сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р17 - 12948

И.Н.Коцев, М.И.Аройо

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША-ГОРДАНА ДЛЯ АНТИУНИТАРНЫХ ГРУПП

V. Нечетный базис

1979

P17 - 12948

И.Н.Коцев, М.И.Аройо

КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША-ГОРДАНА ДЛЯ АНТИУНИТАРНЫХ ГРУПП

V. Нечетный базис

Коцев И.Н., Аройо М.И.

P17 - 12948

Коэффициенты Клебша-Гордана для антиунитарных групп.
V. Нечетный базис

С помощью обобщенной леммы Рака найдены коэффициенты Клебша-Гордана для копредставлений /однозначных и двузначных/ всех 27 содержащих несобственные повороты нецентросимметрических шубниковских точечных групп. Составлены таблицы коэффициентов для четных и нечетных /по отношению к пространственной инверсии/ базисных функций копредставлений. Эти коэффициенты полезны при определении правил отбора, составлении инвариантов, применении теоремы Вигнера-Эккарта и т.д., в теории кристаллического поля, динамики решетки, взаимодействия излучения с веществом и др.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1979

Kotzev I.N., Aroyo M.I.

P17 - 12948

Clebsch-Gordan Coefficients for Antiunitary Groups.
IV. Odd Basis

By means of the generalized Racah lemma Glebsch-Gordan coefficients have been found for single and two-valued corepresentations of all 27 Shubnikov's non-centersymmetric points groups containing improper rotations. Coefficients are tabulated for even and odd /with respect to space inversion/ basic function of corepresentations. Tables are necessary at determining selection rules, invariant application of the Wigner-Eckart theorem etc., in crystal field theory, lattice dynamics, radiation-matter interaction a.o.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1979

Как было впервые показано Вигнером /1/, для систем с антиунитарной симметрией трансформационные свойства волновых функций и квантово-механических операторов физических величин, вырождение уровней, правила отбора и т.д. определяются не обычными представлениями групп, а копредставлениями. В связи с этим очевидна необходимость разработки для копредставлений математического аппарата, аналогичного теории неприводимых тензорных множеств /2/. В работе /3/ показано, что известная лемма Рака /4/, устанавливающая связь между коэффициентами Клебша-Гордана (ККГ) для линейных представлений некоторой группы и её подгрупп, имеет место также и для копредставлений антиунитарных групп. Там же рассмотрен основанный на обобщенной лемме Рака метод вычисления коэффициентов Клебша-Гордана для копредставлений, обладающий рядом преимуществ по сравнению с ранее предлагавшимися методами /5-9/. Этим методом в работах /10-13/ найдены и табулированы ККГ для однозначных и двузначных копредставлений всех 90 антиунитарных шубниковских точечных групп (58 "черно-белых" и 32 "серых"). Для определенности и для сокращения объема таблиц и вычислений базисные функции копредставлений выбирались четными по отношению к пространственной инверсии I. В этом случае достаточно было провести расчеты лишь для 21 из 90 групп. Естественно, для групп $G_0 \subset SO(3) \otimes \Theta$, где $\Theta = 1'$ - группа, порожденная антиунитарным оператором обращения времени /1/, выбор четного или нечетного базиса несуществен. Для соответствующих центросимметрических групп $G^I = G_0 \otimes C_i$, $C_i = \{E, I\}$, ККГ для четных и для нечетных копредставлений, $D_{\alpha+}$ и $D_{\alpha-}$, находятся с помощью известных соотношений

$$[\alpha_1 \pm, a_1, \alpha_2 \pm a_2 | \alpha +, \rho_\alpha a] = [\alpha_1 \pm, a_1, \alpha_2 \mp, a_2 | \alpha -, \rho_\alpha a] = [\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 | \alpha \rho_\alpha a], \qquad (1)$$

где $[\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 | \alpha \rho_\alpha a]$ - ККГ для копредставлений $D_\alpha = (D_{\alpha\pm} \downarrow G_0)$ подгрупп $G_0 \lhd G_0 \otimes C_i$. Однако для групп

$$\bar{G} = G_0' + g_2 I \cdot G_0', \quad I \notin \bar{G}, \qquad (2)$$

включающих инверсионные оси и плоскости симметрии, но не содержащих I, явный вид ККГ зависит от четности базисных функций. Для четного базиса ККГ для $\bar{G}$ совпадают с ККГ для изоморфных им групп

$G_0 \leftrightarrow \bar{G}$ и приведены в /I0-I2/. В ряде случаев, однако, рассматриваемые физические величины нечетны по отношению к пространственной инверсии (напр., полярно-векторные операторы, волновые функции дипольно-активных колебаний и др.). Подавляющее большинство ККГ для групп $\bar{G}$ при нечетном базисе или совпадают с ККГ для четного базиса, или отличаются от них лишь знаком. Более существенные различия возникают, когда в разложениях кронекеровских произведений копредставлений $D_{\alpha_1} \times D_{\alpha_2}$ имеются повторяющиеся эквивалентные копредставления D_α.

В настоящей работе, являющейся продолжением работ /I0-I3/, вычислены ККГ для копредставлений всех шубниковских точечных групп типа (2) в случае нечетных базисных функций. (Эти группы подчеркнуты в табл. I). Для единства подхода и с целью облегчить применение вычисленных здесь ККГ нечетные по отношению к пространственной инверсии базисные функции копредставлений (см. табл. 2, 5, II, I5) построены с помощью широко известных таблиц /I4/, где функции φ^i_m преобразуются по копредставлениям D^i группы $O(3) \otimes \Theta$.

Отметим, что если базисные функции $\psi^{\alpha_1}_{a_1}$ и $\psi^{\alpha_2}_{a_2}$ копредставлений D_{α_1} и D_{α_2} обе четны или обе нечетны, их произведения распадаются на четные функции $\psi^{\alpha \rho_\alpha}_a$,

$$\psi^{\alpha_1}_{a_1} \psi^{\alpha_2}_{a_2} = \sum_{\alpha \rho_\alpha a} [\alpha_1 a_1, \alpha_2 a_2 | \alpha \rho_\alpha a]^* \, \psi^{\alpha \rho_\alpha}_a . \qquad (3)$$

Если одна из функций $\psi^{\alpha_i}_{a_i}$ четная, а вторая - нечетная, то $\psi^{\alpha \rho_\alpha}_a$ будет нечетным. Во всех случаях произведения $\psi^{\alpha_1}_{a_1} \psi^{\alpha_2}_{a_2}$ преобразуются по эквивалентным (но не обязательно тождественно совпадающим) копредставлениям $D_{\alpha_1} \times D_{\alpha_2}$, что записывается символически в виде

$$\alpha_1^e \times \alpha_2^e \sim \alpha_1^o \times \alpha_2^o \sim \alpha_1^o \times \alpha_2^e \sim \alpha_1^e \times \alpha_2^o . \qquad (4)$$

Здесь индексы "е" и "о" обозначают четный или нечетный выбор базисных функций (от "*even*" и "*odd*"; символы "*g*" и "*u*" или "$\pm$" не применяются, чтобы не воспринимать эти функции как базисы четных и нечетных копредставлений $D_{\alpha\pm}$ центросимметрических групп). Так как все ККГ для случая $\alpha_1^e \times \alpha_2^e$ приведены в /I0-I2/, в данной работе указано только, каким образом изменится знак коэффициента $[\alpha_1^e a_1, \alpha_2^e a_2 | \alpha^e \rho_\alpha a]$, если один или оба индекса "е" заменить на "о".

Способ применения таблиц поясним на примере. Рассмотрим ККГ для копредставлений групп $T_d \otimes \Theta$ и $O_h(T_d)$. Нечетные базисные функции даны в табл. 2, где $I \varphi^i_m = -\varphi^i_m$. Эти группы изоморфны группе

$O \otimes \Theta$, и для четного базиса $\alpha_1^e \times \alpha_2^e$ все ККГ приведены в табл.2 работы /I0/. При переходе к нечетному базису ($\alpha_i^e \to \alpha_i^o$) эти коэффициенты умножаются на ± 1. Сохранение или изменение знака отражено в табл. 3, где в строке "34", например, записано:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 \alpha_2 & \alpha_1^o \times \alpha_2^o & \alpha_1^o \times \alpha_2^e & \alpha_1^e \times \alpha_2^o \\ 3\ 4 & \bar{4}^* + 5 & 4^* + \bar{5} & \bar{4} + \bar{5}^* . \end{array} \qquad (5)$$

Это означает, что $D_3 \times D_4 = D_4 + D_5$ и для четного базиса все коэффициенты $[3^e a_1, 4^e a_2 | 4^e 1 a]$ и $[3^e a_1, 4^e a_2 | 5^e 1 a]$ содержатся в матрице U^{34} на стр. I2 работы /I0/. При этом коэффициенты меняют знак при переходе

$$\alpha_1^e \times \alpha_2^e \longrightarrow \alpha_1^o \times \alpha_2^o , \ \alpha_1^o \times \alpha_2^e , \ \alpha_1^e \times \alpha_2^o , \qquad (6)$$

если над номером копредставления α стоит черта, и сохраняют знак при отсутствии черты. Звездочка означает, что коэффициенты меняют знак при замене порядка функций, $\psi^{\alpha_1}_{a_1} \psi^{\alpha_2}_{a_2} \to \psi^{\alpha_2}_{a_2} \psi^{\alpha_1}_{a_1}$. Например, из работы /I0/ (стр. I2) находим

$$\begin{aligned} [32, 41 | 413] &\equiv [3^e 2, 4^e 1 | 4^e 13] = \sqrt{3/4} , \\ [32, 41 | 513] &\equiv [3^e 2, 4^e 1 | 5^e 13] = -\sqrt{1/4} , \end{aligned} \qquad (7)$$

и с помощью (5) определяем:

$$\begin{aligned} [3^e 2, 4^e 1 | 4^e 13] &= -[3^o 2, 4^o 1 | 4^e 13] = +[4^o 1, 3^o 2 | 4^e 13] = \\ &= +[3^o 2, 4^e 1 | 4^o 13] = -[4^e 1, 3^o 2 | 4^o 13] = \\ &= -[3^e 2, 4^o 1 | 4^o 13] = -[4^o 1, 3^e 2 | 4^o 13] = \sqrt{3/4} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [3^e 2, 4^e 1 | 5^e 13] &= +[3^o 2, 4^o 1 | 5^e 13] = +[4^o 1, 3^o 2 | 5^e 13] = \\ &= -[3^o 2, 4^e 1 | 5^o 13] = -[4^e 1, 3^o 2 | 5^o 13] = \\ &= -[3^e 2, 4^o 1 | 5^o 13] = +[4^o 1, 3^e 2 | 5^o 13] = -\sqrt{1/4} . \end{aligned}$$

Только в строках "88", "48" и "58" табл. 3 имеется многоточие, что означает, что кроме указанных в этих строках коэффициентов в табл. 4 даны дополнительные коэффициенты, изменяющиеся более сложным образом при переходе к нечетному базису (из-за повторяющихся эквивалентных копредставлений в кронекеровских произведениях). Как и везде, звездочка в табл. 4 означает, что знак коэффициента изменяется при перемене мест функций $\psi^{\alpha_1}_{a_1}$ и $\psi^{\alpha_2}_{a_2}$. Из типографских соображений в этой таблице везде опущен знак квадратного корня над дробью, т.е.

"*81 82 522 -i 1/4*" означает $[8^o 1, 8^o 2 | 5^e 22] = -i\sqrt{1/4}$.

Аналогичным образом построены и все остальные таблицы.

Табл.1. Двойные шубниковские (магнитные) точечные группы

Синг.	$G\otimes C_i$	$G=H\otimes\Theta$	$G(H)=H+H_{a_0}$
Кубическая	$O_h\otimes\Theta$ $T_h\otimes\Theta$ $O_h(T_h)$	$O\otimes\Theta$, $\underline{T_d\otimes\Theta}$ $T\otimes\Theta$	$O_h(O)$, $\underline{O_h(T_d)}$ $T_h(T)$ $O(T)$, $T_d(T)$
Тетрагональная	$D_{4h}\otimes\Theta$ $C_{4h}\otimes\Theta$ $D_{4h}(C_{4h})$ $D_{4h}(D_{2h})$ $C_{4h}(C_{2h})$	$D_4\otimes\Theta$, $\underline{C_{4v}\otimes\Theta}$, $\underline{D_{2d}\otimes\Theta}$ $C_4\otimes\Theta$, $\underline{S_4\otimes\Theta}$	$D_{4h}(D_4)$, $\underline{D_{4h}(C_{4v})}$, $\underline{D_{4h}(D_{2d})}$ $C_{4h}(C_4)$, $\underline{C_{4h}(S_4)}$ $D_4(C_4)$, $C_{4v}(C_4)$, $\underline{D_{2d}(S_4)}$ $D_4(D_2)$, $\underline{C_{4v}(C_{2v})}$, $D_{2d}(D_2)$, $\underline{D_{2d}(C_{2v})}$ $C_4(C_2)$, $S_4(C_2)$
Ортором6.	$D_{2h}\otimes\Theta$ $D_{2h}(C_{2h})$	$D_2\otimes\Theta$, $\underline{C_{2v}\otimes\Theta}$	$D_{2h}(D_2)$, $\underline{D_{2h}(C_{2v})}$ $D_2(C_2)$, $\overline{C_{2v}(C_2)}$, $\underline{C_{2v}(C_s)}$
Монокл.	$C_{2h}\otimes\Theta$ $C_{2h}(C_i)$	$C_2\otimes\Theta$, $\underline{C_s\otimes\Theta}$	$C_{2h}(C_2)$, $\underline{C_{2h}(C_s)}$ $C_2(C_1)$, $C_s(C_1)$
Триклин.	$C_i\otimes\Theta$	$C_1\otimes\Theta$	$C_i(C_1)$
Гексагональная	$D_{6h}\otimes\Theta$ $C_{6h}\otimes\Theta$ $D_{6h}(C_{6h})$ $D_{6h}(D_{3d})$ $C_{6h}(C_{3i})$	$D_6\otimes\Theta$, $\underline{C_{6v}\otimes\Theta}$, $\underline{D_{3h}\otimes\Theta}$ $C_6\otimes\Theta$, $\underline{C_{3h}\otimes\Theta}$	$D_{6h}(D_6)$, $\underline{D_{6h}(C_{6v})}$, $\underline{D_{6h}(D_{3h})}$ $C_{6h}(C_6)$, $\underline{C_{6h}(C_{3h})}$ $D_6(C_6)$, $C_{6v}(C_6)$, $\underline{D_{3h}(C_{3h})}$ $D_6(D_3)$, $\underline{C_{6v}(C_{3v})}$, $D_{3h}(D_3)$, $\underline{D_{3h}(C_{3v})}$ $C_6(C_3)$, $C_{3h}(C_3)$
Тригональная	$D_{3d}\otimes\Theta$ $C_{3i}\otimes\Theta$ $D_{3d}(C_{3i})$	$D_3\otimes\Theta$, $\underline{C_{3v}\otimes\Theta}$ $C_3\otimes\Theta$	$D_{3d}(D_3)$, $\underline{D_{3d}(C_{3v})}$ $C_{3i}(C_3)$ $D_3(C_3)$, $C_{3v}(C_3)$

Табл.2. Кубические группы

$O\otimes\Theta$		$T_d\otimes\Theta$ $O_h(T_d)$	
D_1	φ_0^0	D_2	$i\varphi_0^0$
D_2	$i\sqrt{1/2}(\varphi_2^3-\varphi_{-2}^3)$	D_1	$\sqrt{1/2}(\varphi_{-2}^3-\varphi_2^3)$
D_3	φ_0^2 $\sqrt{1/2}(\varphi_2^2+\varphi_{-2}^2)$	D_3	$-\sqrt{1/2}(\varphi_2^2-\varphi_{-2}^2)$ φ_0^2
D_4	φ_1^1 φ_0^1 φ_{-1}^1	D_5	$-\varphi_{-1}^1$ $i\varphi_0^0$ φ_1^1
D_5	φ_1^2 $i\sqrt{1/2}(\varphi_2^2-\varphi_{-2}^2)$ φ_{-1}^2	D_4	φ_{-1}^2 $\sqrt{1/2}(\varphi_2^2-\varphi_{-2}^2)$ $-\varphi_1^2$
D_6	$\varphi_{1/2}^{1/2}$ $\varphi_{-1/2}^{1/2}$	D_7	$\varphi_{1/2}^{1/2}$ $\varphi_{-1/2}^{1/2}$
D_7	$\sqrt{1/6}\,\varphi_{5/2}^{5/2}-\sqrt{5/6}\,\varphi_{-3/2}^{5/2}$ $-\sqrt{5/6}\,\varphi_{3/2}^{5/2}+\sqrt{1/6}\,\varphi_{-5/2}^{5/2}$	D_6	$-\sqrt{1/6}\,\varphi_{5/2}^{5/2}+\sqrt{5/6}\,\varphi_{-3/2}^{5/2}$ $\sqrt{5/6}\,\varphi_{3/2}^{5/2}-\sqrt{1/6}\,\varphi_{-5/2}^{5/2}$
D_8	$\varphi_{3/2}^{3/2}$ $\varphi_{1/2}^{3/2}$ $\varphi_{-1/2}^{3/2}$ $\varphi_{-3/2}^{3/2}$	D_8	$-\varphi_{-1/2}^{3/2}$ $\varphi_{-3/2}^{3/2}$ $\varphi_{3/2}^{3/2}$ $-\varphi_{1/2}^{3/2}$

Табл.3. Произведения копредставлений групп $T_d\otimes\Theta$ и $O_h(T_d)$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
2 2	1	$\bar1$	$\bar1$	3 5	$4+\bar5^*$	$\bar4+5^*$	$\bar4^*+5$
3 3	$1+2^*+\bar3$	$1^*+2+\bar3$	$\bar1^*+\bar2+\bar3$	3 6	8^*	$\bar8^*$	8^*
4 4	$1+\bar3+\bar4^*+5$	$1+\bar3^*+\bar4^*+\bar5$	$1+3^*+\bar4^*+5$	3 7	8^*	$\bar8^*$	8^*
5 5	$1+\bar3+\bar4^*+5$	$1+\bar3^*+4^*+5$	$1+3^*+4^*+5$	3 8	$\bar6^*+\bar7^*+8$	6^*+7^*+8	$\bar6^*+7^*+\bar8$
6 6	$1^*+\bar4$	$1+\bar4^*$	$\bar1+4^*$	4 5	$2+\bar3^*+4+5^*$	$\bar2+3+4+5^*$	$\bar2+\bar3+4+5^*$
7 7	$1+\bar4$	$1+4^*$	$\bar1+\bar4^*$	4 6	$\bar6+8^*$	$6+8^*$	$\bar6^*+\bar8$
8 8	$1^*+2+\bar3^*+\ldots$	$\bar1+\bar2^*+3^*+\ldots$	$1+2^*+3^*+\ldots$	4 7	$7+8^*$	$\bar7+8^*$	$\bar7^*+\bar8$
2 3	3	$\bar3$	3^*	4 8	$\bar6^*+\bar7^*+\ldots$	$\bar6^*+\bar7^*+\ldots$	$\bar6^*+\bar7^*+\ldots$
2 4	$\bar5$	$\bar5$	5	5 6	$\bar7^*+\bar8$	$\bar7^*+\bar8$	$7+\bar8^*$
2 5	$\bar4$	$\bar4$	4	5 7	$6^*+\bar8$	$6^*+\bar8$	$6+\bar8^*$
2 6	7	$\bar7$	7^*	5 8	$6+7+\ldots$	$6+7+\ldots$	$6+\bar7+\ldots$
2 7	6	$\bar6$	6^*	6 7	$2+5^*$	$2^*+\bar5$	$\bar2^*+\bar5$
2 8	$\bar8$	8	8^*	6 8	$3+\bar4^*+5$	$3+4+\bar5^*$	$\bar3+4+\bar5^*$
3 4	$\bar4^*+5$	$4^*+\bar5$	$\bar4+\bar5^*$	7 8	$3+\bar4^*+\bar5$	$3+4+\bar5^*$	$\bar3+4+\bar5^*$

Табл.4. Коэффициенты КГ для $D_8\times D_8$, $D_4\times D_8$, $D_5\times D_8$

$T_d\otimes\Theta, O_h(T_d): \alpha_1^o\times\alpha_2^o$

8181	413	- 2/5	8181	423	9/40	8181	523	3/8	8182	512	i1/4*
8182	522	-i1/4	8183	411	- 3/10	8183	421	- 3/40	8183	511	1/2*
8183	521	1/8	8184	412	- 1/20	8184	422	- 9/20	8282	421	5/8
8282	521	3/8	8283	412	9/20	8283	422	- 1/20	8284	413	- 3/10
8284	423	- 3/40	8284	513	1/2*	8284	523	- 1/8	8383	423	5/8
8383	523	- 3/8	8384	512	-i1/4*	8384	522	-i1/4	8484	411	- 2/5
8484	421	9/40	8484	521	- 3/8	4181	814	2/3	4181	824	1/6*
4182	821	- 1/2*	4183	812	2/3	4183	822	- 1/6*	4184	823	- 1/2*
4281	811	- 1/3	4281	821	1/3*	4282	812	1/3	4282	822	1/3*
4283	813	- 1/3	4283	823	1/3*	4284	814	1/3	4284	824	- 1/3*
4381	822	1/2*	4382	813	- 2/3	4382	823	1/6*	4383	824	1/2*
4384	811	- 2/3	4384	821	- 1/6*	5181	814	- 2/5*	5181	824	- 1/10
5182	821	5/6	5183	812	2/5*	5183	822	- 1/10	5184	813	- 8/15*
5184	823	- 3/10	5281	813	i1/15*	5281	823	-i3/5	5282	814	-i3/5*
5282	824	-i1/15	5283	811	i3/5*	5283	821	i1/15	5284	812	-i1/15*
5284	822	i3/5	5381	812	- 8/15*	5381	822	- 3/10	5382	813	2/5*
5382	823	- 1/10	5383	824	5/6	5384	811	- 2/5*	5384	821	1/10

$T_d\otimes\Theta, O_h(T_d): \alpha_1^e\times\alpha_2^o$

8181	413	1/2*	8181	423	- 1/8	8181	513	- 3/10	8181	523	- 3/40
8182	512	i9/20	8182	522	-i1/20	8183	421	- 3/8	8183	521	- 5/8
8184	412	- 1/4*	8184	422	- 1/4	8281	512	i1/20	8281	522	i9/20
8282	411	1/2*	8282	421	1/8	8282	511	- 3/10	8282	521	- 3/40
8283	412	- 1/4*	8283	422	1/4	8284	423	- 3/8	8284	513	2/5
8284	523	- 9/40	8381	421	- 3/8	8381	511	- 2/5	8381	521	9/40
8382	412	- 1/4*	8382	422	1/4	8383	413	1/2*	8383	423	1/8
8383	513	3/10	8383	523	3/40	8384	512	i1/20	8384	522	i9/20
8481	412	- 1/4*	8481	422	- 1/4	8482	423	- 3/8	8482	523	5/8
8483	512	i9/20	8483	522	-i1/20	8484	411	1/2*	8484	421	- 1/8
8484	511	3/10	8484	521	3/40	4181	814	8/15*	4181	824	3/10
4182	811	- 2/5*	4182	821	1/10	4183	822	5/6	4184	813	- 2/5*
4184	823	1/10	4281	811	1/15*	4281	821	- 3/5	4282	812	- 3/5*
4282	822	- 1/15	4283	813	- 3/5*	4283	823	- 1/15	4284	814	- 1/15*
4284	824	3/5	4381	812	2/5*	4381	822	- 1/10	4382	823	- 5/6
4383	814	2/5*	4383	824	- 1/10	4384	811	- 8/15*	4384	821	- 3/10
5181	824	1/2*	5182	811	- 2/3	5182	821	1/6*	5183	822	- 1/2*
5184	813	2/3	5184	823	1/6*	5281	813	i1/3	5281	823	-i1/3*
5282	814	i1/3	5282	824	i1/3*	5283	811	-i1/3	5283	821	-i1/3*
5284	812	-i1/3	5284	822	i1/3*	5381	812	2/3	5381	822	1/6*
5382	823	- 1/2*	5383	814	- 2/3	5383	824	1/6*	5384	821	1/2*

$T_d\otimes\Theta, O_h(T_d): \alpha_1^o\times\alpha_2^e$

4181	814	- 2/3	4181	824	1/6*	4182	821	- 1/2*	4183	812	- 2/3
4183	822	- 1/6*	4184	823	- 1/2*	4281	811	1/3	4281	821	1/3*
4282	812	- 1/3	4282	822	1/3*	4283	813	1/3	4283	823	1/3*
4284	814	- 1/3	4284	824	- 1/3*	4381	822	1/2*	4382	813	2/3
4382	823	1/6*	4383	824	1/2*	4384	811	2/3	4384	821	- 1/6*
5181	814	- 2/3*	5181	824	1/10	5182	811	- 8/15*	5182	821	- 3/10
5183	812	2/5*	5183	822	- 1/10	5184	823	5/6	5281	813	i3/5*
5281	823	i1/15	5282	814	-i1/15*	5282	824	i3/5	5283	811	i1/15*
5283	821	-i3/5	5284	812	-i3/5*	5284	822	-i1/15	5381	822	5/6
5382	813	2/5*	5382	823	- 1/10	5383	814	- 8/15*	5383	824	- 3/10
5384	811	- 2/5*	5384	821	1/10						

Табл.5. Тетрагональные группы

$D_4\otimes\Theta$		$C_{4v}\otimes\Theta$ $D_{4h}(C_{4v})$		$D_{2d}\otimes\Theta$ $D_{4h}(D_{2d})$		$S_4\otimes\Theta$ $C_{4h}(S_4)$		$D_{2d}(S_4)$		$C_{4v}(C_{2v})$ $D_{2d}(C_{2v})$	
D_1	φ^0_0	D_2	$-i\varphi^0_0$	D_3	φ^0_0	D_2	φ^0_0	D_2	φ^0_0	D_3	$-\varphi^0_0$
D_2	φ^1_0	D_1	$i\varphi^1_0$	D_4	$i\varphi^1_0$	D_2	—	D_2	—	D_1	$i\varphi^1_0$
D_3	$\sqrt{1/2}(\varphi^2_2+\varphi^2_{-2})$	D_4	$\sqrt{1/2}(\varphi^2_2+\varphi^2_{-2})$	D_1	$-\sqrt{1/2}(\varphi^2_2+\varphi^2_{-2})$	D_1	$-\sqrt{1/2}(\varphi^2_2+\varphi^2_{-2})$	D_1	$-\sqrt{1/2}(\varphi^2_2+\varphi^2_{-2})$	D_3	—
D_4	$i\sqrt{1/2}(\varphi^2_2-\varphi^2_{-2})$	D_3	$i\sqrt{1/2}(\varphi^2_2-\varphi^2_{-2})$	D_2	$\sqrt{1/2}(\varphi^2_2-\varphi^2_{-2})$	D_1	—	D_1	—	D_1	—
D_5	φ^1_1 φ^1_{-1}	D_5	$-i\varphi^1_1$ $i\varphi^1_{-1}$	D_5	φ^1_{-1} φ^1_1	D_3	φ^1_{-1} φ^1_1	D_4 D_3	φ^1_1 φ^1_{-1}	D_2	$-i\varphi^1_1$ $i\varphi^1_{-1}$
D_6	$\varphi^{1/2}_{1/2}$ $\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_6	$i\varphi^{1/2}_{1/2}$ $-i\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_7	$\varphi^{1/2}_{-1/2}$ $-\varphi^{1/2}_{1/2}$	D_8	$\varphi^{1/2}_{-1/2}$ $-\varphi^{1/2}_{1/2}$	D_8 D_7	$-\varphi^{1/2}_{1/2}$ $\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_5	$i\varphi^{1/2}_{1/2}$ $-i\varphi^{1/2}_{-1/2}$
D_7	$\varphi^{3/2}_{3/2}$ $\varphi^{3/2}_{-3/2}$	D_7	$-i\varphi^{3/2}_{3/2}$ $i\varphi^{3/2}_{-3/2}$	D_6	$\varphi^{3/2}_{-3/2}$ $-\varphi^{3/2}_{3/2}$	D_5	$\varphi^{3/2}_{-3/2}$ $-\varphi^{3/2}_{3/2}$	D_6 D_5	$-\varphi^{3/2}_{3/2}$ $\varphi^{3/2}_{-3/2}$	D_5	—

Табл.6. Произведения копредставлений групп $C_{4v}\otimes\Theta$ и $D_{4h}(C_{4v})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
2 2	1	1	1	2 4	3	3	$\bar3^*$	3 7	$\bar6^*$	6^*	6^*
3 3	$\bar1$	1^*	$\bar1^*$	2 5	5	$\bar5$	5^*	4 5	5	5	$\bar5$
4 4	$\bar1$	1^*	$\bar1^*$	2 6	$\bar6$	6	6^*	4 6	$\bar7^*$	7^*	7^*
5 5	$1+2^*+\bar3+\bar4$	$\bar1^*+2+\bar3+4$	$1^*+\bar2+\bar3+4$	2 7	7	$\bar7^*$	7	4 7	6^*	$\bar6^*$	6^*
6 6	$1^*+2+\bar5$	$1+\bar2^*+\bar5$	$\bar1+2^*+\bar5$	3 4	$\bar2^*$	$\bar2$	$\bar2$	5 6	$\bar6^*+7$	$\bar6^*+7$	$\bar6^*+\bar7$
7 7	$1^*+2+\bar5$	$\bar1+2^*+\bar5$	$1+\bar2^*+\bar5$	3 5	$\bar5$	$\bar5$	$\bar5$	5 7	$6^*+\bar7$	$6^*+\bar7$	$\bar6^*+\bar7$
2 3	$\bar4$	$\bar4$	$\bar4^*$	3 6	7^*	$\bar7^*$	7^*	6 7	$3+4+5^*$	$3+\bar4+5^*$	$\bar3+4+5^*$

Табл.7. $D_{2d}\otimes\Theta,\ D_{4h}(D_{2d})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	1	1^*	$\bar{1}^*$
33	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$
44	1	$\bar{1}^*$	1^*
55	$1+\bar{2}^*+3+\bar{4}$	$\bar{1}+\bar{2}+3+\bar{4}^*$	$\bar{1}+2+3+4^*$
66	$1^*+\bar{2}+\bar{5}$	$\bar{1}+\bar{2}+\bar{5}^*$	$1+\bar{2}+5^*$
77	$1^*+\bar{2}+\bar{5}$	$1+\bar{2}+5^*$	$1+\bar{2}+\bar{5}^*$
23	$\bar{4}$	$\bar{4}^*$	$\bar{4}$
24	$\bar{3}^*$	3	3
25	$\bar{5}$	5	$\bar{5}^*$
26	$\bar{6}^*$	$\bar{6}^*$	$\bar{6}^*$
27	$\bar{7}^*$	$\bar{7}^*$	$\bar{7}^*$
34	$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{2}^*$
35	5	5	5
36	$\bar{7}$	7	7^*
37	$\bar{6}$	6	6^*
45	$\bar{5}^*$	5^*	$\bar{5}$
46	7^*	7^*	$\bar{7}^*$
47	6^*	6^*	$\bar{6}^*$
56	$\bar{6}^*+7$	$6+\bar{7}^*$	$6+7^*$
57	$6^*+\bar{7}$	$\bar{6}+7^*$	$6+7^*$
67	$3+\bar{4}+5^*$	$\bar{3}^*+4+\bar{5}$	$3+4+\bar{5}^*$

Табл.8. $S_4\otimes\Theta,\ C_{4h}(S_4)$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$
33	$1_1+\bar{1}_2^*+2_1+\bar{2}_2$	$\bar{1}_1+1_2+2_1+\bar{2}_2^*$	$\bar{1}_1+\bar{1}_2+2_1+2_2^*$
55	$1_1^*+\bar{1}_2+3$	$\bar{1}_1+1_2+\bar{3}^*$	$1_1+1_2+3^*$
88	$1_1^*+\bar{1}_2+3$	$\bar{1}_1+1_2+\bar{3}^*$	$1_1+1_2+3^*$
23	3	3	3
25	$\bar{8}$	8	8^*
28	$\bar{5}$	5	5^*
35	$\bar{5}+8^*$	$5+\bar{8}^*$	5^*+8
38	$5^*+\bar{8}$	$\bar{5}^*+8$	$5+8^*$
58	$2_1+\bar{2}_2+3^*$	$\bar{2}_1^*+2_2+3$	$2_1^*+2_2+\bar{3}$

Табл. 9. $C_{4v}(C_{2v}),\ D_{2d}(C_{2v})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	$1_1+\bar{1}_2+3_1^*+\bar{3}_2$	$\bar{1}_1^*+\bar{1}_2+3_1+3_2$	$1_1^*+\bar{1}_2+\bar{3}_1+3_2$
33	1	1	1
55	$1^*+3+\bar{2}$	$1+\bar{3}^*+\bar{2}$	$\bar{1}+3^*+\bar{2}$
23	2^*	$\bar{2}$	2
25	$\bar{5}_1^*+5_2$	$\bar{5}_1^*+5_2$	$\bar{5}_1^*+\bar{5}_2$
35	$\bar{5}$	5	5^*

Табл.I0. $D_{2d}(S_4)$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	23	4	4	4	35	7^*	$\bar{7}^*$	7	48	$\bar{7}$	7	7^*
33	2	2	2	24	3	3	3	36	$\bar{5}$	5	5^*	56	1^*	$\bar{1}$	1
44	2	2	2	25	$\bar{8}$	8	8^*	37	$\bar{8}$	8	8^*	57	2	$\bar{2}^*$	2^*
55	$\bar{3}$	$\bar{3}^*$	3^*	26	$\bar{7}$	7	7^*	38	6^*	$\bar{6}^*$	6	58	4^*	$\bar{4}$	$\bar{4}$
66	$\bar{4}$	$\bar{4}^*$	4^*	27	$\bar{6}$	6	6^*	45	$\bar{6}$	6	6^*	67	3^*	$\bar{3}$	$\bar{3}$
77	$\bar{4}$	4^*	$\bar{4}^*$	28	$\bar{5}$	5	5^*	46	8^*	$\bar{8}^*$	8	68	2^*	$\bar{2}$	2
88	$\bar{3}$	3^*	$\bar{3}^*$	34	1	$\bar{1}$	$\bar{1}$	47	5^*	$\bar{5}^*$	5	78	1	$\bar{1}^*$	1^*

Табл.II.Орторомбические и моноклинные группы

$D_2\otimes\Theta$		$C_{2v}\otimes\Theta$ $D_{2h}(C_{2v})$		$C_{2v}(C_s)$		$C_s\otimes\Theta$ $C_{2h}(C_s)$	
D_1	φ_0^0	D_3	$-i\varphi_0^0$	D_2	φ_0^0	D_2	φ_0^0
D_2	$\sqrt{1/2}(\varphi_1^1+\varphi_{-1}^1)$	D_4	$\sqrt{1/2}(\varphi_1^1+\varphi_{-1}^1)$	D_1	φ_1^1	D_1	$\sqrt{1/2}(\varphi_1^1+\varphi_{-1}^1)$
D_3	φ_0^1	D_1	$i\varphi_0^1$	D_2	—	D_2	—
D_4	$i\sqrt{1/2}(\varphi_1^1-\varphi_{-1}^1)$	D_2	$i\sqrt{1/2}(\varphi_{-1}^1-\varphi_1^1)$	D_1	—	D_1	—
D_5	$\varphi_{1/2}^{1/2}$ $\varphi_{-1/2}^{1/2}$	D_5	$i\varphi_{1/2}^{1/2}$ $-i\varphi_{-1/2}^{1/2}$	D_4	$-\varphi_{1/2}^{1/2}$	D_3	$\varphi_{1/2}^{1/2}$ $-\varphi_{1/2}^{1/2}$
				D_3	$\varphi_{-1/2}^{1/2}$		

Табл.I2. $C_{2v}\otimes\Theta,\ D_{2h}(C_{2v})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	1	$\bar{1}^*$	1^*
33	1	1	1
44	1	$\bar{1}^*$	1^*
55	$1^*+\bar{2}+3+\bar{4}$	$1+\bar{2}+\bar{3}^*+\bar{4}$	$\bar{1}+\bar{2}+3^*+\bar{4}$
23	$\bar{4}$	4^*	4
24	3^*	3	$\bar{3}$
25	$\bar{5}^*$	$\bar{5}^*$	$\bar{5}^*$
34	2	$\bar{2}$	2^*
35	$\bar{5}$	5	5^*
45	$\bar{5}^*$	$\bar{5}^*$	$\bar{5}^*$

Табл.I3. $C_{2v}(C_s)$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	1	1	1
33	2	$\bar{2}^*$	2^*
44	2	$\bar{2}^*$	2^*
23	$\bar{4}$	4	4^*
24	$\bar{3}$	3	3^*
34	1^*	1	$\bar{1}$

Табл.I4. $C_s\otimes\Theta,\ C_{2h}(C_s)$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
22	1	1	1
33	$1_1^*+\bar{1}_2+2_1+\bar{2}_2$	$1_1+\bar{1}_2+\bar{2}_1^*+2_2$	$\bar{1}_1+\bar{1}_2+2_1^*+2_2$
23	$\bar{3}$	3	3^*

Табл.15. Гексагональные и тригональные группы

$D_6 \otimes \Theta$		$D_{3h} \otimes \Theta$ $D_{6h}(D_{3h})$		$C_{6v} \otimes \Theta$ $D_{6h}(C_{6v})$		$C_{3h} \otimes \Theta$ $C_{6v}(C_{3h})$		$D_{3h}(C_{3h})$		$C_{6v}(C_{3v})$ $D_{3h}(C_{3v})$		$C_{3v} \otimes \Theta$ $D_{3d}(C_{3v})$	
D_1	φ^0_0	D_4	φ^0_0	D_2	$-i\varphi^0_0$	D_2	φ^0_0	D_2	φ^0_0	D_2	$-i\varphi^0_0$	D_2	$-i\varphi^0_0$
D_2	φ^1_0	D_3	$i\varphi^1_0$	D_1	$i\varphi^1_0$	D_2	—	D_2	—	D_1	$i\varphi^1_0$	D_1	$i\varphi^1_0$
D_3	$i\sqrt{1/2}(\varphi^3_3-\varphi^3_{-3})$	D_2	$\sqrt{1/2}(\varphi^3_3-\varphi^3_{-3})$	D_4	$i\sqrt{1/2}(\varphi^3_3-\varphi^3_{-3})$	D_1	—	D_1	—	D_2	—	D_1	—
D_4	$\sqrt{1/2}(\varphi^3_3+\varphi^3_{-3})$	D_1	$\sqrt{1/2}(\varphi^3_3+\varphi^3_{-3})$	D_3	$\sqrt{1/2}(\varphi^3_3+\varphi^3_{-3})$	D_1	$\sqrt{1/2}(\varphi^3_3+\varphi^3_{-3})$	D_1	$\sqrt{1/2}(\varphi^3_3+\varphi^3_{-3})$	D_1	—	D_2	—
D_5	φ^1_1 φ^1_{-1}	D_6	φ^1_{-1} φ^1_1	D_5	$-i\varphi^1_1$ $i\varphi^1_{-1}$	D_3	φ^1_{-1} φ^1_1	D_4 D_3	φ^1_1 φ^1_{-1}	D_3	$-i\varphi^1_1$ $i\varphi^1_{-1}$	D_3	$-i\varphi^1_1$ $i\varphi^1_{-1}$
D_6	φ^2_2 φ^2_{-2}	D_5	φ^2_{-2} φ^2_2	D_6	$-i\varphi^2_2$ $i\varphi^2_{-2}$	D_5	φ^2_{-2} φ^2_2	D_6 D_5	φ^2_2 φ^2_{-2}	D_3	—	D_3	—
D_7	$\varphi^{1/2}_{1/2}$ $\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_8	$-\varphi^{1/2}_{-1/2}$ $\varphi^{1/2}_{1/2}$	D_7	$-i\varphi^{1/2}_{1/2}$ $i\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_{11}	$-\varphi^{1/2}_{-1/2}$ $\varphi^{1/2}_{1/2}$	D_{12} D_{11}	$\varphi^{1/2}_{1/2}$ $-\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_4	$-i\varphi^{1/2}_{1/2}$ $i\varphi^{1/2}_{-1/2}$	D_4	$-i\varphi^{1/2}_{1/2}$ $i\varphi^{1/2}_{-1/2}$
D_8	$\varphi^{5/2}_{5/2}$ $\varphi^{5/2}_{-5/2}$	D_7	$-\varphi^{5/2}_{-5/2}$ $\varphi^{5/2}_{5/2}$	D_8	$-i\varphi^{5/2}_{5/2}$ $i\varphi^{5/2}_{-5/2}$	D_7	$-\varphi^{5/2}_{-5/2}$ $\varphi^{5/2}_{5/2}$	D_8 D_7	$\varphi^{5/2}_{5/2}$ $-\varphi^{5/2}_{-5/2}$	D_4	—	D_4	—
D_9	$\varphi^{3/2}_{3/2}$ $\varphi^{3/2}_{-3/2}$	D_9	$\varphi^{3/2}_{-3/2}$ $-\varphi^{3/2}_{3/2}$	D_9	$-i\varphi^{3/2}_{3/2}$ $i\varphi^{3/2}_{-3/2}$	D_9	$\varphi^{3/2}_{-3/2}$ $-\varphi^{3/2}_{3/2}$	D_{10} D_9	$-\varphi^{3/2}_{3/2}$ $\varphi^{3/2}_{-3/2}$	D_5 D_6	$-\sqrt{1/2}(\varphi^{3/2}_{3/2}-i\varphi^{3/2}_{-3/2})$ $\sqrt{1/2}(i\varphi^{3/2}_{3/2}-\varphi^{3/2}_{-3/2})$	D_5	$-i\varphi^{3/2}_{3/2}$ $i\varphi^{3/2}_{-3/2}$

Табл.16. $D_{3h} \otimes \Theta$, $D_{6h}(D_{3h})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o \times \alpha_2^o$	$\alpha_1^o \times \alpha_2^e$	$\alpha_1^e \times \alpha_2^o$
2 2	1	$\bar{1}^*$	1^*
3 3	1	1^*	$\bar{1}^*$
4 4	1	1	1
5 5	$1+\bar{2}^*+6$	$1+\bar{2}+6$	$1+2+6$
6 6	$1+\bar{2}^*+6$	$1+\bar{2}+6$	$1+2+6$
7 7	$1^*+\bar{2}+5$	$\bar{1}+2+5^*$	$1+2+\bar{5}^*$
8 8	$1^*+\bar{2}+5$	$\bar{1}+2+5^*$	$1+2+\bar{5}^*$
9 9	$1^*+\bar{2}+\bar{3}+4$	$1+\bar{2}+3+\bar{4}^*$	$\bar{1}+\bar{2}+3+4^*$
2 3	$\bar{4}^*$	4	4
2 4	$\bar{3}$	$\bar{3}^*$	$\bar{3}$
2 5	$\bar{5}$	5	$\bar{5}^*$
2 6	$\bar{6}$	6	$\bar{6}^*$
2 7	7^*	$\bar{7}^*$	7^*
2 8	8^*	8^*	$\bar{8}^*$
2 9	$\bar{9}^*$	$\bar{9}^*$	$\bar{9}^*$
3 4	2	$\bar{2}^*$	2
3 5	$\bar{6}^*$	6^*	$\bar{6}$
3 6	$\bar{5}^*$	5^*	$\bar{5}$
3 7	$\bar{8}^*$	$\bar{8}^*$	$\bar{8}^*$
3 8	$\bar{7}^*$	7^*	7^*
3 9	9^*	9^*	$\bar{9}^*$
4 5	6	6	6
4 6	5	5	5
4 7	8	$\bar{8}$	8^*
4 8	7	$\bar{7}$	7^*
4 9	$\bar{9}$	9	9^*
5 6	$\bar{3}+4+5$	$\bar{3}^*+4+5$	3^*+4+5
5 7	$7+\bar{9}^*$	$\bar{7}+\bar{9}^*$	$7^*+\bar{9}$
5 8	$8+\bar{9}^*$	$8+\bar{9}^*$	$\bar{8}^*+\bar{9}$
5 9	7^*+8^*	$\bar{7}^*+\bar{8}^*$	$7+8$
6 7	$\bar{8}^*+9$	$\bar{8}^*+\bar{9}$	$\bar{8}+9^*$
6 8	$\bar{7}^*+9$	7^*+9	$7+\bar{9}^*$
6 9	$\bar{7}+\bar{8}$	$\bar{7}+\bar{8}$	$\bar{7}^*+\bar{8}^*$
7 8	$\bar{3}+4+6^*$	$3+4^*+\bar{6}$	$\bar{3}+4^*+6$
7 9	$5+\bar{6}$	$\bar{5}+\bar{6}$	$\bar{5}+6^*$
8 9	$5^*+\bar{6}$	$5+6^*$	$5+\bar{6}^*$

Табл.17. $C_{6v} \otimes \Theta$, $D_{6h}(C_{6v})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o \times \alpha_2^o$	$\alpha_1^o \times \alpha_2^e$	$\alpha_1^e \times \alpha_2^o$
2 2	1	1	1
3 3	1	$\bar{1}^*$	1^*
4 4	1	1^*	$\bar{1}^*$
5 5	$1+2^*+\bar{6}$	$\bar{1}^*+2+6$	$1^*+\bar{2}+6$
6 6	$1+2^*+\bar{6}$	$\bar{1}^*+2+\bar{6}$	$1^*+\bar{2}+\bar{6}$
7 7	$1^*+2+\bar{5}$	$\bar{1}+2^*+5$	$1+\bar{2}^*+5$
8 8	$1^*+2+\bar{5}$	$\bar{1}+2^*+\bar{5}$	$1+\bar{2}^*+\bar{5}$
9 9	$1^*+2+\bar{3}+\bar{4}$	$\bar{1}+2^*+3+\bar{4}$	$1+\bar{2}^*+3+\bar{4}$
2 3	4	4	$\bar{4}^*$
2 4	$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{3}^*$
2 5	5	$\bar{5}$	5^*
2 6	6	$\bar{6}$	6^*
2 7	7	$\bar{7}$	7^*
2 8	8	$\bar{8}$	8^*
2 9	9	$\bar{9}$	9^*
3 4	$\bar{2}^*$	2	2
3 5	6	6	$\bar{6}$
3 6	5	5	$\bar{5}$
3 7	8^*	8^*	$\bar{8}^*$
3 8	7^*	7^*	$\bar{7}^*$
3 9	9^*	9^*	$\bar{9}^*$
4 5	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$
4 6	$\bar{5}$	$\bar{5}$	$\bar{5}$
4 7	$\bar{8}^*$	$\bar{8}^*$	$\bar{8}^*$
4 8	$\bar{7}^*$	$\bar{7}^*$	$\bar{7}^*$
4 9	$\bar{9}^*$	$\bar{9}^*$	$\bar{9}^*$
5 6	$\bar{3}+\bar{4}+5$	$3+\bar{4}+\bar{5}$	$3+\bar{4}+5$
5 7	$7^*+\bar{9}$	7^*+9	$\bar{7}^*+9$
5 8	$\bar{8}^*+9$	$\bar{8}^*+\bar{9}$	$\bar{8}^*+9$
5 9	$7+\bar{8}$	$\bar{7}+8$	$7+8$
6 7	$\bar{8}+9^*$	$8+9^*$	$8+\bar{9}^*$
6 8	$7+\bar{9}^*$	$\bar{7}+\bar{9}^*$	$7+\bar{9}^*$
6 9	$7^*+\bar{8}^*$	$7^*+\bar{8}^*$	$\bar{7}^*+\bar{8}^*$
7 8	$\bar{3}+\bar{4}+6^*$	$3+\bar{4}+\bar{6}^*$	$3+\bar{4}+6^*$
7 9	$5^*+\bar{6}$	$\bar{5}^*+6$	5^*+6
8 9	$5^*+\bar{6}$	$5^*+\bar{6}$	$\bar{5}^*+\bar{6}$

Табл.I8. $C_{3h}\otimes\Theta$. $C_{6v}(C_{3h})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
2 2	1	1	1
3 3	$1_1+\bar{1}_2^*+3$	$1_1+\bar{1}_2+3$	1_1+1_2+3
5 5	$1_1+\bar{1}_2^*+3$	$1_1+\bar{1}_2+3$	1_1+1_2+3
7 7	$1_1^*+\bar{1}_2+5$	$1_1+\bar{1}_2+\bar{5}^*$	$\bar{1}_1+\bar{1}_2+5^*$
9 9	$1_1^*+\bar{1}_2+2_1+\bar{2}_2$	$\bar{1}_1+1_2+\bar{2}_1^*+\bar{2}_2$	$1_1+1_2+\bar{2}_1^*+\bar{2}_2$
11 11	$1_1^*+\bar{1}_2+5$	$1_1+\bar{1}_2+\bar{5}^*$	$\bar{1}_1+\bar{1}_2+5^*$
2 3	5	5	5
2 5	3	3	3
2 7	$\bar{11}$	11	11^*
2 9	9	$\bar{9}$	9
2 11	$\bar{7}$	7	7^*
3 5	$2_1+\bar{2}_2+5$	$2_1+\bar{2}_2^*+5$	$2_1+2_2^*+5$
3 7	$\bar{9}+11^*$	$\bar{9}+\bar{11}^*$	$\bar{9}^*+11$
3 9	$7+11$	$7+11$	$\bar{7}^*+\bar{11}^*$
3 11	$7^*+\bar{9}$	$\bar{7}^*+\bar{9}$	$7+\bar{9}^*$
5 7	$\bar{7}+9^*$	$7+9^*$	$7^*+\bar{9}$
5 9	$\bar{7}^*+\bar{11}^*$	$7^*+\bar{11}^*$	$7+\bar{11}$
5 11	$9^*+\bar{11}$	9^*+11	$\bar{9}+11^*$
7 9	$\bar{3}+\bar{5}^*$	$3^*+\bar{5}$	$\bar{3}^*+\bar{5}$
7 11	$2_1+\bar{2}_2+\bar{3}^*$	$\bar{2}_1^*+2_2+3$	$2_1^*+2_2+\bar{3}$
9 11	$\bar{3}+\bar{5}^*$	$3^*+\bar{5}$	$3^*+\bar{5}$

Табл.I9. $D_{3h}(C_{3h})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha^o\times\alpha^o$	$\alpha^o\times\alpha^e$	$\alpha^e\times\alpha^o$
2 2	1	1	1	4 8	$\bar{12}^*$	12^*	12
3 3	4	4	4	4 9	$\bar{8}$	$\bar{8}$	$\bar{8}^*$
4 4	3	3	3	4 10	$\bar{11}$	$\bar{11}$	$\bar{11}^*$
5 5	3	3	3	4 11	$\bar{7}^*$	7^*	7
6 6	4	4	4	4 12	9	9	$\bar{9}^*$
7 7	5	$\bar{5}^*$	5^*	5 6	1	1	1
8 8	6	$\bar{6}^*$	6^*	5 7	$\bar{9}^*$	$\bar{9}^*$	$\bar{9}$
9 9	2	$\bar{2}^*$	2^*	5 8	7	$\bar{7}$	7^*
10 10	2	$\bar{2}^*$	2^*	5 9	11^*	11^*	$\bar{11}$
11 11	6	6^*	$\bar{6}^*$	5 10	8^*	8^*	$\bar{8}$
12 12	5	5^*	$\bar{5}^*$	5 11	12	$\bar{12}$	12^*
2 3	$\bar{6}$	$\bar{6}$	$\bar{6}$	5 12	$\bar{10}^*$	$\bar{10}^*$	$\bar{10}$
2 4	5	5	5	6 7	8	$\bar{8}$	8^*
2 5	4	4	4	6 8	$\bar{10}^*$	$\bar{10}^*$	$\bar{10}$
2 6	3	3	$\bar{3}$	6 9	7^*	7^*	$\bar{7}$
2 7	12	$\bar{12}$	12^*	6 10	12^*	12^*	$\bar{12}$
2 8	11	$\bar{11}$	11^*	6 11	$\bar{9}^*$	$\bar{9}^*$	$\bar{9}$
2 9	$\bar{10}$	10	10^*	6 12	11	$\bar{11}$	11^*
2 10	$\bar{9}$	9	9^*	7 8	$\bar{1}$	$\bar{1}$	1
2 11	8	$\bar{8}$	8^*	7 9	$\bar{3}$	$\bar{3}^*$	$\bar{3}^*$
2 12	7	$\bar{7}$	7^*	7 10	6^*	$\bar{6}$	$\bar{6}$
3 4	1	1	1	7 11	2	2^*	$\bar{2}$
3 5	2	2	2	7 12	4^*	$\bar{4}$	4^*
3 6	5	5	5	8 9	5^*	$\bar{5}$	$\bar{5}$
3 7	$\bar{11}^*$	11^*	11	8 10	$\bar{4}$	$\bar{4}^*$	4^*
3 8	9	9	$\bar{9}^*$	8 11	3^*	$\bar{3}$	3
3 9	$\bar{12}$	$\bar{12}$	$\bar{12}^*$	8 12	2	2^*	$\bar{2}^*$
3 10	$\bar{7}$	$\bar{7}$	$\bar{7}^*$	9 10	1^*	1	$\bar{1}$
3 11	10	10	$\bar{10}^*$	9 11	$\bar{4}$	4^*	$\bar{4}^*$
3 12	$\bar{8}^*$	8^*	8	9 12	$\bar{6}^*$	6	6
4 5	6	6	6	10 11	5^*	$\bar{5}$	$\bar{5}$
4 6	2	2	2	10 12	$\bar{3}$	3^*	$\bar{3}^*$
4 7	10	10	$\bar{10}^*$	11 12	1^*	$\bar{1}$	1

Табл.20. $C_{3v}\otimes\Theta$, $D_{3d}(C_{3v})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
2 2	1	1	1
3 3	$1+2^*+\bar{3}$	$\bar{1}^*+2+\bar{3}$	$1^*+\bar{2}+\bar{3}$
4 4	$1^*+2+\bar{3}$	$\bar{1}+2^*+3$	$1+\bar{2}^*+3$
5 5	$1_1^*+\bar{1}_2+2_1+\bar{2}_2$	$\bar{1}_1+1_2+2_1^*+\bar{2}_2$	$1_1+1_2+\bar{2}_1^*+\bar{2}_2$
2 3	3	$\bar{3}$	3^*
2 4	4	$\bar{4}$	4^*
2 5	5	$\bar{5}$	5^*
3 4	$4^*+\bar{5}$	4^*+5	$\bar{4}^*+5$
3 5	$4_1+\bar{4}_2$	$\bar{4}_1+4_2$	4_1+4_2
4 5	$3_1^*+\bar{3}_2$	$\bar{3}_1^*+\bar{3}_2$	$3_1^*+\bar{3}_2$

Табл.2I. $C_{6v}(C_{3v})$, $D_{3h}(C_{3v})$

$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$	$\alpha_1\alpha_2$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^o$	$\alpha_1^o\times\alpha_2^e$	$\alpha_1^e\times\alpha_2^o$
2 2	1	1	1	2 6	5	$\bar{5}$	5^*
3 3	$1+2^*+\bar{3}^*$	$\bar{1}^*+2+\bar{3}^*$	$1^*+\bar{2}+\bar{3}^*$	3 4	$4^*+\bar{5}+\bar{6}$	4^*+5+6	$\bar{4}^*+5+6$
4 4	$1^*+2+\bar{3}$	$\bar{1}+2^*+3$	$1+\bar{2}^*+3$	3 5	4	$\bar{4}$	4
5 5	2	2^*	$\bar{2}^*$	3 6	4	$\bar{4}$	4
6 6	2	2^*	$\bar{2}^*$	4 5	3^*	$\bar{3}^*$	3^*
2 3	3	$\bar{3}$	3^*	4 6	3^*	$\bar{3}^*$	3^*
2 4	4	$\bar{4}$	4^*	5 6	1^*	$\bar{1}$	1
2 5	6	$\bar{6}$	6^*				

Литература

I. Вигнер Е. Теория групп. ИЛ, М., I96I.

2. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. "Наука", М., I975.

3. Коцев И.Н., Аройо М.И. ОИЯИ, PI7-I0987, Дубна, I977.

4. Racah G. Phys. Rev., 1949, 76, p. 1352.

5. Коцев И.Н. К теории копредставлений магнитных групп. ИРЭ АН УССР, Харьков, I972.

6. Коцев И.Н. Кристаллография, I974, I9, с.459.
7. Aviran A., Litvin D.B. J.Math.Phys., 1973, 14, p. 1491.
8. Sakata I. J.Math.Phys., 1974, 15, p. 1710.
9. Rudra P. J.Math.Phys., 1974, 15, p. 2031.
I0. Коцев И.Н., Аройо М.И. ОИЯИ, PI7-II906, Дубна, I978.
II. Коцев И.Н., Аройо М.И. ОИЯИ, PI7-II907, Дубна, I978.
I2. Коцев И.Н., Аройо М.И. ОИЯИ, PI7-II908, Дубна, I978.
I3. Kotzev J.N., Aroyo M.I. Clebsch-Gordan Coefficients for Magnetic Groups and Generalized Racah's Lemma. XI International Congress of Crystallography. Warszawa, 1978. Abstract 01.I.15.
I4. Леушин А.М. Таблицы функций, преобразующихся по неприводимым представлениям кристаллографических точечных групп. "Наука", М., I968.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 ноября I979 года.