состояний /17а/ ρ и параметра порядка P . ρ_1, P_1 при $\phi_0 = 0,1$, ρ_2, P_2 при $\phi_0 = 0,6$, $T = 0,001$.

3.2. Решение самосогласованной системы уравнений для параметра порядка

Уравнение на собственные значения /7/ решалось численно с помощью непрерывного аналога метода Ньютона, развитого в ЛВТА ОИАИ /11,12/. Эта задача решалась самосогласованным образом в системе уравнений /4/-/15/. Результаты представлены на рис. 2,3 и в табл. 1-3.

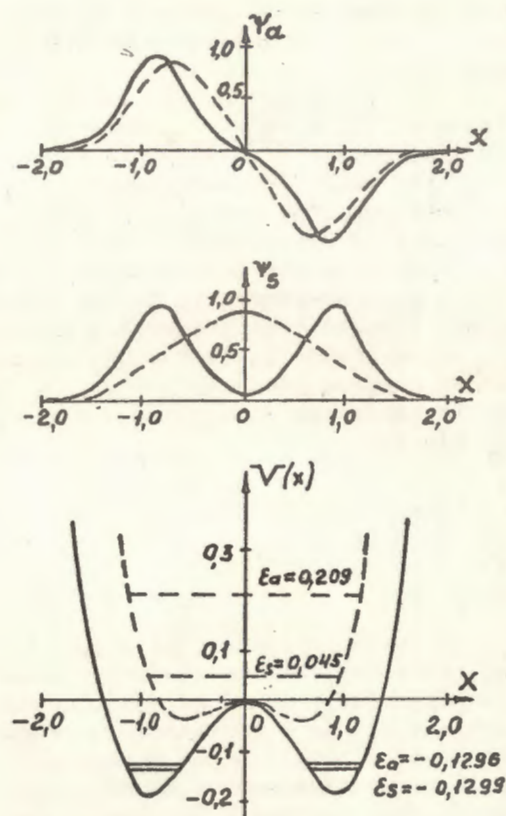


Рис. 2. Одночастичный потенциал и волновые функции симметричного и антисимметричного состояний при $\phi_0 = 0,1$, $\lambda_0 = 0,1$ /сплошная линия/ и $\phi_0 = 0,1$, $\lambda_0 = 0,3$ /пунктирная линия/.

На рис. 2 показан вид эффективного одночастичного потенциала и волновых функций двух нижних уровней при значениях параметров $\phi_0 = 0,1$, $\lambda_0 = 0,1$ /сплошные кривые/ и $\lambda_0 = 0,3$

/пунктирные кривые/. В первом случае имеется потенциал с двумя близкорасположенными уровнями ($g \ll \Delta$) ниже потенциального барьера. Вырождение основного состояния снимается квантовым туннелированием частицы. Во втором случае кинетическая энергия частицы настолько велика, что уровни энергии расположены выше потенциального барьера. Очевидно, что в этом случае аппроксимация /3/ теряет смысл. В табл. 1 показано, как меняются параметры задачи в зависимости от λ_0 при разных ϕ_0 и $T=0,001$. Таким образом, при каждом фиксированном ϕ_0 можно определить критическое значение λ_0^k , выше которого уровни поднимаются выше потенциального барьера, и аппроксимация /3/ неприменима.

Рассмотрим случай, когда при низких температурах реализуется аппроксимация /3/. В табл. 2, 3 представлены результаты вычисления температурной зависимости параметров задачи при различных ϕ_0 . Как видно, с увеличением ϕ_0 меняется механизм фазового перехода. При малых ϕ_0 ($\phi_0 \leq 0,1$) фазовый переход происходит за счет разупорядоченности в системе. При больших ϕ_0 ($\phi_0 \geq 0,5$) частицы все "закреплены" в положении равновесия в одном из минимумов, и с ростом температуры происходит фазовый переход типа смещения в симметричное состояние *. При промежуточных ϕ_0 важны оба механизма, т.е. происходит фазовый переход смешанного типа. На рис. 3 показана зависимость параметра порядка от температуры при $\lambda_0 = 0,1$ и $\phi_0 = 0,1; 0,6$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приближение /3/ означает разделение полной системы на две подсистемы, связанные самосогласованным образом. Энергия одночастичных возбуждений в одной из них обусловлена квантовым туннелированием частицы в двухъямном потенциале в двухуровневом приближении, и определяется величиной $2g = \epsilon_a - \epsilon_s$ (9). Энергия одночастичных возбуждений в другой подсистеме обусловлена малыми колебаниями частицы в потенциале гармонического типа и определяется величиной Δ /13/. Применение такого приближения физически обосновано при условии $g \ll \Delta$.

* Заметим, что реальный переход типа смещения реализуется в модели /1/ при другом выборе знака A : $A < 0$ и $\Phi_0 \gg \Phi_0 - |A|$.

Таблица 1
Зависимость параметров модели от λ_0 при $T = 0,0001$

ϕ_0	λ_0	ϵ_a	ϵ_s	g/j_0	σ_x	σ_z	x_{sa}	$\langle x_1^2 \rangle$	y
1°0	0.1	-0.12956	-0.12994	0.0025	0.0025	0.9999	0.8664	0.7939	0.0407
	0.2	0.05769	-0.00462	1.0685	1.0000	0.1 10^{-6}	0.5403	0.2967	0.1632
	0.3	0.20884	0.04517	3.0752	1.0000	0.1 10^{-6}	0.5153	0.2674	0.2207
	0.4	0.36756	0.09260	4.8416	1.0000	0.1 10^{-6}	0.5328	0.2853	0.2544
	0.5	0.54596	0.14543	6.5458	1.0000	0.1 10^{-6}	0.5530	0.3070	0.2844
5°0	0.1	-0.12881	-0.12921	0.0005	0.0005	0.9999	0.8652	0.7918	0.0413
	0.2	0.01167	-0.03099	0.1087	0.1105	0.9939	0.6216	0.5056	0.1119
	0.3	0.18055	0.03232	0.5096	0.5105	0.8599	0.5389	0.3759	0.1901
	0.4	0.38255	0.09892	1.0283	1.0000	0.1 10^{-6}	0.5251	0.2770	0.2694
	0.5	0.55630	0.14971	1.3490	1.0000	0.1 10^{-6}	0.5490	0.3026	0.2938
1°1	0.1	-0.12658	-0.12699	0.0003	0.0003	0.9999	0.8615	0.7858	0.0432
	0.2	0.56247	0.15226	0.6862	0.6861	0.7275	0.5467	0.3673	0.2994

Таблица 2

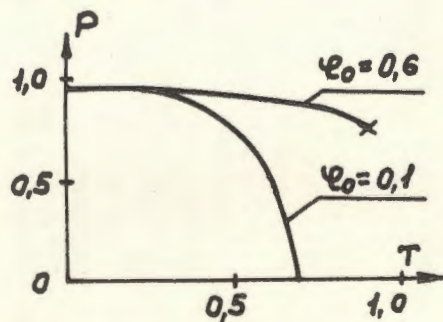
Зависимость параметров модели от температуры при $\lambda_0=0,1$, $\phi_0=0,1$.

$\phi_0 = 0.1$ $\lambda_0 = 0.1$	T	ϵ_a	ϵ_s	$(g/j_0) \cdot 10^3$	σ_x	σ_z	x_{sa}	$\langle x_1^2 \rangle$	y
	0.0200	-0.12956	-0.12994	2.53	0.0025	0.9989	0.8664	0.7939	0.0407
	0.0400	-0.12437	-0.12481	2.99	0.0030	0.9387	0.8579	0.7798	0.0451
	0.0600	-0.11212	-0.11275	4.57	0.0045	0.6167	0.8368	0.7455	0.0557
	0.0625	-0.1101	-0.11068	4.89	0.0048	0.5234	0.8329	0.7394	0.0576
	0.0650	-0.10792	-0.10863	5.24	0.0052	0.3952	0.8291	0.7334	0.0594
	0.0675	-0.10584	-0.10660	5.58	0.0056	0.1622	0.8252	0.7273	0.0613
	0.0695	-0.10447	-0.10526	5.76	0.0057	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.8226	0.7232	0.0626
	0.0700	-0.10379	-0.10459	5.93	0.0057	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.8213	0.7212	0.0632
	0.0800	-0.09440	-0.09544	8.23	0.0066	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.8028	0.6926	0.0719
	0.0900	-0.08342	-0.08488	12.03	0.0081	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.7794	0.6578	0.0826
	0.1000	-0.06878	-0.07103	19.86	0.0113	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.7444	0.6083	0.0976
0.1100	-0.03977	-0.04506	59.77	0.0240	$0.1 \cdot 10^{-6}$	0.6593	0.5001	0.1307	

Таблица 3

Зависимость параметров модели от температуры при $\lambda_0=0,1$, $\phi_0=0,8; 1,0$.

$\phi_0 = 0.8$ $\lambda_0 = 0.1$	T	ϵ_a	ϵ_s	$(g/j_0) \cdot 10^3$	$\sigma_x \cdot 10^3$	σ_z	x_{sa}	$\langle x_1^2 \rangle$	y	
	0.02	-0.128069	-0.128468	0.447	0.45	0.99995	0.8640	0.7898	0.0419	
	0.04	-0.122687	-0.122641	0.548	0.54	0.99995	0.8542	0.7737	0.0469	
	0.06	-0.108615	-0.109313	0.846	0.84	0.99995	0.8304	0.7353	0.0588	
	0.08	-0.088515	-0.089770	1.68	1.7	0.99985	0.7905	0.6741	0.0776	
	0.09	-0.072351	-0.074376	2.94	3.0	0.99890	0.7534	0.6205	0.0938	
	$\phi_0 = 1.0$	0.02	-0.125843	-0.126268	0.288	0.29	0.9999	0.8603	0.7838	0.0438
		0.04	-0.117819	-0.118354	0.372	0.37	0.9999	0.8468	0.7616	0.0507
		0.06	-0.099040	-0.099960	0.699	0.69	0.9999	0.8122	0.7068	0.0676

Рис. 3. Зависимость параметра порядка P от температуры при $\lambda_0=0,1$ и $\phi_0=0,1; 0,8$.

Возможность применения того или иного приближения при описании модели /1/ определяется двумя параметрами: параметром квантовости $\lambda_0^2 = (\hbar^2 A / m) / (A^2 / B)$ и параметром связи частиц $\phi_0 = \sum_j \Phi_{ij} / A$. Как видно из предыдущего рассмотрения, условие $g \ll \Delta$ достаточно хорошо выполняется при значениях $\lambda_0 \leq \lambda_0^k$ ($\epsilon_a \leq 0$) при $T=0$.

При повышении температуры Δ уменьшается, а g увеличивается и, таким образом, в области фазового перехода предложенная модель имеет интерполяционный характер. Именно в этом смысле она позволяет описывать не только предельные случаи малых и больших ϕ_0 , но и промежуточные случаи.

В заключение авторы выражают благодарность И.В.Пузынину и Ф.Вукайловичу за обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Thomas H. In: Structural Phase Transition and Soft Modes, ed. by F.Samuelsen, E.Anderson, J.Feder. Universitetsforlaget, Oslo, 1971, p.15.
2. Gillis N.S. In: Dynamical Properties of Solids, ed. G.K.Horton, A.A.Maradudin. North-Holland, Amsterdam, 1975, v.2, p.107.
3. Moore, M.A., Williams H. J.Phys. C., 1972, 5, p.3168.
4. Krumhansl J.A., Schrieffer J.R. Phys.Rev.B., 1975, 11, p.3535.
5. Стаменкович С. и др. ОИЯИ, Р17-9226, Дубна, 1975; Phys.Rev. B., 1976, 14, p.5080.
6. Аксенов В.Л. и др. ФТТ, 1976, 18, с.2921.
7. Beck H. J.Phys. C., 1976, 9, p.33.
8. Стаменкович С. и др. ОИЯИ, Р17-11856, Дубна, 1978; Fizika, 1978, v.10, suppl. 2, p.122.
9. Вакс В.Г. Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков. "Наука", М., 1973.
10. Аксенов В.Л., Шрайбер Ю. Phys.Lett. A., 1978, 69, p.56.
11. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, т.4, в.1, с.127.
12. Пузынин И.В., Пузынина Т.П. КФК1-74-34, Будапешт, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 ноября 1979 года.